



Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Física

Funciones espectrales de operadores diferenciales en espacios euclídeos máximamente simétricos y aplicaciones en QFT

Trabajo de Diploma - Licenciatura en Física

Juan José Gervasio

Directora: Carlota Gabriela Beneventano
Asesora Científica: Eve Mariel Santangelo

Marzo de 2017

Resumen

En el presente trabajo se calcularon acciones efectivas al orden de un loop para la teoría de campo escalar masivo con acoplamiento conforme sobre los espacios euclídeos S^n y H^n de dimensión impar, mediante regularización con función Zeta. Se estudiaron las similitudes y diferencias de la traza del núcleo de calor en cada caso, y cómo conducen a los resultados obtenidos para las acciones efectivas. La topología del espacio de background fue crucial en estos casos. Las acciones efectivas resultaron ser bien distintas en las regiones más cercanas al límite UV, en el que sólo hay presentes modos no masivos, pero coincidentes, via extensión analítica en el radio, en el límite IR.

También se puso a prueba a la acción efectiva como posible función C de la teoría en tres dimensiones. Fue necesario introducir una renormalización para las divergencias IR y, si bien la acción efectiva resultante no cumple todas las condiciones de función C (ni siquiera en el sentido más débil, pues no es siempre positiva), se logró obtener una nueva función \tilde{W} que sí es una buena función C en S^3 , y mide los efectos de volumen finito.

Agradecimientos

Fundamentalmente, a mi familia, por darme la oportunidad de hacer lo que me gusta y apoyarme en mis decisiones.

A Gaby y Mariel, por la guía, las correcciones, y la paciencia para bancarse todas mis dudas.

A mis amigos, por ayudar a despejarme de toda esta locura.

Indice General

1	Introducción	5
2	Regularización con función Zeta	8
2.1	Generalidades y definiciones previas	8
2.1.1	Campo escalar en espacio curvo euclídeo	8
2.2	Núcleo de calor y función Zeta	10
2.3	Regularización de la acción efectiva mediante función Zeta	12
2.4	Análisis dimensional de las funciones espectrales	13
3	Campo escalar sin masa con acoplamiento conforme en espacio S^3	16
3.1	Generalidades de S^3	16
3.2	Núcleo de calor para el laplaciano conforme en S^3	17
3.3	Función Zeta y acción efectiva en S^3	20
4	Campo escalar sin masa con acoplamiento conforme en espacio H^3	25
4.1	Generalidades de H^3	25
4.2	Núcleo de calor para el laplaciano conforme en H^3	26
4.3	Función Zeta y acción efectiva en H^3	28
5	Acciones efectivas para el campo escalar masivo con acoplamiento conforme en S^3 y H^3	30
5.1	Espacio S^3	30
5.1.1	Función Zeta y acción efectiva	31
5.2	Espacio H^3	36
5.2.1	Función Zeta y acción efectiva	36
5.3	Comparación en el límite UV e IR	37
5.4	La acción efectiva como posible función \mathcal{C}	39
6	Acciones efectivas en dimensión impar arbitraria	43
6.1	Esfera S^d	43
6.1.1	Traza del núcleo de calor	45
6.1.2	Función Zeta y acción efectiva	48
6.2	Espacio hiperbólico H^d	51
6.2.1	Traza del núcleo de calor - Comparación con S^{2k+1}	52
6.2.2	Función Zeta y acción efectiva	54
6.3	Comparación en el límite UV e IR	54

7 Conclusiones	58
Apéndices	60
A Campo escalar masivo en espacio chato euclideo	61
B Autovalores y autovectores del laplaciano mínimo en S^3 y H^3	64
B.1 Espacio S^3	64
B.2 Espacio H^3	66
C Relaciones entre raíces y coeficientes de un polinomio	70
Bibliografía	71

1 | Introducción

En Teoría Cuántica de Campos (QFT), debido a la imposibilidad de calcular exactamente las magnitudes físicas, como pueden ser la sección eficaz en un proceso de dispersión, o una función de correlación, es usual realizar un desarrollo perturbativo de las mismas. Dicho cálculo involucra, a cada orden considerado, sumar cantidades que pueden ser formalmente divergentes. Por ejemplo, en el contexto de diagramas de Feynman, las contribuciones debidas a diagramas con loops no están bien definidas, pues conducen a integrales divergentes.

En esos casos es necesario realizar un proceso de *regularización*, esto es, definir alguna función dependiente de un parámetro Λ , llamado regulador, tal que esté bien definida como función de Λ , y en algún límite de éste (por lo general, en $\Lambda \rightarrow \infty$), se recupere la expresión original de la cantidad a calcular.

Existen muchos métodos de regularización, con mayor o menor dificultad en los cálculos intermedios según el caso. La idea general de la regularización consiste en aislar las divergencias antes de tomar el límite en Λ . La posterior *renormalización* consiste en adjudicar tales divergencias a las cantidades físicas "desnudas", obteniendo así expresiones finitas para las cantidades físicas medibles. Los resultados finales deberían ser independientes del método de regularización utilizado.

Una magnitud física de interés es la acción efectiva al orden de un loop (de aquí en más, será llamada simplemente acción efectiva), que mide los efectos debidos a fluctuaciones cuánticas en aproximación semiclásica. Usando el formalismo de la integral funcional, la acción efectiva está dada por el determinante de un operador que no es acotado, la sucesión de autovalores crece indefinidamente y, entonces, el determinante diverge. En estos casos es útil recurrir a funciones espectrales, como la traza del núcleo de calor y la función Zeta, para regularizar la acción efectiva y finalmente, mediante extensión analítica, poder darle un valor finito.

En este trabajo se profundizará en el estudio de funciones espectrales para regularizar acciones efectivas. Nos concentraremos sobre la obtención de acciones efectivas para escalares libres en espacios curvos máximamente simétricos de dimensiones impares arbitrarias. Nuestro primer objetivo será comparar el comportamiento de tales acciones efectivas en los puntos conformes correspondientes a campos sin masa y a campos infinitamente masivos, para determinar los efectos de gran escala sobre la magnitud física calculada.

También es interesante la acción efectiva en el marco del flujo del grupo de renormalización (RG). Es sabido que, al renormalizar una teoría, se obtienen distintas constantes de acoplamiento g_i según la escala de energía μ en la que se esté trabajando. El flujo del RG [1] es un movimiento en el espacio de constantes de acoplamiento (renormalizadas), parametrizado por el factor de escala μ , y cuya trayectoria es definida por el campo vectorial de funciones beta $\beta_i(g)$, que aparecen como velocidades en el "tiempo" $t = -\log \mu$ (con μ adecuadamente adimensionalizado), el cual crece desde el ultravioleta (UV, corresp. a grandes energías, o distancias cortas) hacia el infrarrojo (IR, corresp.

a bajas energías, o grandes distancias); esto es, $\partial/\partial t = -\beta^i(g) \partial/\partial g_i$, con $\beta_i(g) = \mu \frac{\partial g_i}{\partial \mu} = -\frac{\partial g_i}{\partial t}$. Los puntos fijos del flujo corresponden a teorías de campos conformes (CFTs); el límite IR es por definición un punto fijo, puesto que allí la teoría tiende a desacoplarse. La evolución del flujo del RG funciona como un proceso de dispersión: el movimiento se realiza en una única dirección, y se pierde información de los modos no masivos a medida que uno se acerca al IR: al aproximarse la teoría a ese límite, el número de grados de libertad relevantes disminuye hasta finalmente anularse.

La búsqueda de cantidades físicas que den cuenta de la reducción de grados de libertad bajo el flujo del RG es un campo de investigación abierto y activo. En dos dimensiones, el Teorema c de Zamolodchikov [2] indica que, en toda teoría local y unitaria, esa cantidad es la función $c(g)$, la carga central del álgebra (de dimensión infinita en 2D); dicha función es siempre positiva y monótonamente decreciente hacia el IR. Siempre en dos dimensiones, muchas magnitudes físicas se han encontrado positivas, decrecientes y proporcionales a $c(g)$, y reciben el nombre de *funciones c*. Se puede mencionar entre ellas a la traza del tensor de energía-impulso (y de allí la conocida anomalía conforme), entre otros.

El Teorema c ha resultado ser de utilidad en el estudio de teorías de campos bidimensionales, ya sea con aplicaciones en mecánica estadística, o en CFTs. Es por eso que se ha buscado extender este resultado a dimensiones mayores, y se ha encontrado recientemente una prueba para dimensión 4 [3]. En ese caso, aparecen dos coeficientes en la anomalía conforme, y existe una función que se comporta adecuadamente bajo el flujo del RG y coincide con el coeficiente a de la anomalía. Se ha mostrado también que el otro coeficiente c no presenta el comportamiento deseado [4].

En dimensión impar, no es tan claro dónde buscar estas funciones C , pues no existe anomalía conforme. En general, se distinguen tres propiedades que debe cumplir una cantidad física para ser una buena función C , con creciente nivel de restricciones:

1. debe contar adecuadamente los grados de libertad no masivos, esto es, $C \geq 0$ para toda CFT renormalizable, con $C_{IR} < C_{UV}$;
2. una condición más fuerte es que sea una función monótonamente decreciente a lo largo del flujo del RG:

$$\dot{C}(g(t)) = -\beta^i(g) \frac{\partial}{\partial g_i} C(g) \leq 0,$$

con $\dot{C} = 0$ en los puntos donde la teoría es conforme;

3. por último, una posibilidad que incluye a las anteriores es que $C(g)$ sea tal que:

$$\dot{C}(g(t)) = -G_{ij} \beta^i(g) \beta^j(g),$$

con G_{ij} una matriz definida positiva.

En tres dimensiones, en [5] se ha propuesto como conjetura el Teorema F, que indica que la parte finita de la acción efectiva $F = -\log |Z_{S^3}|$ es una buena medida de los grados de libertad en una CFT euclídea, por ser $F_{IR} < F_{UV}$, y se mostró que, en el caso de campos libres, al evaluar F sobre S^3 usando regularización con función Zeta, es positiva y estable en el punto fijo UV. En [6], se llevó esta misma propuesta a espacios esféricos de dimensión impar arbitraria.

Siguiendo la línea de los últimos avances, en el presente trabajo se calcularán acciones efectivas, para distintas métricas conformemente relacionadas, analizando hasta qué grado coinciden en los puntos fijos, una vez renormalizadas. Se estudiará particularmente la teoría de campos escalares

libres con acoplamiento conforme, sobre variedades euclídeas máximamente simétricas (no triviales) de dimensión impar, que son: el espacio esférico S^n y el espacio hiperbólico H^n , ambos conformemente chatos. Se utilizará para el cálculo la regularización con función Zeta, comparando el comportamiento de las funciones espectrales en cada caso.

El trabajo está organizado como sigue: en el capítulo 2, se introducen la traza del núcleo de calor y la función Zeta, y cómo permiten regularizar la acción efectiva. Luego, en los capítulos 3 y 4 se calculan las acciones efectivas en S^3 y H^3 para campos escalares sin masa, poniendo énfasis en el método de cálculo y el comportamiento de las funciones espectrales en cada caso, para luego añadir masa a la teoría y comparar las acciones efectivas en los puntos conformes, en el capítulo 5. Se comenta allí también la cuestión del comportamiento IR de las acciones efectivas, y se analiza si cumplen las condiciones de una función C . Finalmente, en el capítulo 6 se extienden los resultados a dimensión impar arbitraria. El capítulo 7 contiene un resumen de las conclusiones alcanzadas, y la propuesta de una nueva candidata a función C , que reúne las dos primeras condiciones antes enunciadas, aunque no satisface la condición 3.

2 | Regularización con función Zeta

2.1 Generalidades y definiciones previas

[9] El método de regularización de integrales funcionales mediante núcleos de calor es útil para cálculos perturbativos a orden de un loop, en los que la acción efectiva S queda escrita, luego de una aproximación semiclásica, en un desarrollo en términos de las fluctuaciones cuánticas ϕ , de hasta segundo orden:

$$S = S_{clas} + \langle \phi, J \rangle + \langle \phi, D\phi \rangle,$$

donde S_{clas} es la acción correspondiente a la solución clásica, luego hay un término de interacción del campo con las fuentes externas J , y una contribución cuántica proveniente de la primera variación de la acción clásica, donde D es un operador diferencial.

En adelante trabajaremos con operadores autoadjuntos de segundo orden tipo laplaciano actuando sobre funciones escalares (0-formas), para los cuales la funcional generatriz dependerá del determinante de dicho operador. En particular, siendo que interesan cálculos a orden de un loop, es de interés conocer la acción efectiva

$$W = \frac{1}{2} \ln(\det D). \quad (2.1)$$

Calcular el determinante del operador conduce a sumas o integrales divergentes, por lo que es necesario recurrir a algún método de regularización adecuado. En este trabajo, se utilizarán las llamadas *funciones espectrales*, que se definen a partir de las trazas de funciones del operador D . Conocido el espectro del operador, el cálculo de las funciones espectrales puede hacerse directamente, y viceversa: dada alguna función espectral, puede extraerse información sobre el espectro del operador. Veremos en lo que sigue algunas funciones espectrales útiles, como son la traza del núcleo de calor y la función Zeta, y cómo pueden usarse en el marco de la Teoría Cuántica de Campos (QFT).

2.1.1 Campo escalar en espacio curvo euclídeo

Consideremos la acción clásica correspondiente a un campo escalar de masa m , sobre algún espacio-tiempo \mathcal{M} de dimensión n :

$$S = \int d^n x \sqrt{-g} [\nabla_\mu \varphi \nabla^\mu \varphi - \xi R \varphi^2 - m^2 \varphi^2].$$

Aquí la signatura del espacio-tiempo es $(+ - - - \dots)$, g es el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$, y R es el escalar de curvatura, esto es, $R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$. Es la extensión natural de la teoría en el espacio

chato de Minkowski, donde es $g = -1$, y la derivada covariante es la derivada usual $\nabla_\mu = \partial_\mu$. Se añadió al lagrangiano un término de acoplamiento directo con el escalar de curvatura, que en Minkowski se anula por ser $R = 0$, pero no así en espacio curvo.

El factor ξ es una constante adimensional, que en principio puede ser arbitraria. En la literatura es usual encontrar dos elecciones particulares para ξ [7]: el *acoplamiento mínimo* $\xi = 0$, que apaga la interacción con la curvatura, y el *acoplamiento conforme* $\xi = \frac{n-2}{4(n-1)}$, para el cual la teoría es invariante frente a transformaciones conformes (siempre que sea $m = 0$).

En la formulación de QFT con integral funcional, un elemento básico es la *funcional generatriz*, a partir de la cual se calculan todas las magnitudes físicas, y se define como:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \left(S + \int d^n x \sqrt{-g} J(x) \varphi(x) \right) \right\}.$$

Es posible pasar a trabajar en un espacio euclídeo, si se realiza una adecuada continuación analítica en las coordenadas. Por ejemplo [8], si es $\mathcal{M} = \mathbb{M}^n$ el espacio de Minkowski, haciendo la prolongación a tiempo imaginario $t \rightarrow \tau = it$, se obtiene:

$$\begin{aligned} iS &= i \int dt \int d^{n-1}x \sqrt{-g} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 - \partial_i\varphi\partial^i\varphi - \xi R\varphi^2 - m^2\varphi^2 \right] = \\ &= \int d(it) \int d^{n-1}x \sqrt{-g} \left[- \left(\frac{\partial\varphi}{\partial(it)} \right)^2 - \partial_i\varphi\partial^i\varphi - \xi R\varphi^2 - m^2\varphi^2 \right] = - \int d^n x \sqrt{g} \mathcal{L}_E, \end{aligned}$$

donde ahora se escribieron todas las cantidades en signatura euclídea positiva, y se definió la densidad lagrangiana euclídea

$$\mathcal{L}_E = \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + \xi R\varphi^2 + m^2\varphi^2.$$

La extensión a espacio curvo euclídeo es directa, reemplazando ∂_μ por la derivada covariante correspondiente, y entonces la funcional generatriz se escribe como:

$$\begin{aligned} Z[j] &= \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \left(S + \int d^n x \sqrt{g} j(x) \varphi(x) \right) \right\} = \\ &= \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int d^n x \sqrt{g} \left(\nabla_\mu\varphi\nabla^\mu\varphi + \xi R\varphi^2 + m^2\varphi^2 + j(x)\varphi \right) \right\}. \end{aligned}$$

Para hacer el desarrollo semiclásico respecto a fluctuaciones cuánticas, efectuamos el cambio de variables $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \phi(x)$, donde φ_0 es la solución a la ecuación clásica de movimiento (en esa configuración, se extremiza la acción clásica) y ϕ es la fluctuación cuántica respecto a esa solución.

Como la medida de integración de la integral funcional es invariante ante traslaciones, se tiene $\mathcal{D}\varphi = \mathcal{D}\phi$, y la funcional generatriz es:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \left(S[\varphi_0 + \phi] + \int d^n x \sqrt{g} j(x) (\varphi_0(x) + \phi(x)) \right) \right\}.$$

Desarrollando la acción hasta el orden cuadrático en ϕ y utilizando el hecho de que φ_0 es la solución clásica, se obtiene la siguiente expresión:

$$S[\varphi_0 + \phi] = S[\varphi_0] + \int d^n x \sqrt{g} \phi (-\nabla_\mu\nabla^\mu + \xi R + m^2) \phi.$$

De aquí podemos reconocer al operador diferencial D característico de esta teoría, a partir del cual calcularemos la acción efectiva, y es:

$$D = -\nabla_\mu \nabla^\mu + \xi R + m^2 \quad (2.2)$$

La derivación hecha hasta aquí es general para cualquier métrica euclídea de fondo, con acoplamiento arbitrario ξ . Si consideramos el caso del espacio esférico S^n con acoplamiento conforme, la densidad lagrangiana es:

$$\mathcal{L}_{S^n} = \nabla_\mu \varphi \nabla^\mu \varphi + \left(\frac{n(n-2)}{4a^2} + m^2 \right) \varphi^2 = \nabla_\mu \varphi \nabla^\mu \varphi + \frac{g_{S^n}}{a^2} \varphi^2,$$

donde a es el radio de curvatura de S^n , y se definió a la constante de acoplamiento adimensional $g_{S^n} = \frac{n(n-2)}{4} + a^2 m^2$. Esta se mueve con el flujo del RG de acuerdo a cómo varíe el término $a^2 m^2$: se llamará *límite UV* al correspondiente a $am = 0$, y *límite IR* al de $am \rightarrow \infty$. Cuando $am \ll 1$, se obtiene una teoría únicamente de modos no masivos. A medida que los términos de masa se hacen más importantes, se “activan” los modos masivos, y para $am \gg 1$, estos modos se desacoplan, hasta que ya no quedan grados de libertad relevantes en la teoría.

Lo mismo ocurre en el caso del espacio hiperbólico H^n ; allí, la constante de acoplamiento adecuada es $g_{H^n} = -\frac{n(n-2)}{4} + a^2 m^2$.

2.2 Núcleo de calor y función Zeta

El núcleo de calor $K(t; x, y; D)$ es una función que satisface la ecuación de calor homogénea, definida para el operador D de segundo orden, del tipo de Laplace, como

$$(\partial_t + D_x) K(t; x, y; D) = 0 \quad , \quad K(0; x, y; D) = \delta(x, y).$$

En ese caso, la solución se puede escribir $K(t; x, y; D) = \langle x | e^{-tD} | y \rangle$.

Si es $\{\Phi_\lambda\}$ un conjunto completo de autovectores del operador D , con autovalores $\{\lambda\}$, entonces el núcleo de calor toma la forma:

$$K(t; x, y; D) = \sum_\lambda \Phi_\lambda^*(x) \Phi_\lambda(y) e^{-t\lambda}.$$

A partir de dicha función, se define la traza del núcleo del calor:

$$K(t, D) = \int d^n x \sqrt{g} K(t; x, x; D) = \text{Tr} (e^{-tD}). \quad (2.3)$$

En general, si la variedad en la que se está trabajando tiene borde, el núcleo de calor deberá cumplir, además, condiciones de contorno adecuadas. En estos casos, existe una expansión asintótica para la traza, en el límite $t \rightarrow 0$, que es [11]:

$$K(t, D) \simeq \sum_{k \geq 0} t^{\frac{k-n}{2}} a_k(D) = t^{-n/2} \sum_{k \geq 0} t^{k/2} a_k(D),$$

donde n es la dimensión de la variedad, y $a_k(D)$ son los *coeficientes del núcleo de calor*. Dichos coeficientes, generalmente, pueden expresarse en términos del volumen y de invariantes locales. Muchas veces resulta más sencillo calcular los coeficientes y escribir la expansión asintótica de la

traza, que hallar los autovalores del operador para calcular la expresión exacta, como se hará en este trabajo.

En particular, los operadores diferenciales de segundo orden del tipo de Laplace pueden escribirse de la forma:

$$D = -g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - E, \quad (2.4)$$

con E un endomorfismo del fibrado vectorial sobre la variedad, en el que se define el operador. Si la variedad M , de dimensión n , es compacta y no tiene borde, los coeficientes del núcleo de calor con índice impar se anulan, y muchos de los demás han sido calculados en la literatura [11], a partir de invariantes locales. Los primeros dos se escriben como:

$$a_0(D) = (4\pi)^{-n/2} \int_M d^n x \sqrt{g}. \quad (2.5)$$

$$a_2(D) = (4\pi)^{-n/2} \int_M d^n x \sqrt{g} \left\{ E + \frac{R}{6} \right\}. \quad (2.6)$$

En muchas aplicaciones físicas, existe una cantidad \mathcal{M}^2 característica de la teoría tal que la traza del núcleo de calor, en su expansión asintótica, queda escrita como:

$$K(t, D) \simeq e^{-t\mathcal{M}^2} t^{-n/2} \sum_{k \geq 0} t^{k/2} \tilde{a}_k(D), \quad (2.7)$$

En estos casos, los coeficientes a calcular son los $\tilde{a}_k(D)$, que, si \mathcal{M} conmuta con D , son los coeficientes del núcleo de calor del operador $D - \mathcal{M}^2$. Veremos un ejemplo cuando abordemos el problema del campo escalar masivo.

Otra función espectral útil, estrechamente relacionada con el núcleo de calor, es la función Zeta del operador D , que se define:

$$\zeta(s, D) \equiv \text{Tr}(D^{-s}), \quad (2.8)$$

válida para operadores positivos; puede extenderse la definición para operadores con modos negativos, pero siempre habrá que descartar los autovalores cero.

La función Zeta está relacionada con la traza del núcleo de calor a través de una transformada de Mellin:

$$\zeta(s; D) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} K(t, D). \quad (2.9)$$

En el caso de trabajar sobre espacios compactos, existirá una base completa de autovectores de D , con un espectro discreto de autovalores $\{\lambda_i\}$, con degeneraciones d_i , tal que cumple, entre otras propiedades, que [12, 13]:

1. El espectro del operador es puramente puntual, no hay espectro residual ni continuo.
2. El espectro del operador es real, acotado por debajo, y positivo (a menos de un número finito de autovalores negativos).
3. Los autovalores forman una secuencia no decreciente $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \lambda_{i+1} \leq \dots$.

4. **Fórmula de Weyl:** cuando $i \rightarrow \infty$, los autovalores tienden a infinito de acuerdo a la siguiente expresión asintótica:

$$\lambda_i \sim \frac{(2\pi)^2}{\omega_n^{2/n}} \left(\frac{i}{\text{Vol}(M)} \right)^{\frac{2}{n}},$$

donde M es el espacio sobre el que se define el operador, n es su dimensión, y ω_n es el volumen de la bola unitaria en \mathbb{R}^n .

Entonces, la traza del núcleo de calor y la función Zeta podrán escribirse en términos de los autovalores como sigue:

$$K(t, D) = \sum_i d_i e^{-t\lambda_i} \quad (2.10)$$

$$\zeta(s, D) = \sum_i d_i \lambda_i^{-s} \quad (2.11)$$

En virtud de las propiedades enunciadas para los autovalores, la traza estará bien definida para $t > 0$, mientras que la función Zeta converge en la región $\text{Re } s > \frac{n}{2}$.

En espacio compacto, es fácil mostrar que se satisface la relación (2.9) entre la traza del núcleo de calor, y la función Zeta; integrando adecuadamente en (2.10), se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt t^{s-1} K(t, D) &= \int_0^\infty dt t^{s-1} \sum_i d_i e^{-t\lambda_i} = \sum_i d_i \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-t\lambda_i} = \\ &= \sum_i d_i \int_0^\infty dt \frac{t^{s-1}}{\lambda_i^s} e^{-t} = \sum_i d_i \lambda_i^{-s} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-t} = \\ &= \zeta(s, D) \Gamma(s) \quad , \quad \text{para } \text{Re } s > \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Por analogía con este resultado, cuando trabajemos con espacios no compactos se utilizará (2.9) como definición de la función Zeta. Veremos cómo hacerlo en el caso particular de espacios hiperbólicos.

2.3 Regularización de la acción efectiva mediante función Zeta

Definida la función Zeta del operador, es posible dar un sentido al determinante divergente, ya que, para una matriz cualquiera A , de $n \times n$, se tiene [12]:

$$\ln(\det(e^A)) = \text{Tr}(A).$$

Entonces, si es $B = e^A \Rightarrow B^{-s} = e^{-sA}$, y luego

$$\left. \frac{d(B^{-s})}{ds} \right|_{s=0} = (-A e^{-sA})|_{s=0} = -A, \text{ por lo tanto, debe ser}$$

$$\ln(\det(e^A)) = \text{Tr}(A) = -\text{Tr} \left[\left. \frac{d(B^{-s})}{ds} \right|_{s=0} \right] = - \left. \frac{d}{ds} (\text{Tr}(B^{-s})) \right|_{s=0}.$$

Entonces, por analogía con la ecuación (2.11), dada la función Zeta de un operador diferencial ordinario de tipo Laplace D , se define el *determinante funcional* del operador como [10] :

$$\det(D) \equiv \exp(-\zeta'(0; D))$$

Si la función $\zeta(s; D)$ es analítica en $s = 0$, evaluando su derivada en ese punto, ya puede asociarse ese resultado a la acción efectiva (2.1). Para eso, es necesario adimensionalizar el espectro del operador D , de modo que la acción mantenga las unidades adecuadas.

