

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Física

**TEORÍAS DE CAMPOS CON ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE
SIMETRÍA ROTACIONAL**

Trabajo de Diploma para obtener el título de Licenciado en Física

Ignacio Salazar Landea

Director: Nicolás Grandi
Co-director: Guillermo Silva
Lugar de trabajo: Dto. de Física, Fac. Cs. Exactas, UNLP

La Plata, Marzo de 2011

Resumen

Hemos estudiado la teoría abeliana de gauge en $2 + 1$ dimensiones conocida como Teoría de Chern-Simons-Lifshitz. Esta teoría describe las fases adyacentes a un punto crítico que presenta invarianza frente a cambios de escala anisotrópicos (punto crítico de Lifshitz). En ausencia del término de Chern-Simons, la teoría es dual a un campo escalar de Lifshitz, describiendo una transición de Lifshitz cuántica. Al encender el término de Chern-Simons, la descripción en términos del campo escalar dual resulta no local. El modelo presenta un único acoplamiento relevante, que sintoniza al sistema a lo largo de una transición de fase cuántica entre un estado isotrópico y un estado anisotrópico. Calculamos soluciones de vórtice, coeficientes de transporte a temperatura nula y su comportamiento al agregar términos de Chern-Simons de orden superior en derivadas.

ÍNDICE GENERAL

1.. <i>Introducción</i>	4
1.1. Campos de Lifshitz en Materia Condensada	4
1.2. Teoría de Chern-Simons	6
1.2.1. Fotones masivos en una teoría invariante de gauge	6
1.3. Formulación de Lagrange de la dinámica de un fluido bidimensional	8
1.4. Integrales de Movimiento Topológicas	13
1.4.1. Integrales de Movimiento Topológicas en sistemas mecánicos	13
1.4.2. Integrales de Movimiento Topológicas en Teoría de Campos	13
1.4.3. Un Modelo Bidimensional: Vórtices de Abrikosov	15
2.. <i>Teoría de Lifshitz-Chern-Simons</i>	18
2.1. Acerca de las dualidades	18
2.1.1. Maxwell en $2 + 1$ dimensiones	18
2.1.2. Dual a la acción de Lifshitz en $2 + 1$ dimensiones	19
2.1.3. Acción dual de Lifshitz en $2 + 1$ dimensiones fuera del punto crítico.	20
2.2. La teoría de Chern-Simons-Lifshitz	21
3.. <i>Soluciones de vórtice</i>	23
3.1. Vacío no trivial	23
3.2. Soluciones en el disco	23
3.3. Soluciones en la esfera	25
3.4. Soluciones en el espacio hiperbólico	26
4.. <i>Coefficientes de transporte</i>	28
4.1. En el punto crítico, $r = 0$	30
4.2. En la fase isotrópica, $r > 0$	30
4.3. En la fase anisotrópica, $r < 0$	31
4.4. Correcciones en derivadas más altas	32
5.. <i>Conclusiones</i>	34
<i>Apéndice</i>	35
A.. <i>Rotura espontánea de simetrías</i>	36
A.1. El teorema de Goldstone	36
A.2. El modelo σ	39

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo vamos a estudiar soluciones de vórtice y propiedades de transporte en una teoría propuesta recientemente denominada teoría de Lifshitz-Chern-Simons (LCS). La teoría se construye sumando al dual electromagnético de una teoría escalar de Lifshitz un término de Chern-Simons. Esta deformación no alterará las propiedades de invarianza de escala en el punto crítico en virtud de la invarianza de la acción de Chern-Simons frente a diffeomorfismos arbitrarios. En esta sección se hará primero una introducción al uso de teorías de campos en sistemas de materia condensada, tomando como ejemplo la teoría de Lifshitz. Luego se discutirá la teoría de Chern-Simons, de manera tal de contar con las herramientas necesarias para abordar la presentación de la teoría de Lifshitz-Chern-Simons en la sección 2. Finalmente se hará una introducción a las soluciones de vórtice, herramienta que nos permitirá abarcar cabalmente la sección 3 que discute soluciones de vórtice en la teoría LCS.

1.1. Campos de Lifshitz en Materia Condensada

Parámetros de orden

Consideremos las propiedades termodinámicas de un sistema de partículas y/o spines de hamiltoniano H invariante bajo la acción de un grupo de simetrías \mathcal{G} . En general, la fase de equilibrio a alta temperatura (dominada por la entropía) es invariante bajo todo el grupo de simetrías \mathcal{G} del hamiltoniano. Esto significa que los promedios termodinámicos (valores medios) y las funciones de correlación no nulos a alta temperatura, son sólo aquellos que no cambian bajo la acción de \mathcal{G} : *corresponden a cantidades que transformen como singletes bajo \mathcal{G}* . A baja temperatura (dominada por la energía), el Hamiltoniano puede privilegiar una fase ordenada. Esta fase de baja temperatura se distingue de la desordenada de alta temperatura por la aparición de valores medios no nulos $\langle \phi_a \rangle$ para operadores ϕ_a no invariantes bajo \mathcal{G} . Dichos valores de expectación se denominan parámetros de orden, y este fenómeno se conoce como ruptura térmica de simetría. La simetría a baja temperatura resulta reducida $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$, siendo el grupo de isotropía \mathcal{G}' el subgrupo de \mathcal{G} que deja invariante los parámetros de orden $\langle \phi_a \rangle$. La temperatura T_c por debajo de la cual los valores medios $\langle \phi_a \rangle$ resultan no nulos se denomina temperatura crítica del sistema.

Supondremos a continuación que el parámetro de orden es pequeño y uniforme cerca de la temperatura crítica T_c del sistema. Las propiedades termodinámicas de equilibrio se encuentran completamente determinadas por la minimización de la energía libre $F[T, V, N] = E - TS$, siendo F invariante bajo la acción de \mathcal{G} . Esto significa que sólo puede ser función de aquellas combinaciones del parámetro de orden $\langle \phi_a \rangle$ que no cambian bajo transformaciones de \mathcal{G} . F es en general una funcional muy complicada de $\langle \phi_a \rangle$, sin embargo, puesto que $\langle \phi_a \rangle$ es cero para $T > T_c$, resulta útil expandir F en serie de potencias de $\langle \phi_a \rangle$, alrededor del punto crítico ajustando los coeficientes de la expansión de manera de respetar las propiedades observadas en el sistema y reproducir las magnitudes físicas como por ejemplo los exponentes críticos. La energía libre así construida se conoce como energía libre de Landau.

Punto crítico de Lifshitz

Existen sistemas físicos en los que, al variar algún potencial o campo externo, la fase ordenada (baja temperatura) cambia de un orden espacialmente uniforme a otro modulado espacialmente (fase sméctica). Este comportamiento se manifiesta en términos de tres bordes en el diagrama de fases, que separan la fase desordenada de altas temperaturas de las fases (de baja temperatura) ordenada uniforme y modulada (ver fig.1.1). El punto donde estos tres bordes se encuentran define el punto crítico de Lifshitz.

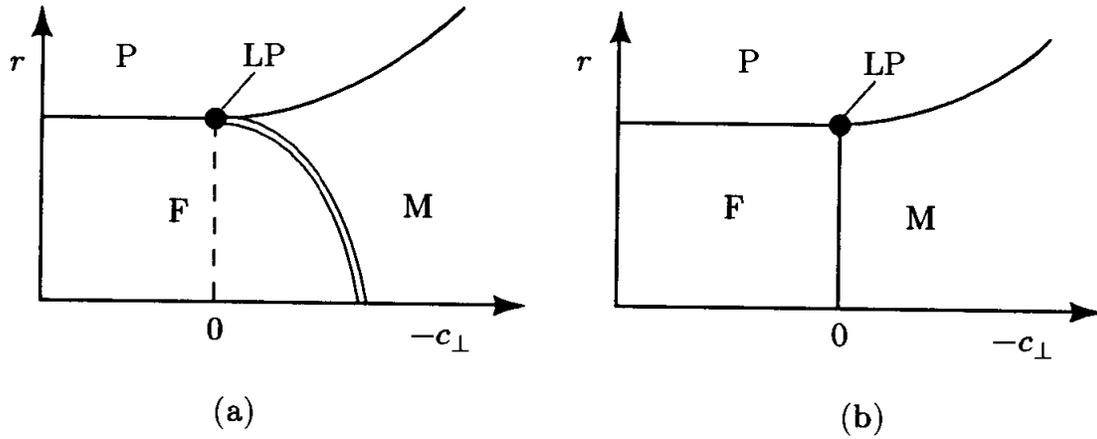


Fig. 1.1: Diagramas de fase esquemáticos de la energía libre de Landau para un campo de Lifshitz con $c_{\perp} = \kappa^2 m_{\perp}^2$.