Si se trabaja sobre una variedad compacta, existirá un espectro discreto (no negativo, o a lo sumo con un número finito de autovalores negativos) $\{\lambda_i\}$ para D , y entonces la traza se calculará sumando sobre los autovalores:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \ln(\det(D)) = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} (\text{Tr}(D^{-s})) \Big|_{s=0} = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\sum_i \left(\frac{\lambda_i}{\mu} \right)^{-s} \right) \Big|_{s=0} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\sum_i (\lambda_i)^{-s} e^{s \ln \mu} \right) \Big|_{s=0}, \end{aligned}$$

donde se añadió un factor de regularización μ , con unidades de λ_i .

De esta manera, la acción efectiva en el caso de variedades compactas resulta:

$$W = -\frac{1}{2} \ln(\mu) \zeta(0, D) - \frac{1}{2} \zeta'(0, D) \quad (2.12)$$

Si la variedad no es compacta, al calcular la función Zeta aparecen divergencias debidas al volumen infinito del espacio, por lo que la formulación del problema involucra calcular una traza de núcleo de calor *por unidad de volumen*, y con ella obtener la función Zeta correspondiente; veremos esto en el caso particular de espacios hiperbólicos.

2.4 Análisis dimensional de las funciones espectrales

Se utilizarán en lo sucesivo unidades naturales, en las cuales $c = \hbar = 1$. Por lo tanto, en este sistema, serán

$$L \equiv [\text{longitud}] = [\text{tiempo}] = [\text{energía}]^{-1} = [\text{masa}]^{-1}.$$

El núcleo de calor $K(t; x, y; D)$ surge de una ecuación de difusión del tipo $(\partial_t + D_x) K = 0$, donde D es un operador de segundo orden, sobre una variedad Riemanniana, y t es un parámetro propio del problema (no corresponde con el tiempo usual). Como las derivadas segundas aplicadas sobre $K(t; x, y; D)$ tienen unidades de $[\text{longitud}]^{-2} = L^{-2}$, necesariamente debe ser $[t] = L^2$.

Si el espacio en cuestión es compacto, sabemos que la traza del núcleo de calor se obtiene de (2.10), sumando sobre factores del tipo $e^{-t\lambda_i}$. Como los autovalores tienen unidades $[\lambda_i] = L^{-2}$, el argumento $t\lambda_i$ de la exponencial está adecuadamente adimensionalizado, y la traza no tiene unidades. Luego, usando la definición formal de la traza, encontramos:

$$[K(t, D)] = 1, \text{ y } K(t, D) = \int d^n x \sqrt{g} K(t; x, x; D) \rightarrow [K(t; x, x; D)] = L^{-n},$$

donde n es la dimensión del espacio; el núcleo de calor tiene unidades de $[\text{volumen}]^{-1}$.

Con respecto a la función Zeta, trabajando en espacio compacto, ésta se calcula a partir de (2.11), sumando sobre factores $\lambda_i^{-s} = e^{-s \ln \lambda_i}$. Si es $s = 0$, la función resulta adimensional, pero en cualquier otro caso no tiene sentido asignarle unidades, pues cambiarían con el valor de s considerado. Formalmente, tanto s como λ_i no deberían tener unidades, para poder evaluar adecuadamente el logaritmo y la exponencial involucradas. Es por eso que se agrega un factor μ con unidades de λ_i , y en la definición de la Zeta se hace el cambio $\lambda_i \rightarrow \lambda_i/\mu$:

$$\zeta(s, D) = \sum_i d_i (\lambda_i)^{-s} \rightarrow \sum_i d_i \left(\frac{\lambda_i}{\mu} \right)^{-s} = \mu^s \zeta(s, D) \quad , \quad [\mu] = [\lambda_i] = L^{-2}.$$

De aquí en adelante, se calculará la función Zeta como fue definida en la ecuación (2.11), sin preocuparse por las unidades de los autovalores, pero teniendo en mente que en el resultado final habrá que incluir el factor μ^s . De hecho, en la expresión (2.12) para la acción efectiva regularizada, aparece explícitamente este factor multiplicando a la $\zeta(0, D)$; si el operador no presenta mayor comportamiento patológico (como podría ser la presencia de modos cero), y se está trabajando sobre variedades compactas de dimensión impar, ese término se anula y la acción efectiva queda bien definida, en cuanto a que no depende del parámetro μ , que no tiene sentido físico.

En el caso de trabajar en una variedad Riemmaniana no compacta, pueden aparecer divergencias proporcionales al volumen al calcular la traza, o la Zeta, por lo que hay que hacer un tratamiento más cuidadoso.

En particular, entre las variedades no compactas, consideremos el espacio hiperbólico H^n . En ese caso, el espectro del operador es bien conocido [14], y existe un continuo de autovalores $\{\lambda(k), k \geq 0\}$ que dan lugar a una base de autofunciones normalizables, en las cuales puede desarrollarse para calcular el núcleo de calor $K(t; x, y; D)$, que vimos que tiene unidades de $[\text{volumen}]^{-1}$. Además, por tratarse de un espacio homogéneo, al calcular los elementos diagonales del núcleo de calor, será $K(t; x, x; D) = K(t; 0, 0; D)$, y la traza diverge como el volumen de H^n . Por eso, en lugar de trabajar con la traza, se utiliza la siguiente función:

$$K(t; 0) = \langle 0 | e^{-tD} | 0 \rangle, \text{ y } [K(t; 0)] = L^{-n}.$$

En la literatura [14] se conoce a $K(t; 0)$ como “función de partición”. Dada una base de autofunciones adecuadamente normalizada, resulta:

$$K(t; 0) = \frac{c_n}{a^n \Omega_{n-1}} \int_0^\infty e^{-t \lambda(k)} \mu(k) dk \quad , \quad \frac{c_n}{\Omega_{n-1}} = \frac{2^{n-3} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{1+\frac{n}{2}}}, \quad (2.13)$$

donde c_n, Ω_{n-1} son factores constantes, que dependen de la dimensión del espacio, n ($\Omega_{n-1} \equiv \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$) es el volumen de la esfera unitaria de dimensión $n-1$, $\mu(k)$ es la llamada *medida de Plancherel* y hace las veces de las degeneraciones de los autovalores $\lambda(k)$ (es una densidad de estados); a tiene unidades de longitud, y es quien da las dimensiones correctas a la función de partición (a veces lo llamamos “radio” del espacio, por razones que quedarán más claras en el capítulo 4). Así escrita, la función $K(t; 0)$ tiene exactamente la misma forma que la del espacio chato \mathbb{R}^n (ver Apéndice A), donde $\lambda(k)$ y $\mu(k)$ serán los autovalores y densidad de estados correspondientes.

Luego, se define la función Zeta mediante $K(t; 0)$, a través de una transformada de Mellin (igual a como se hizo antes con la traza del núcleo de calor):

$$\zeta(s, D) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} K(t; 0) \quad (2.14)$$

y las dimensiones de esta función serán:

$$[\zeta(s, D)] = [dt] [t]^{-1} [t]^s [K(t, 0)] = L^{2s-n}.$$

Al igual que antes, la función Zeta estará adecuadamente adimensionalizada introduciendo un factor μ y haciendo el cambio $\zeta(s, D) \rightarrow \mu^s \zeta(s, D)$, pero ahora el resultado tendrá unidades de $[\text{volumen}]^{-1}$, la acción efectiva calculada con esta función Zeta así definida será por unidad de volumen.

3 | Campo escalar sin masa con acoplamiento conforme en espacio S^3

3.1 Generalidades de S^3

El espacio esférico S^3 constituye una variedad Riemmaniana, definida como una hipersuperficie inmersa en el espacio euclídeo \mathbb{R}^4 :

$$S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 / x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2, a > 0\} .$$

La métrica de la esfera viene inducida por la correspondiente métrica del espacio plano en que está inmersa. Parametrizando a la hipersuperficie como

$$w = a \cos \chi, \quad z = a \sin \chi \cos \theta, \quad y = a \sin \chi \sin \theta \sin \varphi, \quad x = a \sin \chi \sin \theta \cos \varphi,$$

donde $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$, $\chi \in [0, \pi]$, la métrica es diagonal y se escribe

$$(g_{\mu\nu}) = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \chi & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2 \chi \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad ds^2 = a^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)) . \quad (3.1)$$

Siendo que la esfera es un espacio máximamente simétrico, el tensor de Ricci resulta proporcional a la métrica, y es fácil calcular el escalar de curvatura:

$$R = \frac{2}{a^2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \frac{6}{a^2} . \quad (3.2)$$

La esfera S^3 es una variedad cerrada (compacta y sin borde), y además, como toda variedad con curvatura constante, es conforme al espacio chato. En efecto, consideremos el espacio chato \mathbb{R}^3 . En coordenadas cartesianas, la métrica allí es diagonal, y es igual a la identidad $\mathbf{1}_3$ de 3×3 , por lo que el elemento de línea se escribe:

$$ds^2|_{\mathbb{R}^3} = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

donde en la última igualdad se hizo el cambio a coordenadas esféricas (r, θ, φ) , mediante la transformación $z = r \cos \theta$, $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, con $r \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, \pi]$ y $\varphi \in [0, 2\pi]$.

En adelante se usará la notación convencional $d\Omega_2^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ para el elemento de línea sobre la esfera unitaria de dimensión 2 .

Entonces, proponiendo el cambio $r = a/\tan(\frac{\chi}{2})$, con $\chi \in (0, \pi)$ e identificando $r(\pi) = 0$ y $r \rightarrow +\infty$ cuando $\chi \rightarrow 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} ds^2|_{\mathbb{R}^3} &= \left(-\frac{a}{2\sin^2(\chi/2)}\right)^2 d\chi^2 + \left(\frac{a}{\tan(\chi/2)}\right)^2 d\Omega_2^2 = \\ &= \frac{a^2}{4\sin^4(\chi/2)} \left[d\chi^2 + 4\cos^2\left(\frac{\chi}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\chi}{2}\right) d\Omega_2^2 \right] = \\ &= \frac{a^2}{4\sin^4(\chi/2)} [d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega_2^2] = \\ &= \frac{1}{4\sin^4(\chi/2)} ds^2|_{S^3}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Por lo tanto, la métrica de la esfera S^3 está relacionada con la del espacio chato \mathbb{R}^3 mediante la función $\omega^2(x) = (4\sin^4(\chi/2))^{-1}$, que es siempre positiva, suave y no nula en todo su dominio $\chi \in (0, \pi]$, de modo que

$$g_{\mu\nu}|_{\mathbb{R}^3} = \omega^2(x) g_{\mu\nu}|_{S^3}.$$

Cabe destacar que el resultado anterior puede generalizarse trivialmente a esferas de dimensión arbitraria S^n , notando que, en coordenadas hiperesféricas, el elemento de línea del espacio chato \mathbb{R}^n tiene la forma

$$ds^2|_{\mathbb{R}^3} = dr^2 + r^2 d\Omega_{n-1}^2,$$

donde ahora $d\Omega_{n-1}^2$ es la métrica de la esfera unitaria de dimensión $n-1$. Basta con hacer el mismo cambio de antes, sobre la coordenada radial, para obtener el elemento de línea de la esfera S^n , multiplicado por la misma transformación conforme (de Weyl) $\omega^2(x)$.

3.2 Núcleo de calor para el laplaciano conforme en S^3

Sea el operador diferencial D el laplaciano conforme, definido sobre la esfera S^3 como:

$$D = \Delta + \frac{R}{8} \equiv -g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + \frac{R}{8}. \tag{3.4}$$

En el marco de la Teoría Cuántica de Campos (QFT), corresponde a un campo escalar sin masa ($m = 0$) y con acoplamiento conforme a la gravedad $\left(\xi = \frac{n-2}{4(n-1)} = \frac{1}{8}\right)$. El operador Δ se conoce como *laplaciano mínimo*.

Se sabe de la literatura (ver [15], o se puede consultar su demostración en el Apéndice B) que existe una base de autovectores $\{\phi_l\}$ para Δ , con autovalores $\lambda_l = \frac{R}{6} l(l+2)$ y degeneración $d_l = (l+1)^2$, donde $l \in \mathbb{N}$ (se incluye al cero). Respecto al laplaciano conforme D , este operador presenta exactamente el mismo conjunto de autofunciones $\{\phi_l\}$, pero con los autovalores trasladados de acuerdo al factor conforme:

$$D\phi_l = \left(\Delta + \frac{R}{8}\right) \phi_l = \left(\lambda_l + \frac{R}{8}\right) \phi_l \equiv \Lambda_l \phi_l,$$

donde escribimos los autovalores como:

$$\begin{aligned}\Lambda_l &= \frac{R}{6}l(l+2) + \frac{R}{8} = \frac{R}{6} \left[\frac{3}{4} + l(l+2) \right] = \frac{R}{6} \left[l^2 + 2l + \frac{3}{4} \right] = \\ &= \frac{R}{6} \left[(l+1)^2 - \frac{1}{4} \right] \quad , \quad l \in \mathbb{N}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Conocido el espectro del operador, la traza del núcleo de calor se calcula usando (2.10) :

$$K(t) = \sum_{l=0}^{\infty} d_l e^{-t\Lambda_l} = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)^2 e^{-t\frac{R}{6}[(l+1)^2 - \frac{1}{4}]}.\tag{3.6}$$

Para analizar el comportamiento de la suma, es conveniente reescribirla haciendo el cambio $l \rightarrow l+1$:

$$K(t) = \sum_{l=1}^{\infty} l^2 e^{-t\frac{R}{6}[l^2 - \frac{1}{4}]} = e^{t/4a^2} \sum_{l=0}^{\infty} l^2 e^{-\frac{t}{a^2}l^2},$$

donde, en la última igualdad, se añadió el término con $l=0$, que vale cero, y se escribió explícito el valor del escalar de curvatura R . Así escrita, la serie resulta convergente siempre que $t \neq 0$, pero para valores pequeños de t , no está claro el límite, debido al producto $t.l^2$, donde l toma siempre valores cada vez más grandes. Entonces, para analizar “tiempos” pequeños, buscaremos invertir el factor con t del exponente, usando la función Theta de Jacobi [16]:

$$\Theta(z, x) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} e^{2\pi i n z}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad x > 0.\tag{3.7}$$

Antes de eso, necesitamos escribir la suma en $K(t)$ tomando valores negativos de l , lo cual no es problema ya que solo aparecen potencias pares del mismo y, además, el término con $l=0$ se anula. Entonces, se obtiene:

$$K(t) = e^{t/4a^2} \sum_{l=0}^{\infty} l^2 e^{-\frac{t}{a^2}l^2} = \frac{1}{2} e^{t/4a^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} l^2 e^{-\frac{t}{a^2}l^2}.$$

El factor multiplicativo l^2 puede quitarse aprovechando que ese mismo factor aparece en el argumento de la exponencial. Puede definirse una función auxiliar

$$f(\alpha) \equiv \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \frac{t}{a^2}l^2} \Rightarrow \frac{d}{d\alpha} f(\alpha) = -\frac{t}{a^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} l^2 e^{-\alpha \frac{t}{a^2}l^2}.$$

Luego la traza del núcleo de calor, escrita en términos de esta función auxiliar, es:

$$K(t) = \frac{1}{2} e^{t/4a^2} \left(-\frac{a^2}{t} \right) \frac{d}{d\alpha} f(\alpha) \Big|_{\alpha=1}.\tag{3.8}$$

Ahora sí, trabajando con la función $f(\alpha)$, podemos usar la formula de inversión de la función Theta de Jacobi [16]:

$$\Theta(z, x) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\pi z^2/x} \Theta\left(\frac{z}{ix}, \frac{1}{x}\right).\tag{3.9}$$

En el caso que $z = 0$ y poniendo $x = \frac{\alpha t}{\pi a^2}$, obtenemos la función $f(\alpha)$, y resulta:

$$f(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\alpha t}{\pi a^2}} = \Theta\left(0, \frac{\alpha t}{\pi a^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi a^2}{\alpha t}} \Theta\left(0, \frac{\pi a^2}{\alpha t}\right) = \sqrt{\frac{\pi a^2}{\alpha t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{\alpha t}}.$$

Llevando esto a la ecuación (3.8), se obtiene:

$$\begin{aligned} K(t) &= \left(-\frac{a^2}{2}\right) \frac{e^{t/4a^2}}{t} \frac{\sqrt{\pi a^2}}{\sqrt{t}} \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{\alpha t}} \right] \Big|_{\alpha=1} = \\ &= \left(-\frac{a^3 \sqrt{\pi}}{2}\right) \frac{e^{t/4a^2}}{t^{3/2}} \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{\alpha t}} - 1 \right) \right] \Big|_{\alpha=1}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

“Tiempos” pequeños

Para $t \rightarrow 0^+$, la suma entre corchetes en (3.10) se reduce a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{\alpha t}} = 1 + \sum_{n>0} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{\alpha t}} \simeq 1 \text{ cuando } t \ll 1. \quad (3.11)$$

Entonces, la traza a tiempos pequeños se escribe:

$$K(t) \simeq \left(-\frac{a^3 \sqrt{\pi}}{2}\right) \frac{e^{t/4a^2}}{t^{3/2}} \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right] \Big|_{\alpha=1} = -\frac{a^3 \sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{t/4a^2}}{t^{3/2}} \left(-\frac{1}{2\alpha^{3/2}}\right) \Big|_{\alpha=1}.$$

Por lo tanto

$$K(t) \simeq (4\pi t)^{-3/2} e^{t/4a^2} (2\pi^2 a^3) \quad , \quad t \ll 1. \quad (3.12)$$

Esta expresión corresponde entonces a un núcleo de calor “local”, luego de transcurrido un tiempo de difusión pequeño.

Comparando con la expansión asintótica (2.7) esperada para la traza, tenemos el factor $t^{-3/2}$ adecuado para dimensión 3, el factor exponencial con $\mathcal{M}^2 = -\frac{1}{4a^2}$, y como no hay otras potencias de t presentes, concluimos que todos los coeficientes del núcleo de calor se anulan, excepto $\tilde{a}_0(D) = (4\pi)^{-3/2} \text{Vol}(S^3)$, donde reconocemos a $\text{Vol}(S^3) = 2\pi^2 a^3$ como el volumen del espacio esférico. Este resultado es consistente con los encontrados en la literatura [11].

La solución completa para tiempos arbitrarios implica tener en consideración todos los términos de la sumatoria, lo cual puede interpretarse como debido a efectos de la topología de la variedad sobre la cual se realiza la difusión: siendo la esfera S^3 un espacio compacto, una partícula que evoluciona de acuerdo a una ecuación de difusión puede dar un número cualquiera de vueltas alrededor de la misma, antes de volver al punto inicial. Al aumentar el tiempo de difusión, aumenta también la cantidad de vueltas a la esfera, y las contribuciones “topológicas” son cada vez más importantes. Este mismo resultado fue obtenido en trabajos anteriores [15].

Solución completa - “Tiempos” grandes

Podemos desarrollar un poco más la expresión (3.10), a tiempo arbitrario $t > 0$, si efectuamos la derivada término a término sobre la sumatoria:

$$\frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{\alpha t}} - 1 \right) \right] = \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{\alpha t}} + 1 \right) \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2\alpha^{3/2}} + \left(-\frac{1}{\alpha^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{\alpha t}} \right) + \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \frac{d}{d\alpha} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{\alpha t}} \right) = \\
 &= -\frac{1}{\alpha^{3/2}} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{\alpha t}} \right) + \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2 a^2}{\alpha^2 t} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{\alpha t}} \equiv F(\alpha) .
 \end{aligned}$$

Para llevar este resultado al cálculo de la traza, habrá que calcular $F(1)$:

$$\begin{aligned}
 F(1) &= -\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{t}} \right) + 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2 a^2}{t} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{t}} \right) = \\
 &= -\frac{1}{2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{t}} \right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2 a^2}{t} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{t}} = \\
 &= -\frac{1}{2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{t}} - 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2 a^2}{t} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{t}} \right] = \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{2\pi^2 a^2 n^2}{t} \right) e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{t}} .
 \end{aligned}$$

Finalmente, llegamos a la siguiente expresión para la traza del núcleo de calor:

$$K(t) = \left(-\frac{a^3 \sqrt{\pi}}{2} \right) \frac{e^{t/4a^2}}{t^{3/2}} F(1) = (2\pi^2 a^3) (4\pi t)^{-3/2} e^{t/4a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{2\pi^2 a^2 n^2}{t} \right) e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{t}} . \quad (3.13)$$

Este último resultado incluye los efectos locales, siendo que a tiempos pequeños reproduce el comportamiento visto antes, y además contiene las contribuciones “topológicas” en la sumatoria.

Sin embargo, así escrita no permite analizar lo que ocurre a tiempos grandes, debido a que en la suma los factores dominantes son del tipo $\frac{n^2}{t} e^{-n^2/t}$. Para estudiar ese límite, alcanza con recurrir a la suma con la que originalmente definimos la traza del núcleo de calor, en la ecuación (3.6):

$$K(t) = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)^2 e^{-t \frac{R}{6} [(l+1)^2 - \frac{1}{4}]} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\frac{t}{a^2} (n^2 - \frac{1}{4})} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty .$$

Puede notarse que el resultado anterior es general para la traza del núcleo de calor de cualquier operador D con autovalores estrictamente positivos, ya que el cálculo involucra sumar funciones del tipo $e^{-t \cdot \Lambda_l}$. A diferencia de lo que ocurre para el laplaciano mínimo, donde el primer autovalor es nulo y la traza del núcleo de calor tiende a 1 en el límite de tiempos grandes, al añadir el factor conforme se eliminan los modos cero del operador, se tiene $\Lambda_l > 0$ para todo l , y todos los términos de la suma decaen exponencialmente; la traza se anula para tiempos grandes.

3.3 Función Zeta y acción efectiva en S^3

Pasamos a calcular la función Zeta correspondiente al laplaciano conforme, (2.11):

$$\zeta(s) = \sum_i d_i (\Lambda_i)^{-s} = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)^2 \left[\frac{R}{6} \left((l+1)^2 - \frac{1}{4} \right) \right]^{-s} = a^{2s} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)^2}{\left[(l+1)^2 - \frac{1}{4} \right]^s} ,$$

donde se puso explícito el escalar de curvatura, usando (3.2).

Interesa utilizar esta función para regularizar la acción efectiva, por lo que habrá que analizar su comportamiento, y el de su derivada, en $s = 0$. Así escrita, la función sólo existe para valores suficientemente grandes de $\text{Re } s$, donde la suma converge, así que habrá que prolongarla analíticamente a fin de poder evaluarla en valores cercanos a cero. Para eso, trabajamos un poco más con la suma; sumando y restando $1/4$ en el numerador y cambiando el índice de la suma a $n = l + 1$, se tiene:

$$\zeta(s) = a^{2s} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 - \frac{1}{4} \right)^{-s+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left(n^2 - \frac{1}{4} \right)^{-s} \right\} = a^{2s} \left\{ G(s) + \frac{1}{4} G(s+1) \right\} \quad (3.14)$$

$$\text{siendo } G(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 - \frac{1}{4} \right)^{-s+1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s+2} \left(1 - \frac{1}{(2n)^2} \right)^{-s+1}.$$

Los factores entre paréntesis de la suma para $G(s)$ pueden desarrollarse haciendo uso de la generalización del desarrollo de binomio [17]:

$$(1-x)^{-s} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+s-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+k)}{k! \Gamma(s)} x^k, \quad |x| < 1, \quad s \in \mathbb{C}. \quad (3.15)$$

Poniendo $x = 1/4n^2$, el desarrollo es válido para todo $n = 1, 2, \dots$ y la función $G(s)$ se escribe como:

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s+2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+k-1)}{k! \Gamma(s-1)} (2n)^{-2k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+k-1)}{k! \Gamma(s-1)} 2^{-2k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s-2k+2} \right),$$

donde en la última igualdad se intercambi6 el orden de las sumas, aislando los factores que solo dependen de n . Luego, podemos reconocer en la suma encerrada entre paréntesis a la Zeta de Riemann [17]:

$$\zeta_R(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad \text{Re } s > 1, \quad (3.16)$$

que puede extenderse analíticamente a todo el plano complejo, resultando en una función meromorfa, con polo simple en $s = 1$. Llevado al cálculo de $G(s)$, es:

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+k-1)}{k! \Gamma(s-1)} 2^{-2k} \zeta_R(2s+2k-2).$$

En el límite $s \rightarrow 0$, los factores correspondientes a las zetas $\zeta_R(2k-2)$ están bien definidos para todo $k \in \mathbb{N}$, pero no así los factores de las funciones Gamma $\Gamma(k-1)$, que divergen para $k = 0, 1$, y al estar divididos por un factor $\Gamma(-1)$, el límite resulta indeterminado. Sin embargo, trabajando a s suficientemente grande, es posible invertir estos factores, usando la igualdad [17]:

$$\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-k+1)} = (-1)^k \frac{\Gamma(-\lambda+k)}{\Gamma(-\lambda)}, \quad (3.17)$$

válida para $\lambda \notin \mathbb{Z}$. Si ponemos $\lambda = s+k-2$, se obtiene:

$$\frac{\Gamma(s+k-1)}{\Gamma(s-1)} = (-1)^k \frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(2-s-k)}.$$

Podemos usar la igualdad anterior para analizar la función $G(s)$:

$$\begin{cases} G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} \frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(2-s-k)} \zeta_R(2s+2k-2) \\ G(s+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-k)} \zeta_R(2s+2k) \end{cases}$$

En el límite $s \rightarrow 0$, las dos sumas de arriba se cortan a partir de algún valor de k , para los cuales los factores del tipo $1/\Gamma(\alpha-k)$ se anulan, y, entonces, llevado a la ecuación (3.14), es fácil calcular la función Zeta del operador, en ese valor de s :

$$\zeta(s \rightarrow 0) = G(0) + \frac{1}{4}G(1) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2)} \zeta_R(-2) - \frac{1}{4} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)} \zeta_R(0) + \frac{1}{4} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1)} \zeta_R(0) = 0,$$

puesto que $\zeta_R(-2n) = 0$ para $n \in \mathbb{N}$; dicho resultado es consistente con el resultado general para variedades compactas de dimensión impar. Esto garantiza que, al utilizar la función Zeta para calcular la acción efectiva, desaparezca la dependencia en el factor μ que añadimos para mantener las dimensiones correctas (ver ecuación 2.12).