La fase paramagnética (P) de altas temperaturas, la fase ferromagnética (F) de bajas temperaturas y la fase modulada (M) se encuentran en el punto crítico de Lifshitz (LP). (a) Diagrama de fases para un parámetro de orden escalar, (b) Diagrama de fases para un parámetro de orden vectorial.

fases

Una posible energía libre de Landau para un punto de Lifshitz genérico es [1]

$$F = \frac{1}{2} \int d^d x [\kappa^2 m_{\parallel}^2 (\nabla_{\parallel} \phi)^2 + \kappa^2 m_{\perp}^2 (\nabla_{\perp} \phi)^2 + \kappa^2 (\nabla^2 \phi)^2 + u \phi^4 + v \phi^2]. \quad (1.1)$$

Donde hemos separado las coordenadas del espacio físico $x = (x_{\parallel}, x_{\perp})$, en componentes paralelas y perpendiculares a la dirección de ruptura de simetría. Para m_{\parallel}^2 y m_{\perp}^2 positivos la configuración de mínima energía resulta espacialmente uniforme, puesto que variaciones espaciales del parámetro de orden implicarían un incremento de la energía libre. El valor de vacío para el parámetro de orden, obtenido minimizando el potencial, resulta $\sqrt{-v/2u}$, en el caso de que el parámetro de orden sea un vector, la dirección del mismo no queda determinada.

Para $m_{\perp}^2 < 0$, el sistema minimiza su energía creando estructuras moduladas espacialmente. Considerando configuraciones $\phi(x_{\perp})$ y variando F encontramos (suponiendo $v = u = 0$ para simplificar)

$$\partial_{\perp}^2 (\partial_{\perp}^2 \phi - m_{\perp}^2 \phi) = 0 \quad (1.2)$$

cuyo espacio de soluciones contiene funciones senos y cosenos que varían espacialmente con una longitud de onda característica $\lambda \sim 1/|m_{\perp}|$.

Resumiendo, para $v > 0$ y $m_{\perp}^2 > 0$ el sistema minimiza su energía libre con un parámetro de orden nulo, esto corresponde a la fase de alta temperatura o fase desordenada, al cambiar v de signo, el parámetro de orden que minimiza F resulta no nulo y nos encontramos en una fase homogéneamente ordenada. Variando el signo de m_{\perp}^2 podemos pasar de la fase ordenada homogéneamente a la fase cuyo orden está dado por una función modulada. El punto dónde se encuentran todas las fronteras ($v = 0$, $m_{\perp}^2 = 0$) corresponde a un punto crítico de Lifshitz.

En el punto crítico de Lifshitz, es natural esperar una simetría frente a cambios de escala. Sumando a la energía libre un término cinético canónico $\pi^2 = (\partial_t \phi)^2$ y haciendo la transformada de Legendre para obtener el lagrangiano, advertimos que la acción resulta invariante frente al escaleo

$$t \rightarrow \lambda^z t, \quad x \rightarrow \lambda x \quad (1.3)$$

donde $z = 2$. Esta simetría será de ahora en más la que caracterice un punto crítico de Lifshitz (ver capítulo 2). Los puntos críticos de Lifshitz pueden aparecer en metamagnetos para una elección apropiada del término de intercambio.

1.2. Teoría de Chern-Simons

En esta sección vamos a discutir los aspectos básicos de la teoría de Chern-Simons.

1.2.1. Fotones masivos en una teoría invariante de gauge

La característica fundamental de la teoría de Chern-Simons es la describir un campo electromagnético masivo invariante de gauge, a diferencia de lo que sucede cuando se incorpora el término $m^2 A_{\mu} A^{\mu}$ a la acción de Maxwell. En la teoría de Maxwell-Chern-Simons (MCS) la invarianza de gauge permanece preservada, esto es, en la teoría MCS sigue existiendo una corriente conservada asociada a las transformaciones de gauge.

Consideremos la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{k}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_{\mu} \partial_{\nu} A_{\rho}, \quad (1.4)$$

el segundo término de esta acción corresponde al término de Chern-Simons, que parece no invariante de gauge, por depender explícitamente del campo de gauge A_μ . Para encontrar la corriente conservada mencionada anteriormente consideremos la transformación de gauge $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$. La variación del lagrangiano (1.4) resulta

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{k}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu\Lambda\partial_\nu A_\rho \\ &= \frac{k}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu(\Lambda\partial_\nu A_\rho) = \frac{k}{2}\epsilon^{\nu\rho\mu}\partial_\nu(A_\rho\partial_\mu\Lambda) \\ &= \partial_\mu(\Omega^\mu)\end{aligned}\tag{1.5}$$

puesto que la variación del lagrangiano es una derivada total, el teorema de Noether nos provee la corriente conservada dada por

$$\begin{aligned}j^\mu &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu A_\nu}\partial_\nu\Lambda - \Omega^\mu \\ &= \frac{1}{2}[F^{\mu\nu} - k\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\rho]\partial_\nu\Lambda\end{aligned}\tag{1.6}$$

Integrando en el plano la componente temporal de la corriente (1.6) obtenemos una carga conservada cuya expresión resulta (utilizando para Ω^μ la segunda expresión en (1.6))¹

$$\begin{aligned}Q[\Lambda] &= \int d^2x (F^{0i} - k\epsilon^{ij}A_j)\partial_i\Lambda. \\ &= -\int d^2x \partial_i(F^{0i} - k\epsilon^{ij}A_j)\Lambda\end{aligned}\tag{1.7}$$