Con esto en mente, seguimos trabajando con (3.14):

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= a^{2s} \left\{ G(s) + \frac{1}{4}G(s+1) \right\} = a^{2s} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} \frac{\Gamma(2-s)}{k! \Gamma(2-s-k)} \zeta_R(2s+2k-2) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-k)} \zeta_R(2s+2k) \right\} = \\ &= a^{2s} \zeta_R(2s-2) + a^{2s} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ -\frac{(-1)^k}{4^{k+1}} \frac{\Gamma(2-s)}{(k+1)! \Gamma(1-s-k)} + \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} \frac{\Gamma(1-s)}{k! \Gamma(1-s-k)} \right\} \zeta_R(2s+2k) \end{aligned}$$

donde se extrajo el término con $k=0$ de la primera suma y se agruparon los demás dentro de una única sumatoria. Luego, sabiendo que $\Gamma(2-s) = (1-s)\Gamma(1-s)$, es:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= a^{2s} \zeta_R(2s-2) + a^{2s} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} - \frac{(1-s)}{(k+1)!} \right] \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-k)} \zeta_R(2s+2k) = \\ &= a^{2s} \zeta_R(2s-2) + a^{2s} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{k+1-(1-s)}{(k+1)!} \right] \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-k)} \zeta_R(2s+2k) = \\ &= a^{2s} \zeta_R(2s-2) + a^{2s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-k)} \zeta_R(2s+2k) + \\ &\quad + a^{2s} s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1} (k+1)!} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-k)} \zeta_R(2s+2k). \end{aligned}$$

Ahora, en la primera suma, podemos volver a usar (3.17), esta vez con $\lambda = s+k-1$, y entonces $(-1)^k \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-k)} = \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)} = s \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s+1)}$. Además, en esa misma suma el término con $k=0$ se anula, entonces:

$$\zeta(s) = a^{2s} \zeta_R(2s-2) +$$

$$\begin{aligned}
 +s \left\{ a^{2s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^{k+1} (k+1)!} \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s+1)} \zeta_R(2s+2k) + a^{2s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1} (k+1)!} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-k)} \zeta_R(2s+2k) \right\} = \\
 = a^{2s} \zeta_R(2s-2) + s A(s). \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

siendo $A(s)$ la función entre corchetes. Dicha función es finita y bien comportada en el límite $s \rightarrow 0$. Además, así escrita la función Zeta, es claro que se anula en $s = 0$, tal como habíamos obtenido anteriormente.

Con la función Zeta calculada explícitamente, podemos calcular su derivada y usarla para regularizar la acción efectiva, según la ecuación (2.12):

$$W = -\frac{1}{2} \zeta'(0) - \frac{1}{2} \ln(\mu) \zeta(0) = -\frac{1}{2} \left. \frac{d}{ds} \zeta(s) \right|_{s=0},$$

donde ya se usó que $\zeta(0) = 0$. Como esperábamos, el factor μ añadido para mantener las dimensiones adecuadas, desaparece en el límite $s \rightarrow 0$.

Derivando la expresión en (3.18), resulta:

$$\zeta'(s) = (a^{2s})' \zeta_R(2s-2) + a^{2s} 2 \zeta_R'(2s-2) + A(s) + s A'(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} 2 \zeta_R'(-2) + A(0). \tag{3.19}$$

Para la derivada de la zeta de Riemann, se sabe de la literatura [17] que:

$$\zeta_R'(-2n) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2 (2\pi)^{2n}} \zeta_R(2n+1), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.20}$$

Evaluando en $n = 1$ se obtiene:

$$\zeta_R'(-2) = -\frac{1}{4\pi^2} \zeta_R(3).$$

Para calcular $A(0)$, habrá que volver a su definición:

$$\begin{aligned}
 A(0) &= a^{2s} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^{k+1} (k+1)!} \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s+1)} \zeta_R(2s+2k) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1} (k+1)!} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-k)} \zeta_R(2s+2k) \right] \Bigg|_{s=0} = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \Gamma(k)}{4^{k+1} (k+1)!} \zeta_R(2k) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1} (k+1)! \Gamma(1-k)} \zeta_R(2k).
 \end{aligned}$$

En la segunda suma, todos los términos para $k \geq 1$ se anulan, y en la primera podemos usar que $k \Gamma(k) = \Gamma(k+1) = k!$, y se obtiene:

$$A(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{4^{k+1} (k+1)!} \zeta_R(2k) + \frac{1}{4} \zeta_R(0) = -\frac{1}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{k+1} (k+1)} \zeta_R(2k).$$

La sumatoria sobre las funciones zeta converge a un valor finito, a partir de la relación [17]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_R(2k)}{(k+n) 2^{2k}} = \frac{1}{2n} - \ln 2 + (-1)^n (2n)! \frac{(1-2^{2n+1})}{(2\pi)^{2n}} \zeta_R(2n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} [\dots], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Evaluando en $n = 1$, tenemos la solución para la suma en cuestión:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_R(2k)}{(k+1)2^{2k}} = \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{7}{2\pi^2} \zeta_R(3). \quad (3.21)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \zeta'_R(-2) = -\frac{1}{4\pi^2} \zeta_R(3) \\ A(0) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{7}{2\pi^2} \zeta_R(3) \right) = -\frac{\ln 2}{4} + \frac{7}{8\pi^2} \zeta_R(3). \end{cases}$$

Llevando todo esto a la expresión obtenida en (3.19), resulta que la acción efectiva para un campo escalar sin masa y con acoplamiento conforme, sobre la esfera S^3 , es:

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2} \zeta'(0) = -\zeta'_R(-2) - \frac{A(0)}{2} = \frac{1}{4\pi^2} \zeta_R(3) + \frac{\ln 2}{8} - \frac{7}{16\pi^2} \zeta_R(3) \\ &= \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{3}{16\pi^2} \zeta_R(3). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Este resultado coincide con los encontrados en la literatura, por ejemplo, en [5].

4 | Campo escalar sin masa con acoplamiento conforme en espacio H^3

4.1 Generalidades de H^3

El espacio hiperbólico H^3 se construye por inmersión en el espacio de Minkowski \mathbb{M}^4 , con signatura $(+ - - -)$, de la hipersuperficie definida como:

$$H^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = a^2, a > 0\}.$$

Haciendo el cambio a las coordenadas (y, θ, φ) de la forma

$$x_1 = a \cosh y, \quad x_2 = a \sinh y \cos \theta, \quad x_3 = a \sinh y \sin \theta \cos \varphi, \quad x_4 = a \sinh y \sin \theta \sin \varphi$$

donde $y \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, la métrica se escribe:

$$(g_{\mu\nu}) = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh^2 y & 0 \\ 0 & 0 & \sinh^2 y \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad ds^2|_{H^3} = a^2 [dy^2 + \sinh^2 y (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (4.1)$$

Poniendo $\chi = iy$, se puede ver que el elemento de línea de H^3 es el mismo que se obtiene para la esfera S^3 , a menos de un signo:

$$\begin{aligned} ds^2|_{H^3} &= a^2 \left[\left(\frac{1}{i}\right)^2 d\chi^2 + \sinh^2 \left(\frac{1}{i}\chi\right) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] = \\ &= -a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] = -ds^2|_{S^3}. \end{aligned}$$

Puede ser instructivo realizar esta derivación de otra manera, escribiendo $y = \sigma/a$, donde el nuevo parámetro σ lleva unidades de longitud; estas coordenadas son llamadas coordenadas geodésicas polares, y σ es la distancia al origen, medida sobre la curva geodésica [14]. En esas coordenadas, el elemento de línea resulta:

$$ds^2|_{H^3} = d\sigma^2 + a^2 \sinh^2 \left(\frac{\sigma}{a}\right) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Haciendo el cambio $a \rightarrow ia$, se obtiene

$$ds^2|_{H^3} = d\sigma^2 - a^2 \sinh^2 \left(\frac{\sigma}{ia}\right) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = d\sigma^2 + a^2 \sin^2 \left(\frac{\sigma}{a}\right) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

y volviendo a variables adimensionales, con $\chi = \sigma/a$, la expresión final es:

$$ds^2|_{H^3} = a^2 d\chi^2 + a^2 \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = ds^2|_{S^3} .$$

Entonces, a través de una “complexificación del radio”, obtenemos la métrica de la esfera sobre el espacio hiperbólico, y viceversa; el espacio hiperbólico constituye una “esfera de radio imaginario puro”. Para pasar de la métrica de H^3 a la de S^3 , habrá que cambiar el radio como $a \rightarrow ia$, y transformar las coordenadas de acuerdo a eso.

Calculando el escalar de curvatura para H^3 , resulta que es el mismo que para la esfera, en la ecuación (3.2), nuevamente a menos de un signo:

$$R_{H^3} = -\frac{6}{a^2} = -R_{S^3} .$$

Otra vez, podemos notar que recuperamos el escalar de curvatura de la esfera haciendo el cambio $a \rightarrow ia$.

Al igual que la esfera, el espacio hiperbólico es máximamente simétrico, y conforme al espacio chato: recordemos que, de acuerdo a la ecuación (3.3), el espacio S^3 es conforme a \mathbb{R}^3 , de la forma

$$g_{\mu\nu}|_{\mathbb{R}^3} = \omega^2(x) g_{\mu\nu}|_{S^3} \quad \omega^2(x) = \frac{1}{4 \sin^4(x/2)} ,$$

donde se usaron las coordenadas hiperesféricas $x = (\chi, \theta, \varphi)$.

Si, como antes, pasamos a las coordenadas $\tilde{x} = (\sigma, \theta, \varphi)$ mediante la transformación $\chi = \frac{\sigma}{a}$, y pasamos a “radio complejo” mediante $a \rightarrow ia$, se obtiene que:

$$g_{\mu\nu}|_{\mathbb{R}^3} = \omega^2(\tilde{x}) (g_{\mu\nu}|_{H^3}) \quad \omega^2(\tilde{x}) = \frac{1}{4 \sin^4\left(\frac{\sigma}{2ia}\right)} . \quad (4.2)$$

Escribiendo $y = \frac{\sigma}{a}$ obtenemos la transformación conforme entre H^3 y \mathbb{R}^3 :

$$\omega^2(\tilde{x}) = \frac{1}{4 \sinh^4\left(\frac{y}{2}\right)} .$$

A diferencia de la esfera S^3 , el espacio H^3 es no compacto, y entonces no puede definirse un volumen finito para la totalidad del mismo. Este contraste entre las topologías de los dos espacios será crucial en el cálculo del núcleo de calor, como veremos más adelante.

4.2 Núcleo de calor para el laplaciano conforme en H^3

Pasemos ahora a estudiar el caso de un campo escalar sin masa y con acoplamiento conforme (ver ecuación (3.4)), sobre el espacio hiperbólico H^3 . El problema de autovalores en cuestión es:

$$D\phi_{\vec{k};lm} = \left(\Delta + \frac{R_{H^3}}{8} \right) \phi_{\vec{k};lm} = A_{\vec{k}} \phi_{\vec{k};lm} .$$

Se puede mostrar, de acuerdo a [18] y como está calculado en el Apéndice B, que a partir de los resultados conocidos para el laplaciano en S^3 y haciendo la rotación $\chi = iy$, la ecuación de autovalores del laplaciano mínimo en H^3 es

$$\Delta \phi_{\tilde{k};lm} = \lambda_{\tilde{k}} \phi_{\tilde{k};lm}, \quad \lambda_{\tilde{k}} = \frac{(\tilde{k}^2 + 1)}{a^2},$$

donde \tilde{k} sólo dará lugar a autofunciones normalizables si es $\tilde{k} \geq 0$; el espectro de autovalores está acotado por debajo, y barre sobre $\lambda_{\tilde{k}} \geq 1/a^2$. En ese caso, la función espectral (o densidad de estados) es:

$$\mu(\tilde{k}) = \left| \frac{\Gamma(i\tilde{k} + 1)}{\Gamma(i\tilde{k})} \right|^2 = |i\tilde{k}|^2 = \tilde{k}^2.$$

Luego, conocidos los autovalores para el laplaciano mínimo, es fácil calcularlos para el caso conforme:

$$\Lambda_{\tilde{k}} = \frac{(\tilde{k}^2 + 1)}{a^2} + \frac{R_{H^3}}{8} = \frac{1}{a^2} (\tilde{k}^2 + 1) - \frac{3}{4a^2} = \frac{1}{a^2} \left[(\tilde{k}^2 + 1) - \frac{3}{4} \right] = \frac{1}{a^2} \left(\tilde{k}^2 + \frac{1}{4} \right) \quad \tilde{k} \geq 0. \quad (4.3)$$

Respecto a lo que ocurría en la esfera, los autovalores son similares en su forma, pero en este caso el espectro es continuo y acotado por debajo en el valor $\Lambda_0 = 1/4a^2$, mientras que en S^3 el espectro es discreto y el menor de los autovalores es $\Lambda_0 = 3/4a^2$.

Las autofunciones de D son las mismas que para el laplaciano mínimo Δ , y la densidad de estados también. Entonces, siendo el espacio hiperbólico no compacto, no calculamos la traza del núcleo de calor sino la “función de partición” (2.13):

$$K(t; 0) = \frac{c_3}{a^3 \Omega_2} \int_0^\infty e^{-t \cdot \Lambda(\tilde{k})} \mu(\tilde{k}) d\tilde{k} = \frac{1}{2\pi^2 a^3} \int_0^\infty \tilde{k}^2 e^{-t \frac{(\tilde{k}^2 + \frac{1}{4})}{a^2}} d\tilde{k} = \frac{e^{-\frac{t}{4a^2}}}{2\pi^2 a^3} \int_0^\infty \tilde{k}^2 e^{-t \frac{\tilde{k}^2}{a^2}} d\tilde{k},$$

donde se pusieron explícitos los valores $c_3 = \frac{2}{\pi}$, $\Omega_2 = 4\pi$ correspondientes a la dimensión del espacio $n = 3$.

En adelante, cuando se hable de la traza del núcleo de calor para un espacio hiperbólico, se estará haciendo referencia a esta función particular. El resultado es:

$$\begin{aligned} K(t; 0) &= \frac{e^{-\frac{t}{4a^2}}}{2\pi^2 a^3} \int_0^\infty \tilde{k}^2 e^{-t \frac{\tilde{k}^2}{a^2}} d\tilde{k} = \frac{e^{-\frac{t}{4a^2}}}{2\pi^2 a^3} \int_0^\infty \left(\frac{a^3}{t^{3/2}} \right) \tilde{k}^2 e^{-\tilde{k}^2} d\tilde{k} = \\ &= \frac{e^{-\frac{t}{4a^2}}}{2\pi^2 a^3} \left(\frac{a^3}{t^{3/2}} \right) \left(\frac{\sqrt{\pi}}{4} \right) \\ &= (4\pi t)^{-3/2} e^{-\frac{t}{4a^2}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Esta solución es exacta, válida para todo $t > 0$. A tiempos pequeños, presenta la misma forma funcional que la traza del núcleo de calor local en S^3 , calculada en (3.12), ya que ambas son de la forma $(4\pi t)^{-3/2} e^{\frac{R}{24} \cdot t}$, siendo la curvatura positiva en la esfera, y negativa en el hiperbólico. Así, se puede obtener el resultado de la esfera haciendo $a \rightarrow ia$ en el hiperbólico (y viceversa). Sin embargo, a tiempos grandes, las contribuciones “topológicas” que aparecían en S^3 no influyen en H^3 , debido al carácter no compacto del mismo. Operativamente, no alcanza con “invertir” el signo de la curvatura en la esfera mediante el cambio $a \rightarrow ia$ para obtener el resultado correspondiente

en el espacio hiperbólico, la traza del núcleo de calor es sensible a las propiedades topológicas del espacio.

Notemos que, si quisieramos comparar la expresión para la traza obtenida en (4.4), con la expansión asintótica (2.7), el análisis sería muy similar al caso de S^3 , pero con $\mathcal{M}^2 = \frac{1}{4a^2}$ y coeficiente $\tilde{a}_0(D) = (4\pi)^{-3/2}$. Sin embargo, de acuerdo a lo referido en [11], dicho coeficiente debería ser proporcional al volumen del espacio, según la ecuación:

$$\tilde{a}_0(D) = (4\pi)^{-3/2} \int_{H^3} d^3x \sqrt{g}.$$

La integral en $\tilde{a}_0(D)$ da el volumen del espacio hiperbólico, que es divergente. Pero recordemos que la traza calculada aquí fue definida por unidad de volumen, según (2.13), justamente porque el volumen del espacio aparecía factorizado, y siendo H^3 no compacto, no iba a ser posible obtener un resultado finito. Formalmente, la traza del núcleo de calor para el espacio hiperbólico se escribe como $K(t) = \text{Vol}(H^3) K(t; 0)$, y esto sí es consistente con [11].

4.3 Función Zeta y acción efectiva en H^3

Se calcula la función Zeta a partir de la definición dada en (2.14), usando (4.4):

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} K(t; 0) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} (4\pi t)^{-3/2} e^{-\frac{t}{4a^2}} = \\ &= \frac{(4\pi)^{-3/2}}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t}{4a^2}} = \frac{(4\pi)^{-3/2}}{\Gamma(s)} \int_0^\infty du (4a^2) (4a^2)^{s-1-\frac{3}{2}} u^{s-\frac{3}{2}-1} e^{-u} = \\ &= \frac{(4\pi)^{-3/2} (4a^2)^{s-\frac{3}{2}}}{\Gamma(s)} \int_0^\infty du u^{(s-\frac{3}{2})-1} e^{-u} = (4\pi)^{-3/2} (4a^2)^{s-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(s-\frac{3}{2})}{\Gamma(s)}, \end{aligned}$$

donde en la segunda línea se hizo un cambio de variable a $u = t/4a^2$ y luego se usó la definición de la función Gamma (a través de la integral impropia). Se obtiene así una expresión exacta para la función Zeta, que es bien comportada excepto para $s = 3/2 - n$, $n \in \mathbb{N}$, en donde presenta polos simples. En particular, es analítica en $s = 0$, así que ya podemos usarla para calcular la acción efectiva.

Será útil usar que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ para reescribir la función Zeta como:

$$\zeta(s) = s(4\pi)^{-3/2} (4a^2)^{s-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(s-\frac{3}{2})}{\Gamma(s+1)}. \quad (4.5)$$

Entonces, queda claro que $\zeta(0) = 0$, tal como ocurría con el laplaciano conforme en S^3 , y nuevamente el factor de regularización μ es removido en el límite $s \rightarrow 0$.

La acción efectiva (por unidad de volumen) será:

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2} \left. \frac{d}{ds} \zeta(s) \right|_{s=0} = -\frac{(4\pi)^{-3/2}}{2} \left. \frac{d}{ds} \left[s (4a^2)^{s-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(s-\frac{3}{2})}{\Gamma(s+1)} \right] \right|_{s=0} = -\frac{\pi^{-3/2}}{16} (4a^2)^{-3/2} \frac{\Gamma(-\frac{3}{2})}{\Gamma(1)} = \\ &= -\frac{\pi^{-3/2}}{128} a^{-3} \left(\frac{4}{3} \sqrt{\pi} \right) = -\frac{4}{3 \times 128 \pi a^3} = \\ &= -\frac{\pi}{48 \times (2\pi^2 a^3)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Llegado a este punto, se puede notar que el resultado obtenido difiere significativamente de aquel calculado en (3.22) para la acción efectiva en S^3 . Si bien es fácil reconocer el factor $2\pi^2 a^3$ como el volumen del espacio esférico, y podríamos intentar relacionar la acción efectiva (4.6) con la de la esfera haciendo $a \rightarrow ia$, no se evidencia ninguna similitud. Veremos en lo que sigue que, bajo ciertas condiciones, esto sí ocurre si se introduce masa no nula a la teoría, a pesar de perder la invariancia conforme.

5 | Acciones efectivas para el campo escalar masivo con acoplamiento conforme en S^3 y H^3

5.1 Espacio S^3

Si agregamos masa no nula al problema del campo escalar, el operador diferencial a considerar será:

$$D = \Delta + \frac{R}{8} + m^2. \quad (5.1)$$

Nuevamente, la base de autofunciones será la misma que para el laplaciano mínimo, pero ahora con los autovalores trasladados como:

$$\Lambda_l = \lambda_l + \frac{R}{8} + m^2 = \frac{1}{a^2} \left[l(l+2) + \frac{3}{4} \right] + m^2 = \frac{1}{a^2} \left[(l+1)^2 - \frac{1}{4} + a^2 m^2 \right], \quad (5.2)$$

y las degeneraciones $d_l = (l+1)^2$ son las mismas de antes.

Entonces, la traza del núcleo de calor es:

$$\begin{aligned} K(t) &= \text{Tr} (e^{-tD}) = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)^2 e^{-\frac{t}{a^2} [(l+1)^2 - \frac{1}{4} + a^2 m^2]} = e^{-\frac{t}{a^2} [-\frac{1}{4} + a^2 m^2]} \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)^2 e^{-\frac{t}{a^2} (l+1)^2} = \\ &= e^{-\frac{t}{a^2} [-\frac{1}{4} + a^2 m^2]} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\frac{t}{a^2} n^2} = e^{-\frac{t}{a^2} [-\frac{1}{4} + a^2 m^2]} \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 e^{-\frac{t}{a^2} n^2} = \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{a^2} [-\frac{1}{4} + a^2 m^2]} \left(-\frac{a^2}{t} \right) \frac{d}{d\alpha} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \frac{t\alpha}{a^2}} \right) \Big|_{\alpha=1}, \end{aligned}$$

e invirtiendo el exponente en la sumatoria con (3.9), se obtiene que

$$K(t) = \left(-\frac{a^3 \sqrt{\pi}}{2} \right) \frac{e^{-\frac{t}{a^2} [-\frac{1}{4} + a^2 m^2]}}{t^{3/2}} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{\alpha t}} \right) \Big|_{\alpha=1} \quad (5.3)$$

Hasta aquí el cálculo es muy similar al realizado en el capítulo 3 para el laplaciano conforme; la única diferencia es un factor $e^{-t.m^2}$ que multiplica a toda la expresión. El comportamiento para “tiempos” pequeños $t \ll 1$ es el mismo que en el caso conforme, y lo mismo ocurre a “tiempos”

grandes. Sin embargo, ya puede verse el efecto del término de masa, en el caso de “tiempos” chicos: en ese caso, de acuerdo a (3.11), sólo es relevante el término con $n = 0$ de la suma, y la traza queda escrita como:

$$K(t) \simeq \left(-\frac{a^3 \sqrt{\pi}}{2} \right) \frac{e^{-\frac{t}{a^2}[-\frac{1}{4} + a^2 m^2]}}{t^{3/2}} \left(-\frac{1}{2} \right) = (4\pi t)^{-3/2} e^{-\frac{t}{a^2}[-\frac{1}{4} + a^2 m^2]} (2\pi^2 a^3) \quad (5.4)$$

Si tomamos $m = 0$, este resultado es exactamente igual al obtenido en (3.12). En aquel caso, pudimos ver que, siempre en el límite de $t \ll 1$, las trazas del núcleo de calor en S^3 y H^3 coincidían en la forma, a menos de un signo en el escalar de curvatura. Veremos que lo mismo ocurre en el caso masivo, controlando los signos relativos mediante la inclusión del “radio complejo” ia .

Pueden hacerse las mismas consideraciones que en el caso de $m = 0$ respecto a la expansión asintótica (2.7), poniendo en este caso $\mathcal{M}^2 = m^2 - \frac{1}{4a^2}$.

5.1.1 Función Zeta y acción efectiva

Pasamos a calcular la función Zeta en el caso masivo; intentaremos el mismo procedimiento que en los casos anteriores, partiendo de la ecuación (2.11) y utilizando los autovalores correspondientes (5.2); de nuevo, la suma será convergente para $\text{Re } s$ suficientemente grande:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_i d_i (\Lambda_i)^{-s} = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)^2 \left[\frac{1}{a^2} \left((l+1)^2 - \frac{1}{4} + a^2 m^2 \right) \right]^{-s} = \\ &= a^{2s} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left[n^2 - \frac{1}{4} + a^2 m^2 \right]^{-s} = a^{2s} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left[n^2 \left(1 - \frac{(\frac{1}{4} - a^2 m^2)}{n^2} \right) \right]^{-s} = \\ &= a^{2s} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2-2s} \left[\left(1 - \frac{(\frac{1}{4} - a^2 m^2)}{n^2} \right) \right]^{-s}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Para volver a usar el desarrollo de binomio en los términos entre paréntesis, es preciso que:

$$\left| \frac{\frac{1}{4} - a^2 m^2}{n^2} \right| < 1 \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

O bien, lo que es lo mismo, que:

$$\left| a^2 m^2 - \frac{1}{4} \right| < n^2 \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Entonces, esta técnica sólo podrá usarse, en principio, en un régimen de am pequeño, y la máxima cota posible será:

$$\begin{aligned} \left| a^2 m^2 - \frac{1}{4} \right| < 1 \leq n^2 \quad \forall n = 1, 2, \dots \\ -\frac{3}{4} < a^2 m^2 < \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad a^2 m^2 \in \left[0, \frac{5}{4} \right). \end{aligned}$$

Si bien interesa estudiar la situación más general posible, con masas arbitrarias, de todas formas puede continuarse el cálculo bajo estas restricciones, y será útil para analizar el comportamiento en el límite UV; es de esperar que se recuperen los resultados obtenidos en el capítulo 3.