Veamos ahora cómo el término de Chern-Simons da masa al campo de gauge. Las ecuaciones de movimiento que se derivan de (1.4) son

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{k}{2}\epsilon^{\nu\mu\rho}F_{\mu\rho} = 0\tag{1.8}$$

de donde la corriente (1.6) se deduce inmediatamente teniendo en cuenta que debido a la contracción con el tensor de Levi-Civita, podemos reemplazar en el segundo término de (1.8) $F_{\mu\nu} \rightarrow 2\partial_\mu A_\nu$. Definiendo el dual de Hodge \tilde{F} del campo electromagnético F como²

$$\tilde{F}^\alpha = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\mu\nu}F_{\mu\nu} \Rightarrow F^{\mu\nu} = -\epsilon^{\mu\nu\rho}\tilde{F}_\rho\tag{1.9}$$

las ecuaciones (1.8) pueden ser escritas de la siguiente manera

$$\partial_\mu\epsilon^{\mu\nu\rho}\tilde{F}_\rho - k\tilde{F}^\nu = 0\tag{1.10}$$

¹ Notese que al integrar por partes en la segunda línea de (1.7) el integrando resulta ser la ecuación correspondiente a la Ley de Gauss, por lo tanto on shell el integrando se anula. Es importante entonces conservar el término de superficie despreciado al integrar por partes.

² Recordar que en signatura Lorentziana $\eta = \text{diag}(-++)$ se tiene que $\epsilon_{\mu\nu\rho} = -\epsilon^{\mu\nu\rho}$

Multiplicando por $\epsilon_{\nu\alpha\beta}$ y tomando la divergencia ∂^α obtenemos³

$$\begin{aligned}\partial^2 \tilde{F}_\beta - k\epsilon_{\beta\alpha\nu}\partial^\alpha \tilde{F}^\nu &= 0 \\ \partial^2 \tilde{F}_\beta - k^2 \tilde{F}_\beta &= 0\end{aligned}\tag{1.11}$$

Transformando Fourier obtenemos

$$p^\mu p_\mu + k^2 = 0 \Rightarrow \mu^2 = k^2\tag{1.12}$$

donde μ es la masa del fotón.

1.3. Formulación de Lagrange de la dinámica de un fluido bidimensional

Consideraremos la descripción de un fluido no disipativo constituido por un conjunto de partículas idénticas no relativistas $\alpha = 1, \dots, n$, moviéndose en el plano según el lagrangiano [2]

$$L = \sum_{\alpha} \frac{m}{2} (\dot{\mathbf{x}}^{(\alpha)})^2 - U(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots)\tag{1.13}$$

donde $\mathbf{x}^{(\alpha)}$ representa el vector posición de la partícula α y U la energía potencial de interacción entre partículas. Asumiendo que el sistema se comporta como un fluido, el límite al continuo ($n \rightarrow \infty$) se obtiene reemplazando el índice discreto α por coordenadas continuas $\mathbf{y} = \{y_1, y_2\}$. Las coordenadas y_a pueden ser pensadas como las condiciones iniciales para x^a , de manera que $y_a = x_a(y_a, t = 0)$. Estas coordenadas y etiquetan los puntos materiales del fluido y se mueven con él, la descripción para la dinámica del sistema es entonces en términos de un par de campos continuos $\mathbf{x} = \{x_a(\mathbf{y}, t)\}$ con $a = 1, 2$. Sin perder generalidad podemos elegir las coordenadas y de manera tal que el número de partículas por unidad de área en el espacio y sea una constante ρ_0 . El vínculo sobre el número total N de partículas se expresa como

$$N = \int d^2 y \rho_0 = \int d^2 x \rho_0 \left| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right|\tag{1.14} \quad \boxed{\text{cons}}$$

donde $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$ es el jacobiano que conecta ambos sistemas de coordenadas. La densidad de partículas ρ en el espacio físico \mathbf{x} es entonces

$$\rho = \rho_0 \left| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right|\tag{1.15} \quad \boxed{\text{rhofis}}$$

Suponiendo que el potencial U , proveniente de fuerzas de corto alcance, conduce a una configuración de equilibrio de densidad constante ρ_0 en espacio físico⁴, podemos reescribir el lagrangiano (1.13) como

$$L = \int d^2 y \rho_0 \left[\frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - V \left(\rho_0 \left| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right| \right) \right]\tag{1.16} \quad \boxed{\text{hall1}}$$

donde hemos expresado la energía potencial $U \rightarrow V$ en términos de la densidad de partículas en el espacio físico ρ .

³ Para escribir la primera línea de (1.11) hemos usado la identidad de Bianchi para el campo electromagnético F que en términos del dual de Hodge toma la forma $\partial_\alpha \tilde{F}^\alpha = 0$.

⁴ El jacobiano para la configuración de equilibrio vale 1.

El lagrangiano (1.16) es invariante frente a difeomorfismos, en el plano y , que preserven el área (notar que también preservan el vínculo (1.14)). Para hallar las consecuencias de esta invarianza, consideremos la transformación infinitesimal

$$y'_a \approx y_a + f_a(y), \quad (1.17) \quad \boxed{\text{infi}}$$

tomando a los campos de posición x como escalares frente a (1.17), esto es $x'(y') = x(y)$, obtenemos

$$\delta x_a = \frac{\partial x_a}{\partial y_b} f_b(y). \quad (1.18) \quad \boxed{\text{delta}x_a}$$

La condición para que f preserve el área es

$$d^2 y = d^2 y' \Rightarrow \left| \frac{\partial y'}{\partial y} \right| = 1 \quad (1.19)$$

a primer orden en f tenemos

$$1 = \left| \frac{\partial y'}{\partial y} \right| \approx 1 + \partial_a f_a \quad (1.20)$$

de donde se sigue que

$$\partial_a f_a = 0 \Rightarrow f_a = \epsilon_{ab} \frac{\partial \Lambda(y)}{\partial y_b} \quad (1.21)$$

con Λ una función de gauge arbitraria. La ecuación (1.18) para difeomorfismos que preservan el área (DPA) toma la forma

$$\delta x_a = \epsilon_{cd} \frac{\partial x_a}{\partial y_c} \frac{\partial \Lambda(y)}{\partial y_d}. \quad (1.22)$$

Circulación, vórtices y difeomorfismos que preservan el área

Como la transformación (1.22) es una simetría del lagrangiano (1.16), el teorema de Noether nos provee de una magnitud conservada \mathcal{Q} dada por

$$\mathcal{Q} = \int d^2 y \Pi_a \delta x_a \quad (1.23)$$

donde Π_a es el impulso canónico asociado a x_a , explícitamente

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \int d^2 y \rho_0 \left[\epsilon_{cd} \dot{x}_a \frac{\partial x_a}{\partial y_c} \frac{\partial \Lambda}{\partial y_d} \right] \\ &= - \int d^2 y \rho_0 \frac{\partial}{\partial y_d} \left(\epsilon_{cd} \dot{x}_a \frac{\partial x_a}{\partial y_c} \right) \Lambda. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Considerando que la expresión es conservada para Λ concluimos que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial y_d} \left(\epsilon_{cd} \dot{x}_a \frac{\partial x_a}{\partial y_c} \right) \right] = 0. \quad (1.25)$$

Integrando (1.25) en el área S encerrada por una curva cerrada $\Gamma = \partial S$ y usando el teorema de Gauss en el plano y , obtenemos el teorema de conservación de la circulación de Lord Kelvin

$$\frac{d}{dt} \oint_{\Gamma} \dot{x} \cdot dx = 0 \quad (1.26)$$

“La circulación a lo largo de una curva cerrada Γ que se mueve con el fluido (que encierra los mismos elementos del fluido) es constante en el tiempo”. Expresado de manera más simple, el teorema establece que si observamos a un dado tiempo un contorno cerrado Γ y lo seguimos a lo largo del tiempo, siguiendo el movimiento de todos los elementos del fluido, la circulación sobre el contorno no cambia. Desde un aspecto formal, la conservación de la circulación se deriva de la invariancia de (1.16) frente a difeomorfismos que preservan el área (cf. nota 1).

En analogía con en el electromagnetismo donde las fuentes donde $\nabla \cdot E$ corresponden a cargas eléctricas, los puntos donde $\frac{\partial}{\partial y_d} \left(\epsilon_{cd} \dot{x}_a \frac{\partial x_a}{\partial y_c} \right) \neq 0$ se denominan vórtices. Un fluido libre de vórtices satisface

$$\frac{\partial}{\partial y_d} \left(\epsilon_{cd} \dot{x}_a \frac{\partial x_a}{\partial y_c} \right) = 0. \quad (1.27) \quad \boxed{\text{freevc}}$$