Por lo tanto, trabajando en el rango de am ya especificado, puede usarse (3.15) para escribir:

$$\left(1 - \frac{\left(\frac{1}{4} - a^2 m^2\right)}{n^2}\right)^{-s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+k)}{k! \Gamma(s)} \left(\frac{1}{4} - a^2 m^2\right)^k n^{-2k}.$$

Llevado a la ecuación de la Zeta, se obtiene:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= a^{2s} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2-2s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+k)}{k! \Gamma(s)} \left(\frac{1}{4} - a^2 m^2\right)^k n^{-2k} = \\ &= a^{2s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+k)}{k! \Gamma(s)} \left(\frac{1}{4} - a^2 m^2\right)^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{2-2s-2k}\right) = \\ &= a^{2s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+k)}{k! \Gamma(s)} \left(\frac{1}{4} - a^2 m^2\right)^k \zeta_R(2s+2k-2), \end{aligned}$$

donde en la última línea se usó (3.16) para introducir la Zeta de Riemann, que provee de una extensión analítica para la suma en n y, en particular, permite evaluarla (y derivarla) en $s=0$.

Antes de hacer el límite $s \rightarrow 0$, extraemos el primer término de la sumatoria, y la Zeta queda escrita como:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= a^{2s} \left\{ \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s)} \zeta_R(2s-2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s+k)}{k! \Gamma(s)} \left(\frac{1}{4} - a^2 m^2\right)^k \zeta_R(2s+2k-2) \right\} = \\ &= a^{2s} \zeta_R(2s-2) + s \left\{ a^{2s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+k+1)}{(k+1)! \Gamma(s+1)} \left(\frac{1}{4} - a^2 m^2\right)^{k+1} \zeta_R(2s+2k) \right\} = \\ &= a^{2s} \zeta_R(2s-2) + s.B(s) \quad , \quad a^2 m^2 < \frac{5}{4}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde la función $B(s)$ es la expresión entre corchetes en la segunda línea, y es finita y bien comportada en $s=0$. De hecho:

$$\begin{aligned} B(0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{(k+1)! \Gamma(1)} \left(\frac{1}{4} - a^2 m^2\right)^{k+1} \zeta_R(2k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(k+1)!} \left(\frac{1}{4} - a^2 m^2\right)^{k+1} \zeta_R(2k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)} \left(\frac{1}{4} - a^2 m^2\right)^{k+1} \zeta_R(2k), \end{aligned}$$

que puede calcularse [17] siempre que $|\frac{1}{4} - a^2 m^2| < 1$.

Entonces, de (5.6) queda claro que la función Zeta se anula en $s=0$, como era de esperar. Es analítica en ese punto, y su derivada vale:

$$\zeta'(0) = \frac{d}{ds} [a^{2s} \zeta_R(2s-2) + s.B(s)] \Big|_{s=0} = 2\zeta_R'(-2) + B(0).$$

Luego, la acción efectiva, calculada de (2.12), en el caso de am pequeño, es:

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2} \{2\zeta_R'(-2) + B(0)\} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \zeta_R(3) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)} \left(\frac{1}{4} - a^2 m^2\right)^{k+1} \zeta_R(2k) \quad , \quad a^2 m^2 < \frac{5}{4}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Guardaremos este resultado para hacer el límite UV más adelante. Ahora buscamos obtener una expresión para la acción efectiva que permita considerar el límite IR, en el que $am \rightarrow \infty$.

Para eso, en lugar de partir de la definición dada en (2.11) para la función Zeta, usaremos la traza del núcleo de calor obtenida previamente, y calcularemos la Zeta a través de la transformada de Mellin.

Entonces, de (5.3) y (2.9), se tiene que:

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} \left(-\frac{a^3 \sqrt{\pi}}{2} \right) \frac{e^{-\frac{t}{a^2}[-\frac{1}{4}+a^2m^2]}}{t^{3/2}} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{\alpha t}} \right) \Big|_{\alpha=1} = \\ &= -\frac{(2\pi^2 a^3)}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty dt e^{-\frac{t}{a^2}[-\frac{1}{4}+a^2m^2]} t^{s-1-\frac{3}{2}} \left(2 \sum_{n=1}^\infty e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{\alpha t}} + 1 \right) \right] \Big|_{\alpha=1} = \\ &= -\frac{(2\pi^2 a^3)}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\Gamma(s)} \left[\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty dt t^{s-1-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t}{a^2}[-\frac{1}{4}+a^2m^2]} \right) \Big|_{\alpha=1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{2}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty dt t^{s-1-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t}{a^2}[-\frac{1}{4}+a^2m^2]-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{\alpha t}} \right) \Big|_{\alpha=1} \right].\end{aligned}$$

En el cálculo anterior, se intercambi6 el orden de integraciones, derivadas y sumas alternativamente, aprovechando la convergencia de todas ellas para valores adecuados de Res. Entonces, la función Zeta queda escrita como:

$$\zeta(s) = F_1(s) + F_2(s),$$

donde $F_1(s)$ y $F_2(s)$ son dos funciones auxiliares definidas convenientemente, y que se calculan a continuación:

$$\begin{aligned}1. F_1(s) &\equiv -\frac{(2\pi^2 a^3)}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty dt t^{s-1-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t}{a^2}[-\frac{1}{4}+a^2m^2]} \right) \Big|_{\alpha=1} = \\ &= -\frac{(2\pi^2 a^3)}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t}{a^2}[-\frac{1}{4}+a^2m^2]} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) \Big|_{\alpha=1} \\ &= -\frac{(2\pi^2 a^3)}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{a^2}{a^2m^2 - \frac{1}{4}} \right)^{s-\frac{3}{2}} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1-\frac{3}{2}} e^{-t} \left(-\frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{(2\pi^2 a^3)}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{a^2}{a^2m^2 - \frac{1}{4}} \right)^{s-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(s-\frac{3}{2})}{\Gamma(s)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. F_2(s) &\equiv -\frac{(2\pi^2 a^3)}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^\infty \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{2}{\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty dt t^{s-1-\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{t}{a^2} \left[-\frac{1}{4} + a^2m^2 \right] - \frac{n^2 \pi^2}{\alpha} \cdot \frac{a^2}{t} \right\} \right] \Big|_{\alpha=1} = \\ &= -\frac{(2\pi^2 a^3)}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^\infty \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{(a^2)^{s-\frac{3}{2}}}{\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty dt t^{(s-\frac{3}{2})-1} \exp \left\{ -t\beta - \frac{\left(\frac{n^2 \pi^2}{\alpha} \right)}{t} \right\} \right] \Big|_{\alpha=1},\end{aligned}$$

donde se hizo la sustitución $t \rightarrow \frac{t}{a^2}$ en la variable de integración, y se puso $\beta \equiv -\frac{1}{4} + a^2m^2$. La integral entre corchetes se puede resolver, y la solución queda escrita en términos de funciones Bessel modificadas de segunda especie [16]:

$$\int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\frac{\gamma}{x}-\beta x} dx = 2 \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^{\frac{\nu}{2}} K_\nu \left(2\sqrt{\gamma\beta} \right) \quad \text{Re } \beta > 0, \quad \text{Re } \gamma > 0$$

Hasta aquí no se hizo mención a posibles restricciones en el término de masa, y todos los cálculos venían siendo generales. Ahora, aparece una condición necesaria para asegurar la convergencia de la integral, que es $\text{Re } \beta = -\frac{1}{4} + a^2 m^2 > 0$. Entonces, la expresión que obtengamos en lo siguiente, será válida para am suficientemente grandes; alcanza para evaluar el límite \mathbb{R} , como pretendemos. El caso con am pequeño ya fue cubierto anteriormente, en (5.4) y (5.7).

Luego, poniendo $\gamma = \frac{n^2 \pi^2}{\alpha}$ y $\nu = s - \frac{3}{2}$, el cálculo de la función auxiliar queda:

$$\begin{aligned} F_2(s) &= -\frac{(2\pi^2 a^3)}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{(a^2)^{s-\frac{3}{2}}}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot 2 \left(\frac{n^2 \pi^2}{\alpha \beta} \right)^{\frac{1}{2}(s-\frac{3}{2})} K_{s-\frac{3}{2}} \left(\frac{2n\pi\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \right) \right] \Big|_{\alpha=1} \\ &= -\frac{(2\pi^2 a^3)}{\pi^{-s+3}} \left(\frac{a^2}{\sqrt{\beta}} \right)^{s-\frac{3}{2}} \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-\frac{3}{2}} \frac{d}{d\alpha} \left[\alpha^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{4}} K_{s-\frac{3}{2}} \left(\frac{2n\pi\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \right) \right] \Big|_{\alpha=1}. \end{aligned}$$

En resumen, la función Zeta para am suficientemente grandes queda expresada de la siguiente manera:

$$\zeta(s) = F_1(s) + F_2(s) \quad (5.8)$$

$$F_1(s) = \frac{(2\pi^2 a^3)}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{a^2}{\beta} \right)^{s-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(s-\frac{3}{2})}{\Gamma(s)} \quad (5.9)$$

$$F_2(s) = -\frac{(2\pi^2 a^3)}{\pi^{-s+3}} \left(\frac{a^2}{\sqrt{\beta}} \right)^{s-\frac{3}{2}} \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-\frac{3}{2}} \frac{d}{d\alpha} \left[\alpha^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{4}} K_{s-\frac{3}{2}} \left(\frac{2n\pi\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \right) \right] \Big|_{\alpha=1} \quad (5.10)$$

$$\beta \equiv -\frac{1}{4} + a^2 m^2 > 0. \quad (5.11)$$

Domino de analiticidad de $F_1(s)$ y $F_2(s)$

Interesa evaluar la función Zeta y su derivada en $s = 0$, así que alcanza con ver que las funciones $F_1(s)$ y $F_2(s)$ son analíticas en ese punto.

Respecto a la primera función, dada en (5.9), su comportamiento está dominado por el cociente de funciones Gamma. Recordemos que la función $\Gamma(z)$ es meromorfa, con polos simples en los enteros negativos $z = 0, -1, -2, \dots$. Entonces, la función $F_1(s)$ es analítica para todo s tal que $s - \frac{3}{2} \neq 0, -1, -2, \dots$, y en particular en $s = 0$, donde vale cero.

La segunda función $F_2(s)$ es un poco más complicada, ya que involucra una suma infinita de funciones Bessel, y su vez varía la función a considerar, según el valor de s . Sin embargo, todas ellas presentan el mismo comportamiento asintótico.

Sea $x_n = \frac{2\pi n\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$ el argumento de las funciones Bessel en (5.10). En el límite $n \rightarrow \infty$, será también $x_n \rightarrow \infty$; incluso en el caso de volúmenes grandes, en los que $\beta \rightarrow \infty$, el producto $n\sqrt{\beta}$ también crece indefinidamente, y x_n sigue siendo muy grande. Sobre la variable α trabajamos únicamente en un entorno del 1, así que no afecta al resultado anterior. Por lo tanto, podemos utilizar el siguiente desarrollo asintótico [16]:

$$K_\nu(x_n) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x_n}} e^{-x_n} \quad x_n \rightarrow \infty$$

La expresión asintótica anterior determina el mismo comportamiento para todas las funciones de la misma familia. En particular, vale también cuando $\nu = s - \frac{3}{2}$. Vemos entonces que las funciones $K_{s-\frac{3}{2}}(x)$ decaen exponencialmente al aumentar los valores de n , y que estos son los factores dominantes en la suma que involucra (5.10), lo que asegura la convergencia de la misma, para cualquier valor de s .

Por otro lado, la presencia del factor $\frac{1}{\Gamma(s)}$ indica que $F_2(s)$ también se anula en $s = 0$, por lo que comprobamos que, nuevamente, $\zeta(0) = 0$.

Finalmente, la función Zeta, en el caso de grandes volúmenes, es:

$$\zeta(s) = s(G_1(s) + G_2(s)) \quad , \quad a^2 m^2 > \frac{1}{4}, \quad (5.12)$$

donde se definieron las funciones auxiliares

$$G_1(s) = \frac{(2\pi^2 a^3)}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{a^2}{\beta}\right)^{s-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(s-\frac{3}{2})}{\Gamma(s+1)} \quad (5.13)$$

$$G_2(s) = -\frac{(2\pi^2 a^3)}{\pi^{-s+3}} \left(\frac{a^2}{\sqrt{\beta}}\right)^{s-\frac{3}{2}} \frac{1}{\Gamma(s+1)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-\frac{3}{2}} \frac{d}{d\alpha} \left[\alpha^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{4}} K_{s-\frac{3}{2}}\left(\frac{2n\pi\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\right) \right] \Big|_{\alpha=1}. \quad (5.14)$$

Pasamos entonces a calcular la acción efectiva, llevando la expresión (5.12) a (2.12):

$$W = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \zeta(s) \Big|_{s=0} = -\frac{1}{2} (G_1(0) + G_2(0)),$$

donde, de (5.13) y (5.14), son:

$$\begin{aligned} G_1(0) &= \frac{(2\pi^2 a^3)}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{a^2}{\beta}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(-\frac{3}{2})}{\Gamma(1)} = \frac{(2\pi^2 a^3)}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{a^{-3}}{\beta^{-\frac{3}{2}}} \left(\frac{4}{3}\sqrt{\pi}\right) = \\ &= \frac{\pi}{3} \beta^{\frac{3}{2}}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} G_2(0) &= -\frac{(2\pi^2 a^3)}{\pi^3} \left(\frac{a^2}{\sqrt{\beta}}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{\Gamma(1)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}} \frac{d}{d\alpha} \left[\alpha^{\frac{1}{4}} K_{-\frac{3}{2}}\left(\frac{2n\pi\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\right) \right] \Big|_{\alpha=1} = \\ &= -\frac{(2\pi^2 a^3)}{\pi^3} \frac{a^{-3}}{\beta^{-\frac{3}{4}}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}} \frac{d}{d\alpha} \left[\alpha^{\frac{1}{4}} \frac{\alpha^{\frac{1}{4}}}{2n^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{4}}} \left(1 + \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{2n\pi\sqrt{\beta}}\right) \exp\left\{-\frac{2n\pi\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\right\} \right] \Big|_{\alpha=1} = \\ &= -\frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} \frac{d}{d\alpha} \left[\alpha^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{2n\pi\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\right\} + \frac{\alpha}{2n\pi\sqrt{\beta}} \exp\left\{-\frac{2n\pi\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\right\} \right] \Big|_{\alpha=1} = \\ &= -\frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \left(e^{-2n\pi\sqrt{\beta}} + n\pi\sqrt{\beta} e^{-2n\pi\sqrt{\beta}} + \frac{e^{-2n\pi\sqrt{\beta}}}{2n\pi\sqrt{\beta}} \right) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\beta}}{n^2} + \frac{\pi}{n}\beta + \frac{1}{2\pi n^3} \right) e^{-2n\pi\sqrt{\beta}}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

En la segunda línea del cálculo de $G_2(s)$ se utilizó la expresión exacta de $K_{-\frac{3}{2}}(s)$ citada en [16], y con ella se hizo luego la derivada en α .

Entonces, reemplazando (5.15) y (5.16) en la acción efectiva, e introduciendo también (5.11) para dejar explícita la dependencia con el término masivo, se obtiene que:

$$W = -\frac{\pi}{6} \left(a^2 m^2 - \frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} \left(a^2 m^2 - \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{n} \left(a^2 m^2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2\pi n^3} \right] e^{-2n\pi\sqrt{a^2 m^2 - \frac{1}{4}}} \quad (5.17)$$

válido para $a^2 m^2 > \frac{1}{4}$.

5.2 Espacio H^3

Añadiendo masa al caso del laplaciano con acoplamiento conforme (3.4), el problema de autovalores sobre H^3 es:

$$D\phi_{\tilde{k};lm} = \left(\Delta + \frac{R_{H^3}}{8} + m^2 \right) \phi_{\tilde{k};lm} = \Lambda_{\tilde{k}} \phi_{\tilde{k};lm},$$

donde

$$\Lambda_{\tilde{k}} = \frac{\tilde{k}^2 + 1}{a^2} - \frac{3}{4a^2} + m^2 = \frac{1}{a^2} \left(\tilde{k}^2 + \frac{1}{4} + a^2 m^2 \right), \quad \tilde{k} \geq 0.$$

Las autofunciones de D son las mismas que para el laplaciano mínimo Δ , y la densidad de estados también. Entonces, la traza del núcleo de calor (2.13) es:

$$\begin{aligned} K(t; 0) &= \frac{1}{2\pi^2 a^3} \int_0^{\infty} \tilde{k}^2 e^{-t \frac{(\tilde{k}^2 + \frac{1}{4} + a^2 m^2)}{a^2}} d\tilde{k} = \frac{e^{-\frac{t}{a^2}(\frac{1}{4} + a^2 m^2)}}{2\pi^2 a^3} \int_0^{\infty} \tilde{k}^2 e^{-\frac{t}{a^2} \tilde{k}^2} d\tilde{k} = \\ &= \frac{e^{-\frac{t}{a^2}(\frac{1}{4} + a^2 m^2)}}{2\pi^2 a^3} \left(\frac{a^2}{t} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \tilde{k}^2 e^{-\tilde{k}^2} d\tilde{k} = \\ &= (4\pi t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t}{a^2}(\frac{1}{4} + a^2 m^2)}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Como era de esperar, presenta el mismo comportamiento en t que la traza del caso conforme (4.4), más el término masivo añadido en el argumento de la exponencial. Además, invirtiendo el signo de la curvatura mediante $a \rightarrow ia$, el resultado es el mismo que se obtuvo en (5.4) para la traza en S^3 (a menos de un factor de volumen), tal como ocurría en el conforme. Nuevamente, las contribuciones topológicas presentes en la esfera no aparecen en el hiperbólico, y $K(t; 0) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Pueden hacerse las mismas consideraciones que en el caso de $m = 0$ respecto a la expansión asintótica (2.7), poniendo en este caso $\mathcal{M}^2 = m^2 + \frac{1}{4a^2}$.

5.2.1 Función Zeta y acción efectiva

Calculamos la función Zeta mediante (5.18) y la transformada de Mellin (2.9):

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} (4\pi t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t}{a^2}(\frac{1}{4} + a^2 m^2)} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-\frac{3}{2}-1} e^{-\frac{t}{a^2}(\frac{1}{4} + a^2 m^2)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{a^2}{a^2 m^2 + \frac{1}{4}} \right)^{s-\frac{3}{2}} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{(s-\frac{3}{2})-1} e^{-t} = \\
 &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{a^2}{a^2 m^2 + \frac{1}{4}} \right)^{s-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(s-\frac{3}{2})}{\Gamma(s)}. \tag{5.19}
 \end{aligned}$$

Este resultado es muy similar al obtenido en (4.5) en el caso conforme; de hecho, inmediatamente se recupera el mismo haciendo $m = 0$. Además, la expresión es válida para cualquier valor de am . Es una función analítica para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $s - \frac{3}{2} \neq 0, -1, -2, \dots$

Luego, usando que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ en (5.19), queda claro que $\zeta(0) = 0$, y llevado a la acción efectiva definida en (2.12), aunque calculada por unidad de volumen, resulta :

$$\begin{aligned}
 W &= -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left[\frac{s}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{a^2}{a^2 m^2 + \frac{1}{4}} \right)^{s-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(s-\frac{3}{2})}{\Gamma(s+1)} \right] \Big|_{s=0} = -\frac{1}{2} (4\pi a^2)^{-\frac{3}{2}} \left(a^2 m^2 + \frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{4}{3} \sqrt{\pi} \right) = \\
 &= \frac{-1}{(2\pi^2 a^3)} \frac{\pi}{6} \left(a^2 m^2 + \frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{2}}. \tag{5.20}
 \end{aligned}$$

5.3 Comparación en el límite UV e IR

Resumiendo los resultados obtenidos para la acción efectiva del campo escalar libre masivo y con acoplamiento conforme, se tiene que:

En S^3 :

$$W_{S^3} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi^2} \zeta_R(3) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)} \left(\frac{1}{4} - a^2 m^2 \right)^{k+1} \zeta_R(2k) & a^2 m^2 < \frac{5}{4} \\ -\frac{\pi}{6} \left(a^2 m^2 - \frac{1}{4} \right)^{3/2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} \left(a^2 m^2 - \frac{1}{4} \right)^{1/2} + \frac{\pi}{n} \left(a^2 m^2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2\pi n^3} \right] e^{-2n\pi\sqrt{a^2 m^2 - \frac{1}{4}}} & a^2 m^2 > \frac{1}{4} \end{cases}$$

En H^3 :

$$w_{H^3} = \frac{1}{(2\pi^2 a^3)} \left[-\frac{\pi}{6} \left(a^2 m^2 + \frac{1}{4} \right)^{3/2} \right].$$

Recordemos que todos los cálculos en espacio hiperbólico fueron realizados por unidad de volumen. Por eso, para unificar notación, en esta sección se usó W para la acción efectiva usual (como fue obtenida la de la esfera) y $w \equiv W/v_{\text{vol}}$ para la acción efectiva por unidad de volumen (como fue en el caso de H^3).

Pasemos a analizar los límites en cada caso, y comparar:

- El límite UV es convergente tanto en la esfera como en el hiperbólico:

En S^3 :

$$\lim_{am \rightarrow 0} W_{S^3} = \frac{1}{4\pi^2} \zeta_R(3) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^{k+1} (k+1)} \zeta(2k) = \frac{1}{4\pi^2} \zeta_R(3) - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k} (k+1)} \zeta(2k) \right] =$$

$$= \frac{\ln 2}{8} - \frac{3}{16\pi^2} \zeta_R(3), \quad (5.21)$$

donde usamos (3.21) para evaluar la sumatoria.

En H^3 :

$$\lim_{am \rightarrow 0} w_{H^3} = -\frac{\pi}{48 \times (2\pi^2 a^3)} \quad (5.22)$$

Podemos ver que se recuperan los resultados (3.22) y (4.6) obtenidos para el campo escalar sin masa, los cuales son bien diferentes entre sí, y no es posible relacionarlos mediante la transformación $a \rightarrow ia$. A pesar de tratarse de una teoría conforme, y que las geometrías de los dos espacios se relacionan fácilmente por prolongación analítica de los radios, las contribuciones topológicas introducidas en la traza del núcleo de calor no pueden salvarse, y las acciones efectivas son distintas en el límite UV.

- El límite IR es divergente, y las expresiones asintóticas cuando $am \rightarrow \infty$ son:

En S^3 :

$$W_{S^3} \approx -\frac{\pi}{6} \left(a^2 m^2 - \frac{1}{4} \right)^{3/2}. \quad (5.23)$$

En H^3 :

$$w_{H^3} = -\frac{\pi}{6(2\pi^2 a^3)} \left(a^2 m^2 + \frac{1}{4} \right)^{3/2} = -\frac{1}{12\pi} \left(m^2 + \frac{1}{4a^2} \right)^{3/2}. \quad (5.24)$$

Notemos aquí que, siendo el volumen de la esfera $\text{Vol}(S^3) = 2\pi^2 a^3$, entonces:

$$w_{S^3} = \frac{W_{S^3}}{\text{Vol}(S^3)} = -\frac{\pi}{6(2\pi^2 a^3)} \left(a^2 m^2 - \frac{1}{4} \right)^{3/2} = -\frac{1}{12\pi} \left(m^2 - \frac{1}{4a^2} \right)^{3/2}. \quad (5.25)$$

La única diferencia con el resultado (5.24) en H^3 está en el signo del factor $1/4a^2$, que depende del radio del espacio. Haciendo $a \rightarrow ia$, se obtiene exactamente la expresión (5.25); la acción efectiva por unidad de volumen en H^3 es la misma que se obtiene poniendo un “radio imaginario” $\tilde{a} = ia$ en la esfera S^3 , y viceversa. Todo esto es válido en el límite IR de am muy grande. Cabe destacar que en el régimen masivo, la teoría no es conforme.

Por otro lado, en el Apéndice A se ha calculado la acción efectiva para el campo escalar libre y masivo con acoplamiento conforme en el espacio chato \mathbb{R}^3 . Tanto S^3 como H^3 son conformes a \mathbb{R}^3 , y ambas geometrías tienden a ser la de espacio chato cuando se hace muy grande el radio de curvatura. Si, en el límite IR, en el que $am \rightarrow \infty$, suponemos que a crece más rápido que $1/m$, entonces las acciones efectivas por unidad de volumen en (5.24) y (5.25) quedan escritas como:

$$w_{S^3} = -\frac{1}{12\pi} \left(m^2 - \frac{1}{4a^2} \right)^{3/2} \approx -\frac{1}{12\pi} m^3.$$

$$w_{H^3} = -\frac{1}{12\pi} \left(m^2 + \frac{1}{4a^2} \right)^{3/2} \approx -\frac{1}{12\pi} m^3.$$

Ambos resultados son coincidentes entre sí, y con la acción efectiva dada en (A.2) para \mathbb{R}^3 , si la consideramos por unidad de volumen.

5.4 La acción efectiva como posible función C

Como se ha mencionado en la Introducción, en la referencia [5] los autores proponen a la acción efectiva como una buena función C para la teoría de campo escalar libre.

Veamos primero si esto es cierto en el caso de la esfera S^3 . Primero, trabajemos un poco con la expresión de W_{S^3} correspondiente a $a^2 m^2 < \frac{5}{4}$, dada en (5.7). Definiendo $\rho = \sqrt{\frac{1}{4} - a^2 m^2}$, resulta ser:

$$W_{S^3} = \frac{1}{4\pi^2} \zeta_R(3) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \rho^{2k+2} \zeta_R(2k) \quad , \quad a^2 m^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Hemos restringido el dominio a $a^2 m^2 \leq \frac{1}{4}$, pues, para valores más grandes de ρ , se hace imaginario.