Formulación de Lagrange y su relación con la teoría de Maxwell

La analogía con el electromagnetismo observada en (1.25)-(1.27) se puede fortalecer si restringimos nuestra atención a pequeños movimientos del fluido. Asumiendo que el potencial V en (1.16) tiene un mínimo para $\rho = \rho_0$, la solución para un fluido en reposo resulta

$$x_a = y_a. \quad (1.28)$$

Consideremos pequeñas desviaciones de esta solución de equilibrio parametrizando la posición de las partículas en términos de un campo a_i definido por

$$x_a = y_a + \frac{1}{2\pi\rho_0} \epsilon_{ab} a_b. \quad (1.29) \quad \boxed{\text{Adef}}$$

donde hemos elegido usar una a minúscula para evitar confundirlo con el campo electromagnético físico A_μ . Los DPA (1.22) resultan entonces equivalentes a una transformación de gauge $U(1)$ para \mathbf{a}

$$(1.22) \equiv \delta a_b = 2\pi\rho_0 \frac{\partial \Lambda}{\partial y_b}. \quad (1.30) \quad \boxed{\text{inv gauge}}$$

Asumiendo que, para pequeñas desviaciones de la densidad fuera de su valor de equilibrio, el potencial toma la forma

$$V = \mu \left(\rho_0 \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| - \rho_0 \right)^2. \quad (1.31)$$

y puesto que de (1.15) y (1.29) a primer orden resulta⁵

$$\rho = \rho_0 - \frac{1}{2\pi} (\nabla \times \mathbf{a}), \quad (1.32) \quad \boxed{\text{denshall}}$$

el lagrangiano (1.16) para pequeñas fluctuaciones respecto de un fluido en reposo toma la forma⁶

$$L = \frac{1}{g^2} \int d^2 y \frac{1}{2} \left[\dot{\mathbf{a}}^2 - \frac{2\mu\rho_0^2}{m} (\nabla \times \mathbf{a})^2 \right] \quad (1.33) \quad \boxed{\text{halleml}}$$

⁵ En (1.32) llamamos $\nabla \times \mathbf{a} = \epsilon_{cd} \partial_c a_d$.

⁶ Notar la similitud con $L = \frac{1}{g^2} \int d^2 y \frac{1}{2} [\mathbf{e}^2 - \mathbf{b}^2]$ si hacemos $\mathbf{e} = -\dot{\mathbf{a}}$ y $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a} = \epsilon_{ij} \partial_i a_j$.

donde la constante de acoplamiento g está definida por

$$g^2 = (2\pi)^2 \frac{\rho_0}{m}. \quad (1.34)$$

y la velocidad de la luz está dada por

$$c^2 = \frac{2\mu\rho_0^2}{m} \quad (1.35)$$

El lagrangiano (1.33) coincide el lagrangiano de Maxwell en el gauge temporal $a_0 = 0$ y los fotones del análogo electrodinámico corresponden a ondas sonoras en el fluido. La ausencia de vórtices (1.27) en la aproximación lineal toma la forma

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{a}} = 0 \quad (\equiv \nabla \cdot \mathbf{e} = 0) \quad (1.36)$$

Podríamos obtener esta ecuación del Lagrangiano (1.33) introduciendo un multiplicador de lagrange a_0 y recuperando la invariancia de gauge (1.30)⁷.

Fluido Cargado en un Campo Magnético uniforme y su relación con Chern-Simons

Supongamos ahora que las partículas constituyentes del fluido están eléctricamente cargadas y se mueven sujetas a un campo magnético B transversal al plano del fluido. El lagrangiano que describe la interacción de una partícula puntual de carga q con un campo magnético uniforme es

$$L_{int} = A_a \dot{x}_a = \frac{qB}{2} \epsilon_{ab} \dot{x}_a x_b \quad (1.38)$$

Para un fluido con un cociente carga/masa igual a q/m , el término a adicionar es

$$L'_{int} = \frac{qB}{2} \int d^2y \rho_0 \epsilon_{ab} \dot{x}_a x_b \quad (1.39) \quad \boxed{\text{hallml}}$$

La densidad de momento canónico conjugada a x_a está dada por

$$\Pi_a = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_a} = \frac{qB\rho_0}{2} \epsilon_{ab} x_b \quad (1.40)$$

En ausencia de campo magnético, el rol de las cargas estáticas era representar vórtices en el fluido. Cuando el campo B es encendido, el comportamiento lejos del origen es dominado por el término de Chern-Simons. Miremos que pasa en este caso.

El lagrangiano (1.39) es invariante frente a difeomorfismos que preserven el área, pero ahora el generador de gauge conservado es

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ \epsilon_{ij} \epsilon_{ab} x_b \frac{\partial x_a}{\partial y_i} \right\} = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \epsilon_{ab} \frac{\partial x_b}{\partial y_j} \frac{\partial x_a}{\partial y_i} \quad (1.41)$$

⁷ Por completitud es conveniente reescribir las ecuaciones Maxwell en 2+1 dimensiones

$$\begin{aligned} \text{Maxwell : } & \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times B = \dot{\mathbf{E}} \\ \text{Bianchi : } & \partial_\alpha \tilde{F}^\alpha = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\dot{B} \end{aligned} \quad (1.37)$$

where $\nabla \times B = \epsilon_{ab} \partial_b B$. En 2+1, la identidad de Bianchi se expresa como la conservación de la corriente \tilde{F}^α de componentes $\tilde{F}^\alpha = (B, E_2, -E_1)$. Bianchi se resuelve fácilmente en términos de un vector A_μ haciendo $\tilde{F}^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta A_\gamma$.

Esto es simplemente el Jacobiano de x a y dado por ρ_0/ρ . Se deduce entonces que la densidad del fluido a un punto acompañante fijo y es independiente del tiempo.

En ausencia de vórtices, el generador conservado vale uno. Esto se debe a que el mismo es una constante de movimiento y en $t = 0$, $x_i = y_i$. Siendo así, surge la restricción

$$\frac{1}{2}\epsilon_{ij}\epsilon_{ab}\frac{\partial x_b}{\partial y_j}\frac{\partial x_a}{\partial y_i} = 1 \quad (1.42)$$

Las ecuaciones de movimiento y la restricción pueden ser derivadas de una única acción

$$L' = \frac{eB\rho_0}{2}\epsilon_{ab}\int d^2y \left[\left(\dot{x}_a - \frac{1}{2\pi\rho_0}\{x_a, a_0\} \right) x_b + \frac{\epsilon_{ab}}{2\pi\rho_0}a_0 \right] \quad (1.43)$$

En esta ecuación aparece el corchete de Poisson

$$\{F(y), G(y)\} = \epsilon_{ij}\partial_i F \partial_j G \quad (1.44)$$

Retornemos ahora a la aproximación lineal para pequeñas oscilaciones del fluido. Sustituyendo (1.29) en (1.39) se obtiene

$$L' = \frac{eB}{8\pi^2\rho_0}\int d^2y \epsilon_{ab}\dot{a}_a a_b \quad (1.45)$$

Esta es la forma usual del lagrangiano de Chen-Simons en el gauge temporal. Se puede ver que la masa μ del «fotón» coincide con la frecuencia de ciclotrón eB/m .

Usando la expresión (1.32) vemos que la ley de conservación requiere que el «campo magnético» en cada punto y sea independiente del tiempo. El análogo de un vórtice es un campo magnético que sea una función δ :

$$\nabla \times a = 2\pi\rho_0 q \delta^2(y) \quad (1.46)$$

donde q mide la magnitud del vórtice. La solución a esta ecuación es única a menos de una transformación de gauge. En el gauge de Culomb, $\nabla \cdot a = 0$, viene dado por

$$a_i = q\rho_0\epsilon_{ij}\frac{y_j}{y^2}. \quad (1.47)$$

Como $\epsilon_{ij}a_j/2\pi\rho_0$ es el desplazamiento del fluido, vemos que el vórtice de Chern-Simons es un desplazamiento radial desde o hacia el centro del vórtice de magnitud $q/2\pi r$. Esto implica un déficit o exceso de carga eléctrica ordinaria en el vórtice de magnitud

$$e_{qp} = \rho_0 q e. \quad (1.48)$$

El vórtice cargado es una cuasipartícula de Laughlin.

Para entender mejor esta cuasipartícula, debemos cuantificar el fluido. Haremos esto de manera semi-clásica. Si el fluido está compuesto por partículas de carga e , el momento de una partícula será

$$p_a = \frac{\Pi_a}{\rho_0} = eB\epsilon_{ab}x_b/2. \quad (1.49)$$

La condición de cuantificación de Bohr-Sommerfeld es

$$\oint p_a dx_a = 2\pi n = eB \oint \frac{\epsilon_{ab} x_b}{2} dx_a \quad (1.50)$$

que nos da el área real (x-space) de la región.

La «carga» del vórtice estará dada por

$$eBq = 2\pi n \quad (1.51)$$

de donde podemos ver que la carga eléctrica de la cuasipartícula será

$$e_{qp} = 2\pi \frac{\rho_0}{B} \quad (1.52)$$

1.4. Integrales de Movimiento Topológicas

1.4.1. Integrales de Movimiento Topológicas en sistemas mecánicos

Considérese una partícula unidimensional moviéndose en un campo con potencial $V(x)$, y supongamos que dicho potencial tiene una divergencia positiva en el punto $x = a$. La partícula no puede penetrar la barrera de potencial infinitamente alta. Si en un principio está a la derecha de a , permanecerá a la derecha de a y viceversa. Esto vale tanto para partículas clásicas como cuánticas.

Para enunciar esto en lenguaje topológico, sea U el conjunto de posiciones que la partícula puede ocupar. Si U es disconexo, la partícula debe quedarse en la misma componente conexa donde arrancó.