La suma de Zetas de Riemann se puede evaluar usando la ec. 64, pág. 258 de [17], y se obtiene:

$$W_{S^3} = -\frac{1}{2} \left\{ \rho^2 [\zeta'_H(0, 1 - \rho) + \zeta'_H(0, 1 + \rho)] + 2\rho [\zeta'_H(-1, 1 - \rho) - \zeta'_H(-1, 1 + \rho)] \right. \\ \left. + \zeta'_H(-2, 1 - \rho) + \zeta'_H(-2, 1 + \rho) \right\} . \quad (5.26)$$

donde es $\zeta'_H(s, x) \equiv \frac{\partial}{\partial s} \zeta_H(s, x)$ la derivada respecto al primer argumento de la función Zeta de Hurwitz, la generalización de la Zeta de Riemann, definida a partir de [17]:

$$\zeta_H(s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s} \quad , \quad \text{Res} > 1, \quad x \notin \mathbb{Z}_0^- .$$

La serie que define a $\zeta_H(s, x)$ es absolutamente convergente en $\text{Res} > 1$, y analítica en esa región, y puede extenderse a todo el plano complejo, resultando una función meromorfa con un único polo simple en $s = 1$. Por otra parte, puede realizarse una extensión analítica en el segundo argumento, mientras no sea este un entero negativo o cero. Entonces, la expresión dada en (5.26) vale también cuando $a^2 m^2 > \frac{1}{4}$, en cuyo caso habrá que evaluarla en $\rho = i\delta$, donde es $\delta = \sqrt{-\frac{1}{4} + a^2 m^2}$. Puede mostrarse que, en ese caso, se recupera la forma (5.17) de la acción efectiva.

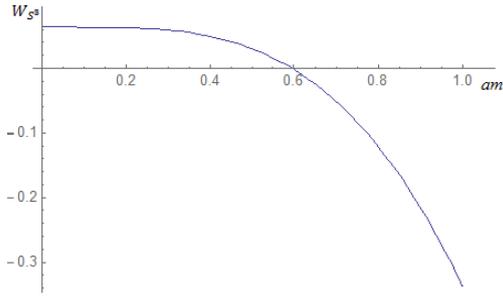
Para cumplir la condición más débil de función C , debe ser W_{S^3} una función positiva, y tal que $W_{IR} < W_{UV}$. Con la regularización utilizada, se obtuvo que:

$$W_{UV} = \frac{\ln 2}{8} - \frac{3}{16\pi^2} \zeta_R(3) \simeq 0,0638 \quad , \quad W_{IR} \rightarrow -\infty$$

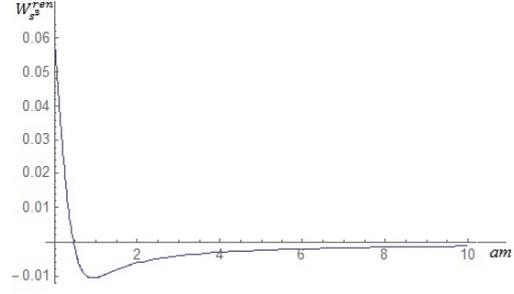
Si bien es cierto que $W_{IR} < W_{UV}$, en el límite IR la función resulta divergente, y negativa. En la figura 5.1a se muestra la curva correspondiente a W como función de am .

Si se sustraen completas las divergencias, esto es, restando a la acción efectiva la correspondiente expresión asintótica (5.23), se obtiene una función que se vuelve imaginaria para $a^2 m^2 < \frac{1}{4}$. Tal sustracción daría por resultado una teoría efectiva no unitaria.

Una forma de tratar las divergencias IR es desarrollando en serie la expresión asintótica en ese límite, y restar los términos con potencias positivas de am :



(a) La acción efectiva para el campo escalar con acoplamiento conforme sobre S^3 como función del parámetro am ; W_{S^3} es estable en UV y estacionaria, pero diverge en IR.



(b) Se muestra cómo, al renormalizar la acción efectiva quitando los términos divergentes en IR, se obtiene una función que no es definida positiva a lo largo del flujo del RG.

Figura 5.1

$$\begin{aligned} W_{S^3} &\simeq -\frac{\pi}{6} \left(a^2 m^2 - \frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{2}} = -\frac{\pi}{6} (am)^3 \left(1 - \frac{1}{4a^2 m^2} \right)^{\frac{3}{2}} = -\frac{\pi}{6} (am)^3 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{k! \Gamma(\frac{5}{2} - k)} \left(\frac{-1}{4a^2 m^2} \right)^k \right] \\ &\simeq -\frac{\pi}{6} (am)^3 \left[1 - \frac{3}{8a^2 m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{a^4 m^4}\right) \right]. \end{aligned}$$

Definimos la acción efectiva “renormalizada” como:

$$W_{S^3}^{ren} = W_{S^3} + \frac{\pi}{6} \left(a^3 m^3 - \frac{3}{8} am \right). \quad (5.27)$$

De esta manera, es fácil notar que:

$$W_{UV}^{ren} = \frac{\ln 2}{8} - \frac{3}{16\pi^2} \zeta_R(3) \quad , \quad W_{IR}^{ren} = 0$$

En la figura 5.1b se muestra el gráfico de $W_{S^3}^{ren}$ en función de am . Como puede verse, la función es bien comportada en UV e IR, pero no es siempre positiva a lo largo del flujo del RG. Con la prescripción dada en (5.27) no encontramos una función C adecuada.

Otra posibilidad que se ha explorado es eliminar la divergencia IR sustrayendo un factor dependiente de la derivada respecto a ρ de la acción efectiva, de la forma:

$$\tilde{W}_{S^3} = W_{S^3} - \frac{1}{3} \rho \frac{d}{d\rho} W_{S^3}. \quad (5.28)$$

Notemos que esta expresión está bien definida incluso extendida para ρ imaginario, en cuyo caso la acción efectiva toma valores reales, y la derivada $\rho \frac{\partial}{\partial \rho}$ también.

La derivada de W_{S^3} se puede calcular explícitamente, partiendo de (5.26) y usando algunas identidades útiles, provenientes de [16, 17] y la definición de la Zeta de Hurwitz, como son:

$$\frac{\partial}{\partial x} \zeta'_H(s, x) = -\zeta_H(s+1, x) - s \zeta_H(s+1, x) \quad , \quad s \neq 0, 1, x \notin \mathbb{Z}_0^-;$$

$$\zeta_H(0, a) = \frac{1}{2} - a \quad , \quad a \notin \mathbb{Z}_0^-;$$

$$\zeta_H(-n, a) = -\frac{B_{n+1}(a)}{n+1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}, a \notin \mathbb{Z}_0^-;$$

donde $B_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k}$ son los *polinomios de Bernoulli*, y B_k los *número de Bernoulli*; y que

$$\zeta'_H(0, q) = \ln \Gamma(q) - \frac{1}{2} \ln(2\pi),$$

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad z \notin \mathbb{Z}.$$

Con todo esto, se obtiene que::

$$\frac{d}{d\rho} W_{S^3} = \frac{\pi}{2} \rho^2 \cot(\pi\rho),$$

con lo cual la nueva función \tilde{W}_{S^3} se escribe como:

$$\tilde{W}_{S^3} = W_{S^3} - \frac{\pi}{6} \rho^3 \cot(\pi\rho). \quad (5.29)$$

Notemos que:

- En UV, se recupera el valor de la acción efectiva original: $\tilde{W}_{UV} = \frac{\ln 2}{8} - \frac{3}{16\pi^2} \zeta_R(3)$.
- En IR: para am grandes, escribimos $\rho = i\delta$ y se tiene que

$$\tilde{W}_{S^3} = W_{S^3} - \frac{\pi}{6} (i\delta)^3 \cot(i\pi\delta) = W_{S^3} + \frac{\pi}{6} \delta^3 \coth(\pi\delta).$$

En el límite IR, la expresión asintótica será:

$$\tilde{W}_{S^3} \simeq -\frac{\pi}{6} \delta^3 + \frac{\pi}{6} \delta^3 \frac{(e^{\pi\delta} + e^{-\pi\delta})}{e^{\pi\delta} - e^{-\pi\delta}} \rightarrow 0,$$

obtenemos que $\tilde{W}_{IR} = 0$. En la figura 5.2a puede verse esta tendencia, además que la función es siempre positiva; el comportamiento es el adecuado a una función C .

Entonces, encontramos que \tilde{W}_{S^3} satisface las condiciones de una función C , en el sentido más débil. El próximo paso es estudiar su derivada: en la figura 5.2a es fácil ver que es monótonamente decreciente hacia el IR, falta analizar si en los puntos conformes, es estacionaria. Recordemos en este punto que la verdadera constante de acoplamiento (adimensional) de la teoría es $g = \frac{3}{4} + a^2 m^2$; obviando el término constante, debemos analizar a \tilde{W}_{S^3} como función de $a^2 m^2$.

En UV, escribiendo $x = a^2 m^2$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tilde{W}_{S^3} &= \frac{d\rho}{dx} \frac{d}{d\rho} \tilde{W}_{S^3} = -\frac{1}{2\rho} \left[\frac{d}{d\rho} W_{S^3} - \frac{\pi}{6} \left(3\rho^2 \cot(\pi\rho) - \rho^3 \frac{\pi}{\sin^2(\pi\rho)} \right) \right] = \\ &= -\frac{\pi^2 \rho^2}{12 \sin(\pi\rho)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{\pi^2}{48}. \end{aligned}$$

Luego, la derivada respecto al “tiempo” de evolución del flujo del RG es:

$$\dot{\tilde{W}}_{S^3} = -\beta(g_{S^3}) \frac{d}{dg_{S^3}} \tilde{W}_{S^3} = 2(am)^2 \frac{d}{d(a^2 m^2)} \tilde{W}_{S^3} \xrightarrow{am \rightarrow 0} 0.$$

Por lo tanto, el punto conforme UV es estacionario, pero no se cumple la condición 3 mencionada en la Introducción, según la cual $\frac{d}{dg_{S^3}} \tilde{W}_{S^3}$ debería ser proporcional a $\beta(g)$ para considerarse una función C en el sentido más fuerte. En la figura 5.2b se grafica \tilde{W}_{S^3} como función de $a^2 m^2$.

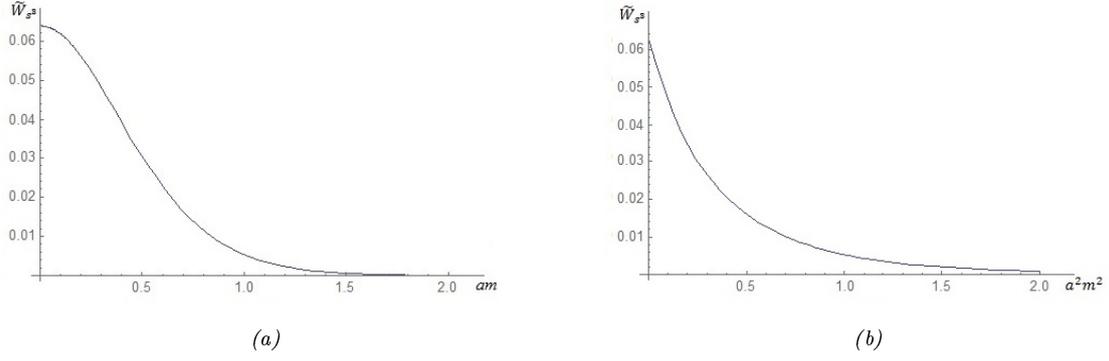


Figura 5.2: Se muestra la función \tilde{W}_{S^3} como función de am (a) y de $a^2 m^2$ (b). Es estable tanto en UV como en IR , y monótonamente decreciente, pero en (b) se evidencia que su derivada con respecto a $a^2 m^2$ no se anula en UV .

Por otro lado, la misma función para la teoría sobre H^3 , es idénticamente nula: escribiendo en este caso $\tilde{\rho} = \sqrt{\frac{1}{4} + a^2 m^2}$, se tiene que

$$\tilde{W}_{H^3} = W_{H^3} - \frac{1}{3} \tilde{\rho} \frac{d}{d\tilde{\rho}} W_{H^3} = -\frac{\pi}{6} \tilde{\rho}^3 - \frac{1}{3} \tilde{\rho} (3\tilde{\rho}^2) = 0 \quad , \quad \forall \tilde{\rho} .$$

Entonces, \tilde{W} es una buena función C (cumple las condiciones 1 y 2) en el caso del espacio esférico, y se anula cuando se calcula en el espacio hiperbólico. Además, funciona como medida de los efectos de volumen finito: en H^3 , que es no compacto, \tilde{W} vale cero, mientras que en S^3 , al ser compacto, en el núcleo de calor aparecen sumadas las que llamamos “contribuciones topológicas”, que posteriormente llevan a obtener una \tilde{W} no trivial. Además, es fácil verificar que en \mathbb{R}^3 , que es no compacto al igual que el espacio hiperbólico, se obtiene $\tilde{W} = 0$.

6 | Acciones efectivas en dimensión impar arbitraria

Los resultados obtenidos anteriormente en S^3 y H^3 pueden generalizarse a espacios esféricos e hiperbólicos de dimensión impar arbitraria. Hacer dicha generalización no es trivial: se necesita conocer los autovalores y sus degeneraciones (o densidad de estados), que dependerán de la dimensión del espacio, para luego poder calcular funciones Zeta y obtener las acciones efectivas. Sin embargo, el procedimiento es similar al que ya se usó antes en dimensión 3.

Consideramos entonces el operador diferencial sobre una variedad Riemmaniana de dimensión d , definido como:

$$D = \Delta + \xi R + m^2. \quad (6.1)$$

El factor conforme depende de la dimensión, y es $\xi = \frac{d-2}{4(d-1)}$. Habrá que resolver el problema de autovalores de este operador, utilizando el laplaciano mínimo Δ y el escalar de curvatura R adecuados para la métrica del espacio en cuestión.

6.1 Esfera S^d

De [18, 19] tenemos que el laplaciano mínimo Δ definido sobre S^d presenta el siguiente espectro de autovalores, con sus respectivas degeneraciones:

$$\lambda_n = \frac{n(n+d-1)}{a^2}, \quad d_n = \frac{\Gamma(d+n-1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(d)} (d+2n-1) \quad n \in \mathbb{N}, \quad d > 1.$$

Nuevamente, a es el radio de la esfera. El escalar de curvatura para una esfera de dimensión arbitraria es:

$$R = \frac{d(d-1)}{a^2}, \quad (6.2)$$

con lo cual los autovalores para el laplaciano conforme y masivo D son:

$$\begin{aligned} \Lambda_n &= \lambda_n + \xi R + m^2 = \frac{1}{a^2} \left[n(n+d-1) + \frac{d(d-2)}{4} + a^2 m^2 \right] = \\ &= \frac{1}{a^2} \left[\left(n + \frac{d-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} + a^2 m^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Con los autovalores Λ_n y sus degeneraciones d_n , calculamos la función Zeta:

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n \Lambda_n^{-s} = \frac{a^{2s}}{\Gamma(d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d+n-1)}{\Gamma(n+1)} (d+2n-1) \left[\left(n + \frac{d-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} + a^2 m^2 \right]^{-s} = \\ &= \frac{a^{2s}}{(d-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(d+n-2)! (d+2n-1)}{n!} \left[\left(n + \frac{d-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} + a^2 m^2 \right]^{-s}.\end{aligned}$$

Si consideramos dimensión impar $d = 2k + 1$, con $k = 1, 2, \dots$, entonces resulta:

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{a^{2s}}{(2k)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2k+n-1)! 2(n+k)}{n!} \left[(n+k)^2 - \frac{1}{4} + a^2 m^2 \right]^{-s} = \\ &= \frac{2a^{2s}}{(2k)!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\dots(n+2k-1)(n+k) \left[(n+k)^2 - \frac{1}{4} + a^2 m^2 \right]^{-s},\end{aligned}$$

donde, en la segunda línea, se escribieron explícitamente los factores correspondientes al cociente de factoriales $\frac{(n+(2k-1))!}{n!}$.

Si ahora llamamos $l = n + k$, la suma sobre este nuevo índice queda escrita como:

$$\zeta(s) = \frac{2a^{2s}}{(2k)!} \sum_{l=k}^{\infty} (l-k+1)(l-k+2)\dots(l+k-1)l \left[l^2 - \frac{1}{4} + a^2 m^2 \right]^{-s}. \quad (6.4)$$

Recordemos que, en dimensión 3, al calcular la Zeta aparecía el mismo factor $[l^2 - \frac{1}{4} + a^2 m^2]^{-s}$, que podíamos tratar usando el desarrollo de binomio cuando am era suficientemente pequeño, o bien con una transformada de Mellin cuando am era grande. En ambos casos, el factor l que multiplicaba dentro de la suma llevaba a obtener funciones Zeta de Riemman cuando am era pequeño, y podía eliminarse en el otro caso reescribiendo los términos de la suma como derivadas respecto a una nueva variable α evaluadas en $\alpha = 1$; con este procedimiento podemos tratar cualquier potencia de l .

Sin embargo, en dimensión impar arbitraria, las degeneraciones implican multiplicar varios factores lineales en l y no es tan directo el cálculo. Notemos entonces dos cosas en la expresión (6.4):

1. La suma barre sobre los valores de l mayores que k , pero los términos a sumar se anulan si consideramos $l < k$, puesto que involucran factores de la forma $(l - (k-1))(l - (k-2))\dots(l+k-1)$; alguno de los primeros vale cero si consideramos $l = k-1, k-2, \dots, 0$. Por lo tanto, podemos escribir esquemáticamente que

$$\sum_{l=k}^{\infty} = \sum_{l=k}^{\infty} + \sum_{l=0}^{k-1} = \sum_{l=0}^{\infty}.$$

2. Esos mismos términos pueden reordenarse como una productoria de binomios que son diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned}(l - (k-1))(l - (k-2))\dots(l-1)l(l+1)\dots(l+(k-2))(l+(k-1)) &= \\ &= l(l^2 - 1)(l^2 - 4)\dots(l^2 - (k-1)^2)\end{aligned}$$

Con todo esto, la expresión de la función Zeta en (6.4) queda escrita de la siguiente manera:

$$\zeta(s) = \frac{2a^{2s}}{(2k)!} \sum_{l=0}^{\infty} \left[l^2 (l^2 - 1) \dots (l^2 - (k-1)^2) \right] \left[l^2 - \frac{1}{4} + a^2 m^2 \right]^{-s}. \quad (6.5)$$

Si se distribuye el producto de los binomios en el primer corchete, se obtiene un polinomio que es par en l y de grado $2k$, así que es posible encontrar unos coeficientes $C_r(k)$ tales que:

$$l^2 (l^2 - 1) \dots (l^2 - (k-1)^2) = \sum_{r=1}^k C_r(k) l^{2r}. \quad (6.6)$$

Llevado a la expresión (6.5), se tiene:

$$\zeta(s) = \frac{2a^{2s}}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \sum_{l=1}^{\infty} l^{2r} \left[l^2 - \frac{1}{4} + a^2 m^2 \right]^{-s}. \quad (6.7)$$

Excluimos en la suma el término con $l = 0$, que no afecta al resultado, pues vale cero. Obtuvimos entonces una suma finita de $k - 1$ series infinitas del tipo de las que ya trabajamos anteriormente en el caso de S^3 , donde cada término lleva un factor $\left[l^2 - \frac{1}{4} + a^2 m^2 \right]^{-s}$ multiplicado por alguna potencia de l . En particular, es fácil ver que, para $k = 1$, es $C_1(1) = 1$ y el resultado es el mismo que se tenía en (5.5).

6.1.1 Traza del núcleo de calor

Más adelante volveremos a la función Zeta. Pasemos de momento a calcular la traza del núcleo de calor, que será útil cuando queramos usar la regularización Zeta, y también para comparar con el caso hiperbólico, a “tiempos” grandes y pequeños. Es de esperar que, como ocurría en el caso de S^3 , a tiempos de difusión pequeños se recuperen los resultados del espacio hiperbólico haciendo la extensión a radio imaginario, mientras que a tiempos más grandes, los efectos debido a las distintas topologías de uno y otro espacio hagan que esto no sea posible.

Entonces, para el espacio S^{2k+1} , partiendo de la definición (2.10) y usando los autovalores (6.3) con sus respectiva degeneraciones, se puede obtener una expresión para la traza del núcleo de calor, trabajando las degeneraciones como se mostró anteriormente:

$$\begin{aligned} K(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-t\Lambda_n} = \frac{2}{(2k)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2k+n-1)(n+k)}{n!} e^{-\frac{t}{a^2}[(n+k)^2 - \frac{1}{4} + a^2 m^2]} = \\ &= \frac{2}{(2k)!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \dots (n+2k-1)(n+k) e^{-\frac{t}{a^2}[(n+k)^2 - \frac{1}{4} + a^2 m^2]} = \\ &= \frac{2}{(2k)!} \sum_{l=k}^{\infty} l^2 (l^2 - 1) \dots (l^2 - (k-1)^2) e^{-\frac{t}{a^2}[l^2 - \frac{1}{4} + a^2 m^2]} = \\ &= \frac{e^{-\frac{t}{a^2}(-\frac{1}{4} + a^2 m^2)}}{(2k)!} \sum_{l=-\infty}^{\infty} l^2 (l^2 - 1) \dots (l^2 - (k-1)^2) e^{-\frac{t}{a^2} l^2} = \\ &= \frac{e^{-\frac{t}{a^2}(-\frac{1}{4} + a^2 m^2)}}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \sum_{l=-\infty}^{\infty} l^{2r} e^{-\frac{t}{a^2} l^2}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

En la tercera línea se pasó a sumar sobre $l = n + k$, reescribiendo las degeneraciones en este nuevo índice como producto de diferencias de cuadrados; luego en la cuarta línea se agregaron los términos con $0 \leq l < k$, que se anulan, y los correspondientes a l negativos, pues todos los términos de la suma son pares en l y $l = 0$ no contribuye, por lo que $2 \sum_{l=0}^{\infty} = \sum_{l=-\infty}^{\infty}$.

Finalmente, usando (6.6), se tiene una suma finita de series de la forma $\sum_{l=-\infty}^{\infty} l^{2r} e^{-\frac{t}{a^2} l^2}$. Será útil invertir el argumento de la exponencial usando la Theta de Jacobi, para analizar “tiempos” pequeños y posteriormente calcular la función Zeta. Para ello, añadimos un parámetro α de modo que:

$$n^{2r} e^{-\frac{t}{a^2} n^2} = \left(-\frac{a^2}{t} \right)^r \frac{d^r}{d\alpha^r} \left(e^{-\frac{t}{a^2} n^2 \alpha} \right) \Big|_{\alpha=1}.$$

Llevado a la ecuación (6.8) e invirtiendo la exponencial en la suma usando (3.9), se obtiene:

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{e^{-\frac{t}{a^2}(-\frac{1}{4}+a^2 m^2)}}{(2k)!} \sqrt{\pi} \sum_{r=1}^k C_r(k) (-1)^r \left(\frac{a^2}{t} \right)^{r+\frac{1}{2}} \frac{d^r}{d\alpha^r} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{\alpha t}} \right) \Big|_{\alpha=1} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi} e^{-\frac{t}{a^2}(-\frac{1}{4}+a^2 m^2)}}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) (-1)^r \left(\frac{a^2}{t} \right)^{r+\frac{1}{2}} \frac{d^r}{d\alpha^r} \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{\alpha t}} + 1 \right) \right] \Big|_{\alpha=1} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi} e^{-\frac{t}{a^2}(-\frac{1}{4}+a^2 m^2)}}{(2k)!} \left\{ \sum_{r=1}^k C_r(k) (-1)^r \left(\frac{a^2}{t} \right)^{r+\frac{1}{2}} \frac{d^r}{d\alpha^r} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) \Big|_{\alpha=1} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{r=1}^k C_r(k) (-1)^r \left(\frac{a^2}{t} \right)^{r+\frac{1}{2}} \frac{d^r}{d\alpha^r} \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{\alpha t}} \right] \Big|_{\alpha=1} \right\}. \end{aligned}$$

Luego, tenemos que:

$$\frac{d^r}{d\alpha^r} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) \Big|_{\alpha=1} = \frac{(-1)^r}{2^r} (2r-1)!! \alpha^{-\frac{2r+1}{2}} \Big|_{\alpha=1} = \frac{(-1)^r}{2^r} (2r-1)!!,$$

donde el doble factorial indica multiplicar por los naturales menores y de la misma paridad (en este caso, los impares): $(2r-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r-1)$.

Además, se puede mostrar ¹que $(2r-1)!! = \frac{(2r)!}{2^r r!}$. Entonces, la traza del núcleo de calor queda escrita de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{\sqrt{\pi} e^{-\frac{t}{a^2}(-\frac{1}{4}+a^2 m^2)}}{(2k)!} \left\{ \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(2r)!}{4^r r!} \left(\frac{a^2}{t} \right)^{r+\frac{1}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{r=1}^k C_r(k) (-1)^r \left(\frac{a^2}{t} \right)^{r+\frac{1}{2}} \frac{d^r}{d\alpha^r} \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{\alpha t}} \right] \Big|_{\alpha=1} \right\}. \quad (6.9) \end{aligned}$$

En el límite $t \rightarrow 0^+$, los términos en la suma de la segunda línea decaen exponencialmente y son despreciables frente a las potencias de t , por lo que puede aproximarse la traza como:

¹Por cálculo directo, reordenando los factores, es (para $n \geq 1$):

$$\begin{aligned} 2^n n! (2n-1)!! &= 2^n [n(n-1)(n-2)\dots 1] [(2n-1)(2n-3)\dots 1] \\ &= [(2n)(2(n-1))(2(n-2))\dots 2] [(2n-1)(2n-3)\dots 1] \\ &= (2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)\dots 2 \cdot 1 \\ &= (2n)! \end{aligned}$$

$$K(t) \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{(2k)!} e^{-\frac{t}{a^2}(-\frac{1}{4}+a^2m^2)} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(2r)!}{4^r r!} \left(\frac{a^2}{t}\right)^{r+\frac{1}{2}} \quad t \ll 1, \quad (6.10)$$

que es el desarrollo asintótico de la traza, y se reduce a (5.4) en dimensión 3 ($k = 1$). Para comparar con la expresión en (2.7), reescribimos el resultado anterior como:

$$\begin{aligned} K(t) &\simeq \frac{\sqrt{\pi}}{(2k)!} e^{-\frac{t}{a^2}(-\frac{1}{4}+a^2m^2)} t^{-\frac{2k+1}{2}} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(2r)!}{4^r r!} a^{2r+1} t^{-r-\frac{1}{2}+\frac{2k+1}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{(2k)!} e^{-\frac{t}{a^2}(-\frac{1}{4}+a^2m^2)} t^{-\frac{2k+1}{2}} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(2r)!}{4^r r!} a^{2r+1} t^{k-r} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{(2k)!} e^{-\frac{t}{a^2}(-\frac{1}{4}+a^2m^2)} t^{-\frac{2k+1}{2}} \sum_{n=0}^{k-1} C_{k-n}(k) \frac{(2(k-n))!}{4^{k-n} (k-n)!} a^{2(k-n)+1} t^n = \\ &= e^{-\frac{t}{a^2}(-\frac{1}{4}+a^2m^2)} t^{-d/2} \sum_{n=0}^{k-1} t^n \tilde{a}_{2n}(D). \end{aligned} \quad (6.11)$$

En la tercera línea, se cambió el índice de la suma por $n = k - r$, y en la última línea, además de volver a poner explícita la dimensión del espacio $d = 2k + 1$, se definieron los coeficientes:

$$\tilde{a}_{2n}(D) \equiv \sqrt{\pi} a^{2(k-n)+1} \frac{(2(k-n))!}{4^{k-n} (k-n)! (2k)!} C_{k-n}(k). \quad (6.12)$$

Observese que en (6.12) no aparecen potencias semienteras de t , o, equivalentemente, los coeficientes del núcleo de calor con índice impar en (2.7) se anulan, así como aquellos con índice mayor a $2(k-1)$, y los únicos presentes en el desarrollo son los definidos en (6.12). El término “masivo” es $\mathcal{M}^2 = m^2 - 1/4a^2$.

Podemos corroborar los resultados obtenidos calculando los primeros dos coeficientes y comparando con lo esperado según (2.5) y (2.6). Es importante notar que estos coeficientes corresponden al operador $D - \mathcal{M}^2$, donde D es el laplaciano en S^d con masa no nula y acoplamiento conforme, dado en (6.1). Entonces:

$$\begin{aligned} D - \mathcal{M}^2 &= \Delta + \xi R + m^2 - \left(m^2 - \frac{1}{4a^2}\right) = \Delta + \frac{d(d-2)}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} = \\ &= \Delta + \frac{(d-1)^2}{4a^2} \equiv \Delta - E. \end{aligned}$$

En la última línea se definió $E \equiv -\frac{(d-1)^2}{4a^2}$, de modo tal que el operador queda escrito en la forma requerida en la ecuación (2.4), y ya puede usarse para calcular los coeficientes, que son:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0(D) &= \text{Vol}(S^{2k+1}) (4\pi)^{-\frac{2k+1}{2}}. \\ \tilde{a}_2(D) &= -\text{Vol}(S^{2k+1}) (4\pi)^{-\frac{2k+1}{2}} \frac{k(k-1)}{3a^2}. \end{aligned}$$

Se tienen los mismos resultados usando las ecuaciones (2.5) y (2.6), o bien poniendo $n = 0$ y $n = 1$ en la expresión (6.12), obtenida del cálculo exacto de la traza del núcleo de calor.

6.1.2 Función Zeta y acción efectiva

Volvemos ahora a calcular la función Zeta, y con ella la acción efectiva para el campo escalar en la esfera S^{2k+1} . Como ocurría en dimensión 3, habrá dos regímenes bien diferenciados, según si $am \rightarrow 0$ o si $am \rightarrow \infty$.

Para usar en el límite UV, partimos de la expresión para la Zeta hallada en (6.7), e introducimos el desarrollo de binomio (3.15), con $x = \frac{\frac{1}{4} - a^2 m^2}{l^2}$, que será válido cuando $a^2 m^2 < \frac{5}{4}$. Entonces, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{2a^{2s}}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \sum_{l=1}^{\infty} l^{2r-2s} \left[1 - \frac{(\frac{1}{4} - a^2 m^2)}{l^2} \right]^{-s} = \\ &= \frac{2a^{2s}}{(2k)! \Gamma(s)} \sum_{r=1}^k C_r(k) \sum_{l=1}^{\infty} l^{2r-2s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+n)}{n!} \left(\frac{1}{4} - a^2 m^2 \right)^n l^{-2n} = \\ &= \frac{2a^{2s}}{(2k)! \Gamma(s)} \sum_{r=1}^k C_r(k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+n)}{n!} \left(\frac{1}{4} - a^2 m^2 \right)^n \zeta_R(2s+2n-2r) = \\ &= \frac{2a^{2s}}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \left\{ \zeta_R(2s-2r) + \frac{s}{\Gamma(s+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s+n)}{n!} \left(\frac{1}{4} - a^2 m^2 \right)^n \zeta_R(2s+2n-2r) \right\} \end{aligned}$$

En la última línea, se extrajo el término con $n = 0$ de la suma, y se utilizó que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. Con todo esto, podemos escribir a la función Zeta en este régimen de la siguiente manera:

$$\zeta(s) = \frac{2a^{2s}}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \zeta_R(2s-2r) + sB^k(s) \quad a^2 m^2 < \frac{5}{4} \quad (6.13)$$

$$\text{donde } B^k(s) = \frac{2a^{2s}}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+n+1)}{(n+1)! \Gamma(s+1)} \left(\frac{1}{4} - a^2 m^2 \right)^{n+1} \zeta_R(2s+2n-2r+2).$$

Inmediatamente podemos notar, de (6.13), que el factor de regularización μ en la acción efectiva será adecuadamente removido en el límite $s \rightarrow 0$, ya que

$$\zeta(0) = \frac{2}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \zeta_R(-2r) = 0,$$

y esto es válido para cualquier valor de k .²

Entonces, la acción efectiva será:

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2} \zeta'(0) = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left[\frac{2a^{2s}}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \zeta_R(2s-2r) \right] \Big|_{s=0} - \frac{1}{2} B^k(0) = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{4}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \zeta'_R(-2r) + B^k(0) \right]. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Respecto a la función auxiliar $B^k(s)$ evaluada en $s = 0$, se tiene que:

$$B^k(0) = \frac{2}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{(n+1)!} \left(\frac{1}{4} - a^2 m^2 \right)^{n+1} \zeta_R(2n-2r+2) =$$

²Se ha probado este resultado para dimensión impar $d = 2k + 1$; ya no será cierto en dimensión par.

$$= \frac{2}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{4} - a^2 m^2 \right)^{n+1} \zeta_R(2[n - (r-1)]) .$$

Luego, observemos que, dentro de la suma en n , el argumento en las funciones Zeta de Riemman es siempre un número entero y par; si dicho número es negativo, entonces ese término se anula y no aparece en la suma. Esto es, si ponemos $N = n - (r - 1)$, entonces será $\zeta_R(2N) = 0$ siempre que $N < 0$, correspondiente a los valores de $n < r - 1$ (puesto que es siempre $r \geq 1$). Por lo tanto, alcanza con sumar sobre $n \geq r - 1$, y resulta que:

$$\begin{aligned} B^k(0) &= \frac{2}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \sum_{n=r-1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{4} - a^2 m^2 \right)^{n+1} \zeta_R(2[n - (r-1)]) = \\ &= \frac{2}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+r} \left(\frac{1}{4} - a^2 m^2 \right)^{j+r} \zeta_R(2j) . \end{aligned}$$

En la última línea, se cambió el índice de la suma por $j = n - (r - 1)$. Llevando este resultado a (6.14) y recurriendo a (3.20) para calcular $\zeta'_R(-2r)$, se tiene que la acción efectiva sobre S^{2k+1} , cuando $a^2 m^2 < \frac{5}{4}$, es:

$$W = \frac{1}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \left\{ \frac{(-1)^{r+1} (2r)!}{(2\pi)^{2r}} \zeta_R(2r+1) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+r} \left(\frac{1}{4} - a^2 m^2 \right)^{n+r} \zeta_R(2n) \right\} . \quad (6.15)$$

Pasamos a calcular la función Zeta en el régimen IR; partimos de la traza del núcleo de calor obtenida en (6.9) y efectuamos una transformada de Mellin (2.9):

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} \left\{ \frac{\sqrt{\pi} e^{-\frac{t}{a^2}(-\frac{1}{4}+a^2 m^2)}}{(2k)!} \left[\sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(2r)!}{4^r r!} \left(\frac{a^2}{t} \right)^{r+\frac{1}{2}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \sum_{r=1}^k C_r(k) (-1)^r \left(\frac{a^2}{t} \right)^{r+\frac{1}{2}} \frac{d^r}{d\alpha^r} \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{\alpha t}} \right] \Big|_{\alpha=1} \right] \right\} . \quad (6.16) \end{aligned}$$

Podemos separar el cálculo en la suma de dos integrales:

$$\begin{aligned} 1. \quad F_1^k(s) &\equiv \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} \frac{\sqrt{\pi} e^{-\frac{t}{a^2}(-\frac{1}{4}+a^2 m^2)}}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(2r)!}{4^r r!} \left(\frac{a^2}{t} \right)^{r+\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s) (2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(2r)!}{4^r r!} a^{2r+1} \int_0^{\infty} dt t^{(s-r-\frac{1}{2})-1} e^{-\frac{t}{a^2}(-\frac{1}{4}+a^2 m^2)} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s) (2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(2r)!}{4^r r!} a^{2r+1} \left(\frac{a^2}{a^2 m^2 - 1/4} \right)^{s-r-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} dt t^{(s-r-\frac{1}{2})-1} e^{-t} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi} a^{2s}}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(2r)!}{4^r r!} \left(a^2 m^2 - \frac{1}{4} \right)^{-s+r+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(s-r-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. F_2^k(s) &\equiv \frac{2}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} \frac{\sqrt{\pi} e^{-\frac{t}{a^2}(-\frac{1}{4}+a^2m^2)}}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) (-1)^r \left(\frac{a^2}{t}\right)^{r+\frac{1}{2}} \frac{d^r}{d\alpha^r} \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n=1}^\infty e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{\alpha t}} \right] \Big|_{\alpha=1} \\
 &= \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) (-1)^r a^{2r+1} \sum_{n=1}^\infty \frac{d^r}{d\alpha^r} \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty dt t^{(s-r-\frac{1}{2})-1} \exp\left\{-\frac{t}{a^2}\beta - \frac{n^2\pi^2 a^2}{\alpha t}\right\} \right] \Big|_{\alpha=1},
 \end{aligned}$$

donde se puso $\beta = a^2m^2 - \frac{1}{4}$, como se había definido en (5.11). La integral en corchetes resulta en funciones Bessel modificadas de segunda especie [16], siempre que $\text{Re } \beta > 0$, así que debe ser $a^2m^2 > \frac{1}{4}$.

Entonces, la función auxiliar queda escrita como:

$$F_2^k(s) = \frac{4a^{2s}}{\Gamma(s)(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(-1)^r \pi^{s-r}}{(\sqrt{\beta})^{s-r-\frac{1}{2}}} \sum_{n=1}^\infty n^{s-r-\frac{1}{2}} \frac{d^r}{d\alpha^r} \left[\alpha^{-\frac{1}{2}(s-r+\frac{1}{2})} K_{s-r-\frac{1}{2}} \left(\frac{2n\pi\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \right) \right] \Big|_{\alpha=1}$$

Vale aquí la misma discusión sobre convergencia del capítulo 5, para las funciones $F_1(s)$ y $F_2(s)$ definidas en el caso de S^3 (corresponde a $k=1$). Ahora tenemos, por un lado, una suma finita de funciones $\Gamma(s-r-\frac{1}{2})$, que son meromorfas, con polos simples en $s-r-\frac{1}{2}=0, -1, \dots$; en particular, en $s=0$ son todas ellas analíticas, por ser $r \in \mathbb{N}$. Por otro lado, en la función $F_2^k(s)$, todas las funciones de Bessel involucradas decaen exponencialmente al aumentar valores de n (de hecho, las funciones $K_\nu(x_n)$ tienen la misma expresión asintótica dominante cuando $x_n \rightarrow \infty$, independientemente de ν), asegurando la convergencia de la serie.

Además, se verifica que $F_1^k(0) = F_2^k(0) = 0$ para todo k , debido al factor $\frac{1}{\Gamma(s)}$ en ambas funciones. Ese mismo factor permite escribirlas como $F_1^k(s) = sG_1^k(s)$ y $F_2^k(s) = sG_2^k(s)$, de modo que la función Zeta para am grande resulta ser:

$$\zeta(s) = s(G_1^k(s) + G_2^k(s)) \quad , \quad a^2m^2 > \frac{1}{4}, \quad (6.17)$$

con las funciones auxiliares

$$G_1^k(s) = \frac{\sqrt{\pi} a^{2s}}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(2r)!}{4^r r!} (\beta)^{-s+r+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(s-r-\frac{1}{2})}{\Gamma(s+1)} \quad (6.18)$$

$$G_2^k(s) = \frac{4a^{2s}}{\Gamma(s+1)(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(-1)^r \pi^{s-r}}{(\sqrt{\beta})^{s-r-\frac{1}{2}}} \sum_{n=1}^\infty n^{s-r-\frac{1}{2}} \frac{d^r}{d\alpha^r} \left[\alpha^{-\frac{1}{2}(s-r+\frac{1}{2})} K_{s-r-\frac{1}{2}} \left(\frac{2n\pi\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \right) \right] \Big|_{\alpha=1}. \quad (6.19)$$

Llevamos estos resultados a (2.12) para calcular la acción efectiva:

$$W = -\frac{1}{2}\zeta'(0) = -\frac{1}{2}(G_1^k(0) + G_2^k(0)), \quad (6.20)$$

donde, evaluando (6.18) en $s=0$, se tiene

$$G_1^k(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(2r)!}{4^r r!} (\beta)^{r+\frac{1}{2}} \Gamma\left(-r-\frac{1}{2}\right),$$

y luego, usando [17] que $\Gamma(-r-\frac{1}{2}) = -\frac{\Gamma(-r+\frac{1}{2})}{r+\frac{1}{2}}$ y $\Gamma(-r+\frac{1}{2}) = \frac{(-1)^r \sqrt{\pi} 2^{2r} r!}{(2r)!}$, es

$$G_1^k(0) = \frac{\pi}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(-1)^{r+1}}{r + \frac{1}{2}} (\beta)^{r+\frac{1}{2}}. \quad (6.21)$$

Lo mismo hacemos con la función $G_2^k(s)$ en (6.19), que evaluada en $s = 0$ da:

$$\begin{aligned} G_2^k(0) &= \frac{4}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(-1)^r \pi^{-r}}{(\sqrt{\beta})^{-r-\frac{1}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-r-\frac{1}{2}} \frac{d^r}{d\alpha^r} \left[\alpha^{-\frac{1}{2}(-r+\frac{1}{2})} K_{-r-\frac{1}{2}} \left(\frac{2n\pi\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \right) \right] \Big|_{\alpha=1} = \\ &= \frac{4}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) (-1)^r \frac{\beta^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}{\pi^r} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-r-\frac{1}{2}} \frac{d^r}{d\alpha^r} \left[\alpha^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} K_{-r-\frac{1}{2}} \left(\frac{2n\pi\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \right) \right] \Big|_{\alpha=1}. \end{aligned}$$

Si introducimos la expresión exacta de las funciones de Bessel [16]

$$K_{-r-\frac{1}{2}}(z) = K_{r+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{l=0}^r \frac{(r+l)!}{l!(r-l)!} (2z)^{-l},$$

entonces resulta que:

$$G_2^k(0) = \frac{2}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) (-1)^r \frac{\beta^{\frac{r}{2}}}{(2\pi)^r} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-r-1} \sum_{l=0}^r \frac{(r+l)!}{l!(r-l)!(2n\pi\sqrt{\beta})^l} \frac{d^r}{d\alpha^r} \left[\alpha^{\frac{r+l}{2}} e^{-\frac{2n\pi\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}} \right] \Big|_{\alpha=1}. \quad (6.22)$$

Finalmente, llevando (6.21) y (6.22) a (6.20), se tiene que la acción efectiva para el campo escalar masivo con acoplamiento conforme sobre S^{2k+1} , cuando $a^2 m^2 > \frac{1}{4}$, es:

$$\begin{aligned} W &= -\frac{\pi}{2(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(-1)^{r+1}}{r + \frac{1}{2}} (\beta)^{r+\frac{1}{2}} - \\ &- \frac{1}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) (-1)^r \frac{\beta^{\frac{r}{2}}}{(2\pi)^r} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-r-1} \sum_{l=0}^r \frac{(r+l)!}{l!(r-l)!(2n\pi\sqrt{\beta})^l} \frac{d^r}{d\alpha^r} \left[\alpha^{\frac{r+l}{2}} e^{-\frac{2n\pi\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}} \right] \Big|_{\alpha=1}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

6.2 Espacio hiperbólico H^d

De [18] tenemos que el laplaciano mínimo Δ definido sobre H^d ($d > 1$) presenta un espectro continuo de autovalores positivos, dados por

$$\lambda(\tilde{k}) = \frac{\tilde{k}^2 + \left(\frac{d-1}{2}\right)}{a^2} \quad \tilde{k} \geq 0,$$

cuya densidad de estados es

$$\mu(\tilde{k}) = \frac{\pi}{[2^{d-2}\Gamma(\frac{d}{2})]^2} \left| \frac{\Gamma(i\tilde{k} + \frac{d-1}{2})}{\Gamma(i\tilde{k})} \right|^2.$$

Aquí, a es el equivalente al radio en la esfera. Respecto al escalar de curvatura, tal como ya vimos en dimensión 3, es:

$$R|_{H^d} = -R|_{S^d} = -\frac{d(d-1)}{a^2}. \quad (6.24)$$

Entonces, los autovalores para el laplaciano conforme y masivo D son:

$$\begin{aligned} \Lambda(\tilde{k}) &= \left(\lambda(\tilde{k}) + \xi R|_{H^d} + m^2 \right) = \frac{1}{a^2} \left[\tilde{k}^2 + \left(\frac{d-1}{2} \right)^2 - \frac{d(d-2)}{4} + a^2 m^2 \right] = \\ &= \frac{1}{a^2} \left(\tilde{k}^2 + \frac{1}{4} + a^2 m^2 \right). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Es interesante notar que los autovalores del operador D no dependen de la dimensión del espacio hiperbólico en cuestión. Distinto será el caso de la densidad de estados; si en particular consideramos dimensión impar $d = 2k + 1$, $k = 1, 2, \dots$, se tiene :

$$\mu(\tilde{k}) = \frac{\pi}{[2^{2k-1} \Gamma(k + \frac{1}{2})]^2} \left| \frac{\Gamma(i\tilde{k} + k)}{\Gamma(i\tilde{k})} \right|^2,$$

y usando la definición [17] del símbolo de Pochhammer (que no es otra cosa que aplicar reiteradas veces propiedades de la función gamma)

$$\frac{\Gamma(i\tilde{k} + k)}{\Gamma(i\tilde{k})} = (i\tilde{k})_k = i\tilde{k} (i\tilde{k} + 1) \dots (i\tilde{k} + k - 1),$$

entonces la densidad de estados en dimensión impar queda escrita como:

$$\begin{aligned} \mu(\tilde{k}) &= \frac{\pi}{[2^{2k-1} \Gamma(k + \frac{1}{2})]^2} \left| (i\tilde{k})_k \right|^2 = \frac{\pi}{[2^{2k-1} \Gamma(k + \frac{1}{2})]^2} \left| i\tilde{k} \right|^2 \left| i\tilde{k} + 1 \right|^2 \dots \left| i\tilde{k} + k - 1 \right|^2 = \\ &= \frac{\pi}{[2^{2k-1} \Gamma(k + \frac{1}{2})]^2} \tilde{k}^2 (\tilde{k}^2 + 1) (\tilde{k}^2 + 4) \dots (\tilde{k}^2 + (k-1)^2). \end{aligned} \quad (6.26)$$

En lo sucesivo, calcularemos la acción efectiva para el campo escalar masivo con acoplamiento conforme, mediante regularización con función Zeta, para lo cual primero se obtendrá la traza del núcleo de calor (definida adecuadamente para utilizar en espacio no compacto), y luego la función Zeta vendrá dada por la transformada de Mellin de la traza.

6.2.1 Traza del núcleo de calor - Comparación con S^{2k+1}

Usamos (6.25) y (6.26) en (2.13) para calcular la traza del núcleo de calor en H^{2k+1} :

$$\begin{aligned} K(t; 0) &= \frac{2^{2k-2} \Gamma(k + \frac{1}{2})}{a^{2k+1} \pi^{k+\frac{3}{2}}} \int_0^\infty d\tilde{k} \frac{\pi}{[2^{2k-1} \Gamma(k + \frac{1}{2})]^2} \left| (i\tilde{k})_k \right|^2 e^{-\frac{t}{a^2} (\tilde{k}^2 + \frac{1}{4} + a^2 m^2)} = \\ &= \frac{e^{-\frac{t}{a^2} (\frac{1}{4} + a^2 m^2)}}{2^{2k} \pi^{k+\frac{1}{2}} a^{2k+1} \Gamma(k + \frac{1}{2})} \int_0^\infty d\tilde{k} \tilde{k}^2 (\tilde{k}^2 + 1) (\tilde{k}^2 + 4) \dots (\tilde{k}^2 + (k-1)^2) e^{-\frac{t}{a^2} \tilde{k}^2}. \end{aligned}$$

Podemos distribuir el producto de binomios en la integral para obtener un polinomio par en \tilde{k} , de la forma:

$$\prod_{n=0}^{k-1} (\tilde{k}^2 + n^2) = \sum_{r=1}^k \tilde{C}_r(k) \tilde{k}^{2r},$$

y, entonces, la traza queda escrita como:

$$\begin{aligned} K(t; 0) &= \frac{e^{-\frac{t}{a^2}(\frac{1}{4}+a^2m^2)}}{2^{2k}\pi^{k+\frac{1}{2}}a^{2k+1}\Gamma(k+\frac{1}{2})} \int_0^\infty d\tilde{k} \sum_{r=1}^k \tilde{C}_r(k) \tilde{k}^{2r} e^{-\frac{t}{a^2}\tilde{k}^2} = \\ &= \frac{e^{-\frac{t}{a^2}(\frac{1}{4}+a^2m^2)}}{2^{2k}\pi^{k+\frac{1}{2}}a^{2k+1}\Gamma(k+\frac{1}{2})} \sum_{r=1}^k \tilde{C}_r(k) \frac{\sqrt{\pi}(2r-1)!!}{2^{r+1}} \left(\frac{a^2}{t}\right)^{r+\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{e^{-\frac{t}{a^2}(\frac{1}{4}+a^2m^2)}}{2^{2k}\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(k+1)} \frac{\pi}{\left(\frac{2\pi^{k+1}a^{2k+1}}{\Gamma(k+1)}\right)} \sum_{r=1}^k \tilde{C}_r(k) \frac{(2r)!}{4^r r!} \left(\frac{a^2}{t}\right)^{r+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En la última línea, se usó la identidad $(2r-1)!! = \frac{(2r)!}{2^r r!}$ dentro de la suma, y, en el factor que multiplica por delante, se reordenaron los términos de manera tal que se puede reconocer, en el denominador, al volumen de la esfera de dimensión $d = 2k+1$:

$$\text{Vol}(S^{2k+1}) \equiv \frac{2\pi^{k+1}a^{2k+1}}{\Gamma(k+1)}. \quad (6.27)$$

Finalmente, poniendo que [17] $\Gamma(k+\frac{1}{2}) = \frac{(2k)!\sqrt{\pi}}{2^{2k}k!}$, y con $\Gamma(k+1) = k!$, se llega a la expresión final para la traza del núcleo de calor sobre el espacio hiperbólico H^{2k+1} , que es:

$$K(t; 0) = \frac{1}{\text{Vol}(S^{2k+1})} \frac{\sqrt{\pi}}{(2k)!} e^{-\frac{t}{a^2}(\frac{1}{4}+a^2m^2)} \sum_{r=1}^k \tilde{C}_r(k) \frac{(2r)!}{4^r r!} \left(\frac{a^2}{t}\right)^{r+\frac{1}{2}}. \quad (6.28)$$

Este resultado es válido para todo $t > 0$. Podemos comparar, tal como hicimos en dimensión 3, con la traza del núcleo de calor en S^{2k+1} a “tiempos” pequeños, dada en (6.10).

Notemos primero que, en la traza del espacio hiperbólico, aparece un factor de volumen (necesario debido al carácter no compacto de la variedad), que es exactamente el volumen de la esfera; si definiéramos una traza por unidad de volumen para S^{2k+1} , tendríamos que dividir (6.10) por ese mismo factor. Analicemos entonces qué pasa con la función (6.28), si hacemos la extensión analítica en el radio $a \rightarrow ia$:

- Por un lado, en el factor de volumen,

$$\text{Vol}(S^{2k+1}) = \frac{2\pi^{k+1}a^{2k+1}}{\Gamma(k+1)} \xrightarrow{a \rightarrow ia} \frac{2\pi^{k+1}a^{2k+1}i^{2k+1}}{\Gamma(k+1)} = i^{2k+1}\text{Vol}(S^{2k+1})$$

- Luego, en la traza del núcleo de calor, usando también que $i^{2n+1} = i^{2n}i = (-1)^n i$, se obtiene que

$$\begin{aligned} K(t; 0)|_{a \rightarrow ia} &= \frac{-i(-1)^k}{\text{Vol}(S^{2k+1})} \frac{\sqrt{\pi}}{(2k)!} e^{\frac{t}{a^2}(\frac{1}{4}-a^2m^2)} \sum_{r=1}^k \tilde{C}_r(k) \frac{(2r)!}{4^r r!} i^{2r+1} \left(\frac{a^2}{t}\right)^{r+\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{\text{Vol}(S^{2k+1})} \frac{\sqrt{\pi}}{(2k)!} e^{-\frac{t}{a^2}(-\frac{1}{4}+a^2m^2)} \sum_{r=1}^k \tilde{C}_r(k) (-1)^{r+k} \frac{(2r)!}{4^r r!} \left(\frac{a^2}{t}\right)^{r+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (6.29)$$

Los coeficientes $\tilde{C}_r(k)$ pueden relacionarse con los utilizados en el caso de la esfera, según la ecuación (C.4) obtenida en el Apéndice, por lo que es $\tilde{C}_r(k) (-1)^{r+k} = C_r(k)$.

Verificamos entonces que, mediante el cambio $a \rightarrow ia$, obtenemos, a partir de la traza en espacio hiperbólico (6.28), el mismo resultado para la traza del núcleo de calor (calculada por unidad de volumen) en espacio esférico (6.10), si se consideran “tiempos” de difusión pequeños, y este resultado vale en dimensión impar arbitraria. Nuevamente, los efectos de las distintas topologías de los espacios se hacen presente al considerar “tiempos” de difusión cada vez más grandes: hay cada vez más términos relevantes en la traza en S^{2k+1} según la ecuación (6.9), que ya no pueden recuperarse de la calculada en H^{2k+1} .

6.2.2 Función Zeta y acción efectiva

Para la función Zeta, partimos de la traza del núcleo de calor (6.28) y aplicamos la transformada de Mellin (2.14):

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} \left[\frac{1}{\text{Vol}(S^{2k+1})} \frac{\sqrt{\pi}}{(2k)!} e^{-\frac{t}{a^2}(\frac{1}{4}+a^2m^2)} \sum_{r=1}^k \tilde{C}_r(k) \frac{(2r)!}{4^r r!} \left(\frac{a^2}{t}\right)^{r+\frac{1}{2}} \right] = \\ &= \frac{1}{\text{Vol}(S^{2k+1})} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)(2k)!} \sum_{r=1}^k \tilde{C}_r(k) \frac{(2r)!}{4^r r!} a^{2r+1} \int_0^\infty dt t^{(s-r-\frac{1}{2})-1} e^{-\frac{t}{a^2}(\frac{1}{4}+a^2m^2)} = \\ &= \frac{s}{\text{Vol}(S^{2k+1})} \frac{\sqrt{\pi} a^{2s}}{(2k)!} \sum_{r=1}^k \tilde{C}_r(k) \frac{(2r)!}{4^r r!} \left(a^2 m^2 + \frac{1}{4}\right)^{-s+r+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(s-r-\frac{1}{2})}{\Gamma(s+1)}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

El cálculo es muy similar al realizado en la sección anterior para la función Zeta en la esfera (en particular, para obtener la función auxiliar $F_1^k(s)$), por eso se omitieron algunos pasos. Se obtiene una función analítica en $s \in \mathbb{C}$, con polos simples en $s-r-\frac{1}{2} = 0, -1, \dots$, y que se anula en $s = 0$.

Entonces, la acción efectiva resulta ser:

$$W = -\frac{1}{2} \zeta'(0) = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\text{Vol}(S^{2k+1})} \frac{\sqrt{\pi}}{(2k)!} \sum_{r=1}^k \tilde{C}_r(k) \frac{(2r)!}{4^r r!} \left(a^2 m^2 + \frac{1}{4}\right)^{r+\frac{1}{2}} \Gamma\left(-r-\frac{1}{2}\right) \right].$$

Usando, como en la sección anterior, que $\Gamma\left(-r-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^{r+1} \sqrt{\pi} 2^{2r} r!}{(r+\frac{1}{2})(2r)!}$, se obtiene la expresión final para la acción efectiva del campo escalar libre, masivo y con acoplamiento conforme sobre el espacio hiperbólico de dimensión impar H^{2k+1} , que es:

$$W = -\frac{1}{\text{Vol}(S^{2k+1})} \frac{\pi}{2(2k)!} \sum_{r=1}^k \tilde{C}_r(k) \frac{(-1)^{r+1}}{r+\frac{1}{2}} \left(a^2 m^2 + \frac{1}{4}\right)^{r+\frac{1}{2}}. \quad (6.31)$$

6.3 Comparación en el límite UV e IR

Resumiendo los resultados obtenidos para la acción efectiva del campo escalar masivo con acoplamiento conforme, en espacios esféricos e hiperbólicos de dimensión impar arbitraria, se tiene que:

En S^{2k+1} :

$$W_{S^{2k+1}} = \begin{cases} \frac{1}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \left\{ \frac{(-1)^{r+1} (2r)!}{(2\pi)^{2r}} \zeta_R(2r+1) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+r} \left(\frac{1}{4} - a^2 m^2 \right)^{n+r} \zeta_R(2n) \right\} & a^2 m^2 < \frac{5}{4} \\ -\frac{\pi}{2(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(-1)^{r+1}}{r + \frac{1}{2}} (\beta)^{r+\frac{1}{2}} - \\ -\frac{1}{(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) (-1)^r \frac{\beta^{\frac{r}{2}}}{(2\pi)^r} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-r-1} \sum_{l=0}^r \frac{(r+l)!}{l!(r-l)! (2n\pi\sqrt{\beta})^l} \frac{d^r}{d\alpha^r} \left[\alpha^{\frac{r+l}{2}} e^{-\frac{2n\pi\sqrt{\beta}}{\alpha}} \right] \Big|_{\alpha=1} & a^2 m^2 > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Usamos en la expresión para am grandes que $\beta = a^2 m^2 - \frac{1}{4}$, como se definió antes. Para am chicos, podemos evaluar la suma infinita en n en términos de funciones Zeta de Huwitz, como se hizo en la sección 5.4 para dimensión 3, definiendo $\rho = \sqrt{\frac{1}{4} - a^2 m^2}$ y restringiendo a $a^2 m^2 \leq \frac{1}{4}$. Así, se obtiene que:

$$W_{S^{2k+1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} \sum_{r=1}^k (-1)^r \tilde{C}_r(k) \sum_{j=0}^{2r} \binom{2r}{j} \left[\zeta'_H(-j, 1-\rho) + (-1)^j \zeta'_H(-j, 1+\rho) \right] \rho^{2r-j}, \quad a^2 m^2 \leq \frac{1}{4},$$

donde $C_r(k) = (-1)^{k+r} \tilde{C}_r(k)$.

En H^{2k+1} :

$$w_{H^3} = -\frac{1}{\text{Vol}(S^{2k+1})} \frac{\pi}{2(2k)!} \sum_{r=1}^k \tilde{C}_r(k) \frac{(-1)^{r+1}}{r + \frac{1}{2}} \left(a^2 m^2 + \frac{1}{4} \right)^{r+\frac{1}{2}}.$$

Tal como se hizo en el capítulo anterior, se llama w a la acción efectiva por unidad de volumen del espacio en cuestión. Pasamos entonces a analizar los límites:

- El límite UV resulta convergente, y es:

En S^{2k+1} :

$$\lim_{am \rightarrow 0} W_{S^{2k+1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} \sum_{r=1}^k (-1)^r \tilde{C}_r(k) \sum_{j=0}^{2r} \binom{2r}{j} \left[\zeta'_H\left(-j, \frac{1}{2}\right) + (-1)^j \zeta'_H\left(-j, \frac{3}{2}\right) \right] \left(\frac{1}{2} \right)^{2r-j}. \quad (6.32)$$

En H^{2k+1} :

$$\lim_{am \rightarrow 0} w_{H^{2k+1}} = -\frac{1}{\text{Vol}(S^{2k+1})} \frac{\pi}{2(2k)!} \sum_{r=1}^k \tilde{C}_r(k) \frac{(-1)^{r+1}}{\left(r + \frac{1}{2}\right) 4^{r+\frac{1}{2}}} \quad (6.33)$$

Puede verse que se recuperan los resultados en dimensión 3 poniendo $k = 1$ en las expresiones anteriores. Lo mismo que ocurría en ese caso se verifica para cualquier dimensión impar: las acciones efectivas en el límite UV son muy distintas y no pueden relacionarse mediante la transformación $a \rightarrow ia$.

- El límite IR presenta las siguientes expresiones asintóticas:

En S^{2k+1} , las potencias dominantes son:

$$W_{S^{2k+1}} \approx -\frac{\pi}{2(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(-1)^{r+1}}{r + \frac{1}{2}} \left(a^2 m^2 - \frac{1}{4} \right)^{r+\frac{1}{2}} \quad (6.34)$$

En H^{2k+1} :

$$w_{H^{2k+1}} = -\frac{1}{\text{Vol}(S^{2k+1})} \frac{\pi}{2(2k)!} \sum_{r=1}^k \tilde{C}_r(k) \frac{(-1)^{r+1}}{r + \frac{1}{2}} \left(a^2 m^2 + \frac{1}{4}\right)^{r+\frac{1}{2}} \quad (6.35)$$

Si consideramos en S^{2k+1} la acción efectiva por unidad de volumen, se tiene que:

$$w_{S^{2k+1}} \approx -\frac{1}{\text{Vol}(S^{2k+1})} \frac{\pi}{2(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(-1)^{r+1}}{r + \frac{1}{2}} \left(a^2 m^2 - \frac{1}{4}\right)^{r+\frac{1}{2}} \quad (6.36)$$

Notemos que los coeficientes involucrados en las sumatorias de (6.35) y (6.36) están relacionados, de acuerdo a (C.4), como $C_r(k) = (-1)^{r+k} \tilde{C}_r(k)$. Entonces, en términos de los $C_r(k)$, la acción efectiva para el espacio hiperbólico es:

$$\begin{aligned} w_{H^{2k+1}} &= -\frac{1}{\text{Vol}(S^{2k+1})} \frac{\pi}{2(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(-1)^{k+1}}{r + \frac{1}{2}} \left(a^2 m^2 + \frac{1}{4}\right)^{r+\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{\text{Vol}(S^{2k+1})} \frac{\pi}{2(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(-1)^{k+1}}{r + \frac{1}{2}} a^{2r+1} \left(m^2 + \frac{1}{4a^2}\right)^{r+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Si hacemos el cambio $a \rightarrow ia$ en la expresión (6.37), hay varios términos que son afectados:

$$\frac{1}{4a^2} \rightarrow -\frac{1}{4a^2},$$

$$a^{2r+1} \rightarrow i^{2r+1} a^{2r+1} = (-1)^r i a^{2r+1},$$

$$\text{Vol}(S^{2k+1}) \rightarrow i^{2k+1} \text{Vol}(S^{2k+1}) = (-1)^k i \text{Vol}(S^{2k+1}).$$

Llevando todo esto a la ecuación (6.37), se tiene que:

$$\begin{aligned} w_{H^{2k+1}} \xrightarrow{a \rightarrow ia} & -\frac{1}{(-1)^k i \text{Vol}(S^{2k+1})} \frac{\pi}{2(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(-1)^{k+1}}{r + \frac{1}{2}} (-1)^r i a^{2r+1} \left(m^2 - \frac{1}{4a^2}\right)^{r+\frac{1}{2}} = \\ & = -\frac{1}{\text{Vol}(S^{2k+1})} \frac{\pi}{2(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(-1)^{r+1}}{r + \frac{1}{2}} \left(a^2 m^2 - \frac{1}{4}\right)^{r+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Comparando con el resultado (6.36), encontramos que la acción efectiva por unidad de volumen en espacio hiperbólico es el mismo que se obtiene haciendo una extensión analítica a radio imaginario en espacio esférico, y viceversa. Este resultado, que ya se había hallado antes en dimensión 3, se verifica también para cualquier otra dimensión impar, siempre que se esté trabajando en el límite IR.

Podemos verificar también que se recupera el resultado en el espacio chato \mathbb{R}^{2k+1} , si consideramos que a crece más rápido que $1/m$, en el límite IR. Conviene en ese caso escribir explícito el volumen $\text{Vol}(S^{2k+1})$ como se definió en (6.27), y entonces la forma asintótica de la acción efectiva por unidad de volumen en S^{2k+1} es:

$$\begin{aligned} w_{S^{2k+1}} &\approx -\frac{k!}{2\pi^{k+1} a^{2k+1}} \frac{\pi}{2(2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(-1)^{r+1}}{r + \frac{1}{2}} \left(a^2 m^2 - \frac{1}{4}\right)^{r+\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{k!}{4\pi^k (2k)!} \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{(-1)^r}{r + \frac{1}{2}} a^{2(r-k)} \left(m^2 - \frac{1}{4a^2}\right)^{r+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Observemos que todas las potencias de a presentes son negativas: siendo $1 \leq r \leq k$, el exponente $2(r - k)$ es siempre negativo, o cero (cuando $r = k$), y en el factor entre paréntesis, que es elevado a potencias positivas, el único término relativo al radio es de la forma a^{-2} . Entonces, al tomar el límite $a \rightarrow \infty$, todos los términos con potencias negativas del radio tienden a cero, y sólo queda el de a^0 , correspondiente a $r = k$.

Por lo tanto, y usando que $C_k(k) = 1$ para todo k (ver Apéndice C), se tiene que:

$$\begin{aligned} w_{S^{2k+1}} &\xrightarrow{a \rightarrow \infty} \frac{k!}{4\pi^k (2k)!} \frac{(-1)^k}{k + \frac{1}{2}} m^{2k+1} = (-1)^k \frac{k!}{2\pi^k (2k)!} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{2k+2}{2k+2} \right) m^{2k+1} = \\ &= (-1)^k \frac{k! 2(k+1)}{2\pi^k (2k+2)!} m^{2k+1} = (-1)^k \frac{(k+1)!}{\pi^k (2k+2)!} m^{2k+1}. \end{aligned}$$

El resultado obtenido es igual al calculado en el espacio chato, dado en (A.1), considerado por unidad de volumen.

Lo mismo puede hacerse con la acción efectiva en espacio hiperbólico, el cálculo es muy similar. Partiendo de la ecuación (6.37) y poniendo explícito el volumen de S^{2k+1} , se obtiene:

$$w_{H^{2k+1}} = \frac{k!}{4\pi^k (2k)!} (-1)^k \sum_{r=1}^k C_r(k) \frac{a^{2(r-k)}}{r + \frac{1}{2}} \left(m^2 + \frac{1}{4a^2} \right)^{r + \frac{1}{2}},$$

y luego valen los mismos argumentos dados en el caso de la esfera; en el límite de a muy grande, y mayor que $1/m$, en el factor entre paréntesis es dominante el término m^2 , y en la sumatoria sobre r lo es la potencia correspondiente a $r = k$. La expresión final es la misma que en S^{2k+1} y \mathbb{R}^{2k+1} .

7 | Conclusiones

En este trabajo hemos realizado un estudio de las acciones efectivas de teorías escalares sobre variedades máximamente simétricas de dimensión impar arbitraria, vía regularización zeta, con acoplamiento conforme a la métrica. Nos hemos concentrado en dimensiones impares, en virtud de la reciente búsqueda de funciones C en tales dimensiones, donde no existe anomalía conforme y, por lo tanto, no es posible extender de manera directa los conocimientos válidos [2] en dimensiones pares. Nos hemos interesado en el cálculo de acciones efectivas a un loop en virtud de la conjetura de Klebanov y coautores [5], según la cual la parte finita de la acción efectiva a un loop sobre S^3 sería esa tal función C en tres dimensiones. Además, hemos analizado si es posible, a partir de los resultados en S^{2k+1} , reproducir la acción efectiva de la misma teoría en H^{2k+1} .

De nuestro estudio analítico para campos escalares masivos hemos concluido:

1. Debido al carácter no compacto de H^{2k+1} , la traza del núcleo de calor es divergente, según el “volumen infinito” del espacio. Dicho volumen se puede factorizar, permitiendo obtener cantidades *por unidad de volumen* bien definidas.
2. En todos los casos, la regularización Zeta elimina las divergencias UV; sin embargo, aparecen divergencias IR que requieren renormalización.
3. Tales divergencias son debidas a una suma finita de potencias de am , cuyos coeficientes se relacionan con aquellos del desarrollo asintótico del núcleo de calor, y son potencias fraccionarias de $(am)^2$ en \mathbb{R}^{2k+1} , de $(am)^2 + \frac{1}{4}$ en H^{2k+1} , y de $(am)^2 - \frac{1}{4}$ en S^{2k+1} , siendo las dominantes de orden $\frac{2k+1}{2}$. En los casos de espacios curvos, deberían tomarse teorías conformes en una dimensión más para que las divergencias correspondieran exactamente con las del espacio chato.
4. Las expresiones asintóticas en IR (cuando se calculan por unidad de volumen) de S^{2k+1} y H^{2k+1} se obtienen fácilmente una de la otra mediante extensión analítica a “radio imaginario”, $a \rightarrow ia$, y esto es así debido a que lo mismo ocurre con los desarrollos asintóticos del núcleo de calor (por u. de volumen) en ambos casos. Fuera del régimen $am \gg 1$ esto ya no ocurre: el núcleo de calor en S^{2k+1} recibe las “contribuciones topológicas” de la variedad compacta, que se hacen más importantes cuanto menor es la masa del campo, y los resultados difieren significativamente respecto a H^{2k+1} .
5. En virtud de las divergencias IR ya mencionadas, el enunciado del Teorema F como $F_{UV} > F_{IR}$ carece de sentido. Tales divergencias no pueden sustraerse completas en S^{2k+1} , ya que hacerlo conduciría a una acción efectiva compleja, rompiéndose así la unitariedad. Se propuso en S^3 sustraer los términos dominantes divergentes, pero eso conduce a una función no siempre positiva (no es una función C). Por otra parte, no es cierto que la acción efectiva

sea positiva en el límite UV para cualquier dimensión impar (ver, por ej, en la ecuación (6.32), el signo lo determina el factor $(-1)^{k+1}$). Los autores de [6] han propuesto como posible función C en S^{2k+1} a $(-1)^{k+1} W_{S^{2k+1}}$, que presenta el comportamiento adecuado en UV, pero, tal como ocurre en dimensión 3, no es siempre positiva al restar los términos divergentes dominantes.

6. En S^3 , hemos propuesto una nueva función “renormalizada”, dada por

$$\tilde{W}_{S^3} = W_{S^3} - \frac{1}{3}\rho \frac{d}{d\rho} W_{S^3} = W_{S^3} - \frac{\pi}{6}\rho^3 \cot(\pi\rho),$$

donde $\rho = \sqrt{a^2 m^2 - \frac{1}{4}}$. Esta función se anula en el IR y coincide con la acción efectiva en el UV (es positiva en este punto fijo). Además, es monótonamente decreciente frente al flujo del RG. Es decir, se comporta como una función C en el sentido de las dos primeras condiciones mencionadas en la Introducción, aunque su derivada con respecto a la constante de acoplamiento no se anula en el punto fijo UV.

7. Las correspondientes funciones \tilde{W} para H^3 y \mathbb{R}^3 se anulan idénticamente. Por lo tanto, la función \tilde{W} es claramente una medida de los efectos de tamaño finito de la variedad, alrededor de la cual “se enroscan” más veces las partículas escalares cuanto menor es su masa.

Se puede extender la definición de \tilde{W} a dimensión impar arbitraria en la esfera, de manera que sea una buena función C en el sentido de las primeras dos condiciones. Dicha función es:

$$\tilde{W}_{S^{2k+1}} = (-1)^{k+1} W_{S^{2k+1}} + \frac{\pi}{(2k)!} \sum_{l=1}^k (-1)^l \frac{\tilde{C}_l}{(2l+1)} \rho^{2l+1} \cot(\pi\rho).$$

Un problema de interés a futuro será la aplicación de estas ideas a teorías en interacción, donde existen otros puntos fijos distintos del UV e IR.

Apéndices

A | Campo escalar masivo en espacio chato euclídeo

Sea el espacio chato euclídeo \mathbb{R}^N . Es no compacto, así que el problema de autovalores no estará bien definido, por la aparición de modos no normalizables, y un volumen no acotado.

Entonces, resolvemos en una región $M \subset \mathbb{R}^N$ de volumen finito $\text{Vol}(M) = V$, como puede ser una caja de lado L , donde será $V = L^N$.

Dado el operador diferencial, de tipo Laplace, definido sobre funciones escalares $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$D = \Delta + \frac{R}{8} + m^2 \quad \Delta \equiv -\delta^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu = -\nabla^2$$

El escalar de curvatura en espacio chato es $R = 0$, así como los símbolos de Christoffel, por lo que $\nabla_\mu = \partial_\mu$ y ∇^2 será el laplaciano euclídeo usual. Habrá que añadir condiciones de contorno, pero se sabe que dicha elección no será relevante cuando pasemos a considerar volúmenes muy grandes. En particular, supongamos condiciones Dirichlet homogéneas. Entonces, el problema de autovalores de D en el espacio chato es:

$$Du = \lambda u \quad , \quad u(x)|_{\partial M} = 0$$

Trabajando en coordenadas cartesianas, se obtiene un espectro discreto de autovalores positivos, de la forma $\lambda_n = k_n^2 + m^2$, y autofunciones $u_n(x) = A_n \sin(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x})$, donde escribimos $\mathbf{k}_n = (k_{1;n}, \dots, k_{N;n})$, y $k_n^2 = \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{k}_n$. Tras aplicar las condiciones de borde, cada componente del número de onda queda cuantizado, de modo que serán $k_{i;n} \propto \frac{n_i}{L}$, $n_i \in \mathbb{N}$.

Al hacer el límite de volumen grande mediante $L \rightarrow \infty$, la separación entre autovalores se hace infinitesimal, y el espectro pasa a ser continuo. Cuando quiera calcularse la traza del núcleo de calor, o la función Zeta del operador, habrá que sumar sobre los autovalores, y resulta que:

$$\sum_{n_i=0}^{\infty} \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_i$$

y esto por cada parámetro n_i , que son tantos como la dimensión del espacio. Por lo tanto, será:

$$\sum_{n_1, n_2, \dots, n_N} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^N} \int_{-\infty}^{+\infty} d^N k$$

Los autovalores ahora se escriben en función de los k_i , y de una forma sencilla, pues va con la norma del N-vector \mathbf{k} :

$$\lambda(k) = k^2 + m^2 = \sum_{i=1}^N k_i^2 + m^2$$

Entonces, tenemos finalmente autoestados con autovalores $\lambda(k)$ y degeneración $\frac{V}{(2\pi)^N}$. Podemos notar en este punto que las degeneraciones son proporcionales al volumen de \mathbb{R}^N , que diverge al hacer $L \rightarrow \infty$, pero aparecerá siempre factorizado. Una forma de regularizar todos los cálculos que involucren sumar sobre los autovalores es dividiendo por ese factor de volumen, para quedarse con la parte finita del resultado.

Podemos reescribir lo obtenido anteriormente, pasando a coordenadas hiperesféricas en la integral en $d^N k$, y entonces, como los autovalores sólo dependen de la parte radial, ya puede realizarse la integración en la parte angular, y obtenemos así una densidad de estados para cada k :

$$\begin{aligned} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N} &\rightarrow \frac{V}{(2\pi)^N} \int_0^\infty dk k^{N-1} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} d\Omega_{N-1} = \frac{V}{(2\pi)^N} \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2})} \int_0^\infty dk k^{N-1} \\ &= V \left(\frac{1}{2^{N-1} \pi^{\frac{N}{2}} \Gamma(\frac{N}{2})} \right) \int_0^\infty dk k^{N-1} = V \left(\frac{2^{N-3} \Gamma(\frac{N}{2})}{\pi^{1+\frac{N}{2}}} \right) \left(\frac{\pi}{2^{2N-4} \Gamma(\frac{N}{2})^2} \right) \int_0^\infty dk k^{N-1} \\ &= V \frac{c_N}{\Omega_{N-1}} \int_0^\infty dk \mu_0(k) \end{aligned}$$

donde es

$$\mu_0(k) = \frac{\pi}{[2^{2N-2} \Gamma(\frac{N}{2})]^2} k^{N-1}$$

Con esto, la traza del núcleo de calor (manteniendo el factor de volumen) se calcula como:

$$\begin{aligned} K(t) &= \text{Tr}(e^{-tD}) = V \frac{c_N}{\Omega_{N-1}} \int_0^\infty dk \mu_0(k) e^{-t\lambda(k)} \\ &= V \frac{1}{2^{N-1} \pi^{\frac{N}{2}} \Gamma(\frac{N}{2})} \int_0^\infty dk k^{N-1} e^{-t(k^2+m^2)} = V e^{-tm^2} \frac{1}{2^{N-1} \pi^{\frac{N}{2}} \Gamma(\frac{N}{2})} \int_0^\infty dk k^{N-1} e^{-tk^2} \\ &= V e^{-tm^2} \frac{1}{2^N \pi^{\frac{N}{2}} t^{\frac{N}{2}}} = V (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} e^{-tm^2} \end{aligned}$$

La función Zeta para el campo escalar masivo en \mathbb{R}^N se puede obtener rápidamente a través de la transformada de Mellin de $K(t)$:

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} K(t) = \frac{V (4\pi)^{-\frac{N}{2}}}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{(s-\frac{N}{2})-1} e^{-tm^2} \\ &= V \frac{(4\pi)^{-\frac{N}{2}}}{\Gamma(s)} \frac{1}{(m^2)^{s-\frac{N}{2}}} \int_0^\infty dt t^{(s-\frac{N}{2})-1} e^{-t} = \end{aligned}$$

$$= V (4\pi)^{-\frac{N}{2}} m^{N-2s} \frac{\Gamma\left(s - \frac{N}{2}\right)}{\Gamma(s)}$$

El comportamiento de la función Zeta en $s = 0$ vendrá dado por el cociente de funciones Gamma $\frac{\Gamma\left(s - \frac{N}{2}\right)}{\Gamma(s)}$, que dependerá de la dimensión del espacio. Si es $N = 2n$ par, entonces:

$$\zeta(s) = V (4\pi)^{-n} m^{2(n-s)} \frac{\Gamma(s-n)}{\Gamma(s)}$$

Así escrita, no está bien definida cuando $s - n = 0, -1, -2, \dots$, e interesa poder evaluar la Zeta y su derivada en $s = 0$. Usando reiteradas veces la propiedad $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, se obtiene que:

$$\frac{\Gamma(s-n)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{(s-1)(s-2)\cdots(s-n)} \xrightarrow{s \rightarrow 0} \frac{(-1)^n}{n!}$$

Resulta evidente entonces que $\zeta(0) \neq 0$, al regularizar la acción efectiva mediante función Zeta en dimensión par, el factor de $\ln \mu$ (añadido para mantener las dimensiones correctas) no es removido en el límite $s \rightarrow 0$. No se profundizará más en estos casos.

Si la dimensión del espacio es impar, escribimos $N = 2n + 1$ y se tiene:

$$\zeta(s) = V (4\pi)^{-n-\frac{1}{2}} m^{2(n-s)+1} \frac{\Gamma\left(s - n - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)} = s \left[V (4\pi)^{-n-\frac{1}{2}} m^{2(n-s)+1} \frac{\Gamma\left(s - n - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s+1)} \right]$$

Esta expresión es analítica en $s = 0$, y será $\zeta(0) = 0$. La acción efectiva en dimensión impar resulta adecuadamente regularizada, y se calcula como:

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \zeta(s) \Big|_{s=0} = -\frac{1}{2} \left[V (4\pi)^{-n-\frac{1}{2}} m^{2n+1} \Gamma\left(-n - \frac{1}{2}\right) \right] \\ &= V \left[-4^{-n-1} \pi^{-n-\frac{1}{2}} m^{2n+1} \Gamma\left(-\left(n+1\right) + \frac{1}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

y luego puede usarse la siguiente identidad [17], válida para $n + 1 \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma\left(-\left(n+1\right) + \frac{1}{2}\right) = (-1)^{n+1} \sqrt{\pi} \frac{2^{2(n+1)} (n+1)!}{(2n+2)!} = -(-1)^n 4^{n+1} \pi^{\frac{1}{2}} \frac{(n+1)!}{(2n+2)!}$$

Llevado a la acción efectiva, se obtiene:

$$W = V \left[\frac{(-1)^n (n+1)!}{\pi^n (2n+2)!} m^{2n+1} \right] \quad N = 2n + 1 \quad (\text{A.1})$$

En particular, para el caso del espacio chato en dimensión 3, \mathbb{R}^3 , la acción efectiva correspondiente al campo escalar masivo es:

$$W|_{\mathbb{R}^3} = V \left[-\frac{1}{\pi} \cdot \frac{2!}{4!} m^3 \right] = \frac{V}{2\pi^2} \left[-\frac{\pi}{6} m^3 \right] \quad (\text{A.2})$$

B | Autovalores y autovectores del laplaciano mínimo en S^3 y H^3

B.1 Espacio S^3

El operador laplaciano mínimo sobre la esfera S^3 se define, en coordenadas hiperesféricas (χ, θ, φ) , como:

$$\begin{aligned}\Delta \equiv -g_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu &= -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_j\right) \\ &= -\frac{1}{a^2\sin^2\chi}\left[\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sin^2\chi\frac{\partial}{\partial\chi}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\end{aligned}$$

Consideremos la ecuación

$$\Delta u = \frac{\lambda}{a^2}u$$

en la región $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$, $\chi \in [0, \pi]$, y donde las soluciones $u(\chi, \theta, \varphi)$ deben ser acotadas y monovaluadas. Se sabe que para este tipo de operadores, definidos sobre variedades Riemannianas compactas, los autovalores son todos positivos y discretos, por lo que esperamos obtener una secuencia $\{\lambda_n, \lambda_n \geq 0, n \in \mathbb{N}\}$.

La ecuación de autovalores se puede resolver mediante separación de variables, proponiendo $u(x) = R(\chi)Y_{lm}(\theta, \varphi)$, siendo $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ el armónico esférico de orden l , que satisface

$$-\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1)Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad -l \leq m \leq l \quad l = 0, 1, \dots$$

y son las únicas soluciones acotadas y monovaluadas (y adecuadamente normalizadas) en $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$.

Luego, la ecuación resultante para $R(\chi)$ es:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^2\chi}\frac{d}{d\chi}\left(\sin^2\chi\frac{dR}{d\chi}\right) - \frac{l(l+1)}{\sin^2\chi}R(\chi) + \lambda R(\chi) &= 0 \\ \sin^2\chi\frac{d^2R}{d\chi^2} + 2\sin\chi\cos\chi\frac{dR}{d\chi} + \sin^2\chi\left(\lambda - \frac{l(l+1)}{\sin^2\chi}\right)R(\chi) &= 0\end{aligned}$$

Haciendo el reemplazo $r = \cos\chi$, se obtiene:

$$(1 - r^2) R'' - 3rR' + \left(\lambda - \frac{l(l+1)}{1-r^2} \right) R = 0$$

Podemos llevar esta ecuación a una forma conocida si escribimos $R(r) = (1 - r^2)^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} w(r)$, con algún factor α adecuado. Para la función $w(r)$, se tiene que:

$$(1 - r^2) w'' + (2\alpha - 2) r w' + \left[\frac{(\alpha^2 - \frac{1}{4}) r^2 - l(l+1)}{1 - r^2} + \lambda + \alpha + \frac{1}{2} \right] w = 0$$

Entonces, para quitar el término con $(1 - r^2)^{-1}$ entre corchetes, es conveniente elegir α tal que $(\alpha^2 - \frac{1}{4}) r^2 - l(l+1) \propto 1 - r^2$, por ejemplo, si es:

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \frac{1}{4} &= l(l+1) \\ \alpha^2 - \frac{1}{4} &= \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \\ |\alpha| &= l + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

En particular, usando $\alpha = -\left(l + \frac{1}{2} \right)$, la ecuación que se obtiene es:

$$(1 - r^2) w'' + (2(l+1) + 1) r w' + (\lambda - l(l+2)) w = 0$$

Siendo los autovalores todos positivos, podemos escribirlos como $\lambda = p(p+2)$, siendo p en principio cualquier número real positivo. Entonces, si además definimos $\nu = l+1$, resulta que:

$$\begin{aligned} (1 - r^2) w'' + (2\nu + 1) r w' + [p(p+2) - l(l+2)] w &= 0 \\ (1 - r^2) w'' + (2\nu + 1) r w' + (p-l)(p+l+2) w &= 0 \\ (1 - r^2) w'' + (2\nu + 1) r w' + (p-l)(p-l+2\nu) w &= 0 \end{aligned}$$

La solución a la última expresión es la función de Gegenbauer [16] $C_{p-l}^\nu(r)$, definida en términos de la función hipergeométrica, de modo que:

$$R(r) = (1 - r^2)^{\frac{1}{2}} C_{p-l}^{l+1}(r) = (1 - r^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(p+l+2)}{\Gamma(p-l+1)\Gamma(2l+2)} F\left(p+l+2, -p+l, l+\frac{3}{2}; \frac{1-r}{2}\right)$$

La función hipergeométrica $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ se define como una serie de potencias de z , que se corta si los parámetros α o β son enteros negativos, y en cualquier otro caso es convergente en $|z| < 1$, siempre que $\gamma \neq -n$ ($n \in \mathbb{N}$); además, es simétrica frente al intercambio $\alpha \leftrightarrow \beta$. Para asegurar convergencia en $|z| = 1$, es necesario que $\text{Re}(\alpha + \beta - \gamma) < 0$, en cuyo caso la convergencia es absoluta.

Para nuestra solución particular, el cuarto argumento de la hipergeométrica es $z = \frac{1-r}{2}$, con $r = \cos \chi$ tomando valores entre -1 y 1, por lo que es necesario que sea acotada en $|z| = 1$. Pero allí la suma diverge:

$$\text{Re}\left(p+l+2 + (-p+l) - \left(l + \frac{3}{2}\right)\right) = 2l + \frac{1}{2} > 0 \quad \forall l = 0, 1, \dots$$

Entonces, la única manera de lograr una solución acotada es cortando la serie, pidiendo, por ejemplo, que:

$$-p + l = -N \quad N \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto, p sólo podrá tomar valores enteros, y de manera tal que la diferencia con el parámetro l sea siempre un número natural. Escribiendo $p = n$, serán permitidos aquellos valores de l tales que

$$n - l = 0, 1, \dots$$

Pero además sabemos que l sólo puede ser positivo, así que debe ser $n \in \mathbb{N}$, y luego $l = 0, 1, \dots, n$.

Finalmente, obtenemos para el problema de autovalores del laplaciano mínimo en S^3 , las siguientes soluciones:

$$\Delta_{S^3} u_{nlm} = \frac{\lambda_n}{a^2} u_{nlm}$$

$$\lambda_n = n(n+2) \quad , \quad n = 0, 1, \dots \quad , \quad l = 0, 1, \dots, n \quad , \quad -l \leq m \leq l$$

$$u_{nlm}(\chi, \theta, \varphi) = \mathcal{N}_{nlm} \sin^l \chi F\left(n+l+2, -n+l, l+\frac{3}{2}; \sin^2\left(\frac{\chi}{2}\right)\right) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Es fácil contar las degeneraciones, ya que, a n fijo, hay $2l+1$ autoestados posibles, por cada valor de l permitido (que barre de 0 a n). Entonces, la degeneración será la suma de todos ellos; por conveniencia empezamos a sumar desde $l = n$ hasta $l = 0$, y es:

$$\begin{aligned} d_n &= (2n+1) + (2(n-1)+1) + \dots + 1 = (n+1) + 2(n+(n-1)+(n-2)+\dots+(n-(n-1))) \\ &= n+1 + 2 \sum_{i=1}^n i \\ &= n+1 + 2 \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)^2 \end{aligned}$$

B.2 Espacio H^3

La propuesta para resolver el problema de autovalores del laplaciano mínimo en el espacio H^3 será aprovechar los resultados ya obtenidos en S^3 , y relacionarlos con los del hiperbólico mediante una extensión analítica en las coordenadas.

El laplaciano mínimo en H^3 se escribe:

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j \right) \\ &= -\frac{1}{a^2 \sinh^2 y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\sinh^2 y \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1}{a^2 \sinh^2 y} \Delta_\Omega \end{aligned}$$

donde las coordenadas son $y \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, y definimos

$$\Delta_\Omega \equiv -\left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)$$

que es la parte angular del laplaciano mínimo en \mathbb{R}^3 (usando coordenadas esféricas), y es el mismo

que aparece en el problema en S^3 .

Luego, transformando mediante $\chi = iy$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\Delta_{H^3} &= -\frac{1}{a^2(-i \sin \chi)^2} i \frac{\partial}{\partial \chi} \left((-i \sin \chi)^2 i \frac{\partial}{\partial \chi} \right) + \frac{1}{a^2(-i \sin \chi)^2} \Delta_{\Omega} \\ &= +\frac{1}{a^2 \sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \right) - \frac{1}{a^2 \sin^2 \chi} \Delta_{\Omega} \\ &= -\Delta_{S^3}\end{aligned}$$

Pasemos entonces a calcular autovalores y autofunciones en H^3 :

$$\Delta_{H^3} v = \frac{\lambda}{a^2} v$$

donde nuevamente las soluciones $v(y, \theta, \varphi)$ deben ser monovaluadas y acotadas, y además normalizables (funciones de cuadrado integrable sobre la variedad); esto último no es trivial si el espacio en cuestión es no compacto.

Por conveniencia, pondremos $\lambda = k^2 + 1$, y en principio será $k \in \mathbb{C}$.

Recordemos entonces las soluciones más generales a esta misma ecuación, en S^3 , antes de pedir condiciones de convergencia en el borde:

$$\Delta_{S^3} u(\chi, \theta, \varphi) = \frac{p(p+2)}{a^2} u(\chi, \theta, \varphi)$$

$$u(\chi, \theta, \varphi) \propto \sin^l \chi F\left(p+l+2, -p+l, l+\frac{3}{2}; \sin^2\left(\frac{\chi}{2}\right)\right) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Haciendo $\chi = iy$, vimos que $\Delta_{S^3} \rightarrow -\Delta_{H^3}$, pero las soluciones (y los autovalores) siguen siendo las mismas, evaluadas ahora en esta nueva coordenada:

$$\Delta_{S^3} u(\chi, \theta, \varphi) \xrightarrow{\chi \rightarrow iy} -\Delta_{H^3} u(iy, \theta, \varphi) = \frac{p(p+2)}{a^2} u(iy, \theta, \varphi)$$

Entonces, las autofunciones del laplaciano mínimo en H^3 serán:

$$v(y, \theta, \varphi) = u(iy, \theta, \varphi) \propto \sin^l(iy) F\left(p+l+2, -p+l, l+\frac{3}{2}; \sin^2\left(\frac{iy}{2}\right)\right) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

con autovalores

$$\frac{\lambda}{a^2} = \frac{k^2 + 1}{a^2} = -\frac{p(p+2)}{a^2}$$

De la última igualdad resulta que podemos escribir a p en términos de k , como $p = ik - 1$. En la esfera, p sólo podía ser un real positivo, pero aquí toma cualquier valor complejo. Las autofunciones quedan expresadas de la siguiente forma:

$$v(y, \theta, \varphi) \propto i^l \sinh^l(y) F\left(ik+l+1, -ik+l+1, l+\frac{3}{2}; -\sinh^2\left(\frac{y}{2}\right)\right) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad l \in \mathbb{N} \quad -l \leq m \leq l$$

Resta analizar el comportamiento de la función respecto a la variable y , que barre sobre todos los reales positivos. Recordamos que la función hipergeométrica $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ está bien definida para $|z| < 1$, y los primeros tres argumentos reales: habrá que hacer una extensión analítica. Esto

último puede hacerse [16] siempre que $\gamma + 1$ no sea un número natural, y $\alpha - \beta$ y $\gamma - \alpha - \beta$ no sean enteros. En nuestro caso:

$$\gamma + 1 = l + \frac{5}{2} \notin \mathbb{N} \quad \alpha - \beta = 2ik \notin \mathbb{Z} \quad \gamma - \alpha - \beta = -l + \frac{11}{2} \notin \mathbb{Z}$$

La primera y la tercer condición se satisfacen por ser l natural. Para que se cumpla la segunda, habrá que excluir valores de $k = iq$, $q \in \mathbb{Z}$; más adelante veremos que, para que las soluciones sean normalizables, k sólo podrá ser real, y no tendremos este problema.

Entonces, la función hipergeométrica que es solución a nuestra ecuación puede extenderse analíticamente a $|z| > 1$, que es univaluada si introducimos un corte sobre el eje real, de $z = 1$ a $z = \infty$. En este caso, es $z = -\sinh^2\left(\frac{y}{2}\right)$, e interesa estudiar el límite $y \rightarrow \infty$. En dicho límite, podemos aproximar $z \approx -\left(\frac{ey/2}{2}\right)^2 = -\frac{e^y}{4}$ y utilizar la siguiente fórmula de inversión [20] :

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, 1-\gamma+\alpha, 1-\beta+\alpha, \frac{1}{z}\right) + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} (-z)^{-\beta} F\left(\beta, 1-\gamma+\beta, 1-\alpha+\beta, \frac{1}{z}\right)$$

Como haremos $z \rightarrow -\infty$, los factores $F(a, b, c; \frac{1}{z}) \rightarrow F(a, b, c; 0) = 1$, así que no los tendremos en cuenta en la expresión asintótica final.

Si definimos

$$f_{kl}(y) = i^l \sinh^l(y) F\left(ik + l + 1, -ik + l + 1, l + \frac{3}{2}; -\sinh^2\left(\frac{y}{2}\right)\right)$$

luego las autofunciones son $v(y, \theta, \varphi) \propto f_{kl}(y) Y_{lm}(\theta, \varphi)$, y en el límite $y \rightarrow \infty$, su comportamiento vendrá dado por la expresión asintótica de $f_{kl}(y)$, que es:

$$f_{kl}(y) \simeq \frac{i^l 2^{l+1} \Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right) \Gamma(ik)}{\sqrt{\pi} \Gamma(ik + l + 1)} e^{y(ik-1)} + \frac{i^l 2^{l+1} \Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right) \Gamma(-ik)}{\sqrt{\pi} \Gamma(-ik + l + 1)} e^{y(-ik-1)}$$

Las autofunciones serán normalizables si las $f_{kl}(y)$ son de cuadrado integrable sobre la variedad (la integral de $|f_{kl}(y)|^2$ sobre $y \in [0, \infty)$ es convergente), lo cual sólo será posible si es k real.¹

Además, como las funciones $f_{kl}(y)$ son simétricas frente al intercambio $k \rightarrow -k$, considerando únicamente k positivo ya obtenemos un conjunto completo de autofunciones, pues las de k negativo

¹ Si las autofunciones son normalizables, debe ser posible escribirlas de modo que

$$(v(x)_{klm}, v(x)_{k'l'm'}) \equiv \int_{H^3} d^3x \sqrt{g(x)} v(x)_{klm}^* v(x)_{k'l'm'} = \delta_{kk'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

donde $\sqrt{g(x)} = \sinh^2 y \sin \theta$, y $v(y, \theta, \varphi) \propto f_{kl}(y) Y_{lm}(\theta, \varphi)$.

Siendo $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ los armónicos esféricos, ya están normalizados respecto a la medida $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, la integración en esa "parte angular" ya proporciona las deltas en l y m , por lo que sólo es necesario analizar la integral en la variable y , que es

$$\int_0^\infty dy \sinh^2 y f_{kl}(y)^* f_{k'l'}(y)$$

Cuando $y \rightarrow \infty$, podemos aproximar $\sinh^2 y \approx e^{2y}$ y $f_{kl}(y) \simeq c_l(k) e^{y(ik-1)} + c_l(-k) e^{y(-ik-1)}$, como vimos antes. Necesitamos que la integral dé un valor finito cuando $k = k'$, lo cual dependerá del comportamiento de la función a integrar, que es de la forma

$$\sinh^2 y f_{kl}(y)^* f_{kl}(y) \approx |c_l(k)|^2 e^{2y\text{Re}(ik)} + |c_l(-k)|^2 e^{-2y\text{Re}(ik)} + c_l(k)^* c_l(-k) e^{-2y\text{Im}(ik)} + c_l(-k)^* c_l(k) e^{2y\text{Im}(ik)}$$

Entonces, si es k imaginario, $\text{Im}(ik) = 0$, y la integral diverge para cualquier valor de $k \neq 0$; sólo puede ser $k \in \mathbb{R}$ para que las autofunciones sean normalizables

no son linealmente independientes a estas.

Por lo tanto, el espectro del laplaciano mínimo en H^3 es continuo, de la forma:

$$\Delta_{H^3} v_{klm} = \frac{\lambda(k)}{a^2} v_{klm}$$
$$\lambda(k) = k^2 + 1 \quad , \quad k \geq 0 \quad , \quad l = 0, 1, \dots \quad , \quad -l \leq m \leq l$$

Estos mismos resultados son reproducidos en [18], donde se calcula también la densidad de estados:

$$\mu(k) = \frac{\Omega_2}{c_3} \sum_{l,m} |v_{klm}(0)|^2 = \frac{|\Gamma(ik+1)|^2}{|\Gamma(ik)|^2}$$

C | Relaciones entre raíces y coeficientes de un polinomio

Sea $P(x) = \sum_{r=0}^n a_r x^r$ un polinomio de grado n en $\mathbb{C}[x]$; tiene n raíces complejas, y se puede factorizar como $P(x) = a_n \prod_{l=1}^n (x - \alpha_l)$, $\alpha_l \in \mathbb{C}$.

Distribuyendo en la expresión factorizada del polinomio, se tiene que [21] :

$$\begin{aligned} P(x) = a_n & \left[x^n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) x^{n-1} + \right. \\ & + (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \dots + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4 + \dots + \alpha_{n-1} \alpha_n) x^{n-2} - \\ & - (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \alpha_n) x^{n-3} + \dots + \\ & \left. + (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \right]. \end{aligned}$$

Entonces, dado el coeficiente principal a_n , los demás pueden calcularse en términos de las raíces, como:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n-1}}{a_n} &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \\ \frac{a_{n-2}}{a_n} &= +(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} \alpha_n) \\ &\vdots \\ \frac{a_0}{a_n} &= (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n. \end{aligned}$$

En forma compacta, esto es:

$$\frac{a_{n-l}}{a_n} = (-1)^l \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_l}, \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{C.1})$$

• Consideremos un polinomio formado únicamente por potencias pares, de grado $2k$ y factorizado de la siguiente manera:

$$P(x) = \prod_{l=0}^{k-1} (x^2 - l^2) = x^2 (x^2 - 1) \dots (x^2 - (k-1)^2).$$

Haciendo el reemplazo $z = x^2$, obtenemos un polinomio en z de grado k , cuyas raíces son todos

cuadrados perfectos :

$$P(z) = \prod_{l=0}^{k-1} (z - l^2) = \sum_{r=0}^k C_r z^r .$$

Respecto a los coeficientes, es fácil notar que el coeficiente principal es $C_k = 1$, y, como una de las raíces es el cero, entonces $C_0 = 0$. Las raíces no nulas son:

$$\alpha_n = n^2 \quad , \quad n = 1, 2, \dots, k-1 .$$

Entonces, usando (C.1), podemos escribir los coeficientes C_r en términos de las raíces del polinomio como:

$$C_{k-r} = (-1)^r \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_r \leq k-1} n_1^2 n_2^2 \dots n_r^2 . \quad (\text{C.2})$$

- Consideremos ahora un polinomio par, de grado $2k$ y factorizado como:

$$\tilde{P}(x) = \prod_{l=0}^{k-1} (x^2 + l^2) = x^2 (x^2 + 1) \dots (x^2 + (k-1)^2) .$$

Reemplazando por la nueva variable $z = x^2$, obtenemos un polinomio en z de grado k , cuyas raíces son todos cuadrados perfectos de números imaginarios puros. Esto es:

$$\tilde{P}(z) = \prod_{l=0}^{k-1} (z + l^2) = \prod_{l=0}^{k-1} (z - (il)^2) \quad \text{y} \quad \tilde{P}(z) = \sum_{r=0}^k \tilde{C}_r z^r .$$

Nuevamente, el coeficiente principal es $\tilde{C}_k = 1$, y $\tilde{C}_0 = 0$. Las raíces no nulas se escriben como:

$$\alpha_n = (in)^2 = -n^2 \quad , \quad n = 1, 2, \dots, k-1 .$$

Llevado a la ecuación (C.1), los coeficientes \tilde{C}_r son:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{k-r} &= (-1)^r \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_r \leq k-1} (in_1)^2 (in_2)^2 \dots (in_r)^2 \\ &= (-1)^r \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_r \leq k-1} (-1)^r n_1^2 n_2^2 \dots n_r^2 \\ &= \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_r \leq k-1} n_1^2 n_2^2 \dots n_r^2 . \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Finalmente, de (C.2) y (C.3), encontramos que:

$$C_{k-r} = (-1)^r \tilde{C}_{k-r} \quad , \quad \text{o bien} \quad C_r = (-1)^{k-r} \tilde{C}_r . \quad (\text{C.4})$$

Bibliografia

- [1] Wilson, K. G., & Kogut, J. (1974). The renormalization group and the ϵ expansion. *Physics Reports*, 12(2), 75-200.
- [2] Zomolodchikov, A. B. (1986). Irreversibility of the Flux of the Renormalization Group in a 2D Field Theory. *JETP Lett.*, 43(12), 730-732 [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 43(12), 565-567].
- [3] Komargodski, Z., & Schwimmer, A. (2011). On Renormalization Group Flows in Four Dimensions. *J. High Energy Phys.*, 2011: 99 [*arXiv:1107.3987*]
Komargodski, Z. (2012). The Constrains of Conformal Symetry on RG Flows. *J. High Energy Phys.*, 2012: 69 [*arXiv:1112.4538*]
- [4] Cappelli, A., Friedan, D., & Latorre, J. I. (1991). C-theorem and spectral representation. *Nucl. Phys. B*, 352(3), 616-670.
Anselmi, D., Freedman, D. Z., Grisaru, M. T., & Johansen, A. A. (1998). Nonperturbative formulas for central functions of supersymmetric gauge theories. *Nucl. Phys. B*, 526, 543-571.
- [5] Klebanov, I. R., Pufu, S. S., & Safdi, B. R. (2011). F-Theorem without Supersymetry. *J. High Energy Phys.*, 2011: 38 [*arXiv:1105.4598*].
- [6] Giombi, S., & Klebanov, I. R. (2015). Interpolating between a and F . *J. High Energy Phys.*, 117
- [7] Birrell, N.D., & Davies, P. C. W. (1984). *Quantum Fields in Curved Space* (No. 7). Cambridge University Press.
- [8] Schaposnik, F. (2012). Path Integrals I [Lecture notes].
- [9] Dowker, J. S., & Critchley, R. (1976). Effective Lagrangian and energy-momentum tensor in de Sitter space. *Phys. Rev. D*, 13(12), 3224-3232.
- [10] Hawking, S. W. (1977). Zeta Function Regularization of Path Integrals in Curved Spacetime. *Commun. Math. Phys.*, 55, 133-148.
- [11] Vassilevich, D. V. (2003). Heat kernel expansion: user's manual. *Physics reports*, 388(5), 279-360.
- [12] Avramidi, I. G. (2015). *Heat Kernel Method and its Applications*. Birkhäuser.
- [13] Colbis, B. (2010). Laplacian on Riemannian manifolds [Lecture notes].
- [14] Camporesi, R. (1991). ζ -function regularization of one-loop effective potentials in anti-de Sitter spacetime. *Physical Review D*, 43(12), 3958-3965.
- [15] Demmel, M., Saueressig, F., & Zanusso, O. (2014). RG flows of Quantum Einstein Gravity on maximally symmetric spaces. *arXiv preprint arXiv:1401.5495*.
- [16] Gradshteyn, I. S., & Ryzhik, I. M. (1994). *Tables of Integrals, Series and Products*. Academic Press.
- [17] Srivastava, H. M., & Junesang Choi (2011). *Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals*. Elsevier.
- [18] Camporesi, R., & Higuchi, A. (1994). Spectral functions and zeta functions in hyperbolic spaces. *Journal of Mathematical Physics*, 35(8), 4217-4246.

Bibliografía

- [19] Dowker, J. S. (2011). Vacuum energies on spheres and in cubes. *arXiv:1106.3657*.
- [20] Abramowitz, M, & Stegun, I. (1972). *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards.
- [21] Rojo, A. (1996). *Álgebra I*. El Ateneo