Consideremos ahora un sistema clásico con n grados de libertad, descrito por el hamiltoniano $H = T + V$, la energía cinética T es una función cuadrática del momento y la energía potencial $V(x^1, \dots, x^n)$ puede tender a infinito para ciertas configuraciones del sistema. Asumamos que el dominio U donde V es finito es disconexo y tiene componentes conexas U_1, \dots, U_k . Una vez más, si una partícula comienza en U_i , allá permanecerá todo el tiempo. En otras palabras, la componente donde la partícula yace es una constante de movimiento.

Un enunciado similar puede realizarse si cuantizamos el sistema. Si una función de onda $\psi(x)$ es cero afuera de U_i , lo mismo valdrá para la función de onda obtenida resolviendo la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo con condición inicial $\psi(x)$.

El dominio U donde la energía potencial es finita, es el espacio de configuraciones del sistema. En su lugar, podemos considerar el espacio de fases del sistema, esto es, el conjunto de puntos $(p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n)$ donde el hamiltoniano es finito. Una vez más, la partícula no puede abandonar la componente del espacio de fases donde empezó. Para el sistema considerado, el hamiltoniano cinético es siempre finito y el espacio de fases tiene el mismo número de componentes que el espacio de configuraciones.

En resumen, tenemos integrales de movimiento topológicas siempre que el espacio de las fases de un sistema -el conjunto de (p, q) para el cual $H(p, q)$ es finito- es disconexo. La integral de movimiento es la componente conexa en la cual permanece el sistema. En el caso de sistemas cuánticos, se las denomina «números cuánticos topológicos».

1.4.2. Integrales de Movimiento Topológicas en Teoría de Campos

Las integrales de movimiento topológicas no sólo aparecen en sistemas con finitos grados de libertad, sino también en teorías de campos. Consideremos una teoría que describe un campo escalar $\phi(x) = \phi(\vec{x}, t)$

en una dimensión y asumamos que la acción es [4]

$$S = \int \mathcal{L} dx dt = \frac{1}{2} \int \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - 2\lambda(\phi^2 - a^2)^2 \right) dx dt \quad (1.53)$$

y la energía tiene la forma

$$E = \frac{1}{2} \int \left(\pi^2(x) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - 2\lambda(\phi^2 - a^2)^2 \right) dx = T + V, \quad (1.54)$$

donde $\pi(x) = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}(x) = \dot{\phi}(x)$ es el momento generalizado correspondiente al campo $\phi(x)$.

Para que la energía sea finita, es condición necesaria tener $\lim_{|x| \rightarrow \pm\infty} |\phi(x)| = a$. Siendo así, las posibles configuraciones son:

$$\begin{aligned} \phi(+\infty) &= \phi(-\infty) = a; \\ \phi(+\infty) &= -\phi(-\infty) = a; \\ \phi(+\infty) &= \phi(-\infty) = -a; \\ \phi(+\infty) &= -\phi(-\infty) = -a. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Un campo satisfaciendo una de estas condiciones no puede ser transformado en otro de manera continua de modo tal que todos los campos intermedios tengan energía finita. Entonces, campos de distintos tipos están verdaderamente separados por una barrera de potencial infinita. Por otro lado, campos con el mismo comportamiento en infinito sí pueden ser deformados de manera continua de uno a otro, con un gasto finito de energía. Entonces las porciones conexas del espacio de configuraciones son las determinadas por estas cuatro configuraciones.

El mínimo de energía es alcanzado cuando $\pi(x) \equiv 0$ y $\phi(x) \equiv \pm a$. A estos puntos se los conoce como vacíos clásicos. Por convención, normalizaremos la energía de los vacíos clásicos a 0. Las soluciones clásicas están relacionadas con estados de vacío de teorías cuánticas de campos en la aproximación semiclásica. En nuestro ejemplo, como entre distintas soluciones clásicas tenemos barreras de potencial infinitas, cada una corresponderá a un estado de vacío del sistema. Esto implica la rotura de la simetría $\phi(x) \rightarrow -\phi(x)$.

Ahora debemos expandir alrededor del estado de vacío, entonces, en lugar del campo $\phi(x)$ consideraremos al campo $\xi(x) = \phi(x) - a$ ó $\xi'(x) = \phi(x) + a$. En términos de $\xi(x)$, la acción pasa a ser $S = S_{qu} + S_1$, con

$$S_{qu} = \frac{1}{2} \int \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 - 8\lambda a^2 \xi^2 \right) dx dt, \quad (1.56)$$

$$S_1 = -\lambda \int (4a\xi^3 + \xi^4) dx dt. \quad (1.57)$$

El término S_1 lo podemos tirar por ser de orden superior. La cuantización de la acción S_{qu} resulta en partículas escalares de masa $m = 2a\hbar\sqrt{2\lambda}$. Lo mismo se puede hacer con ξ' .

Consideremos ahora el mínimo de la funcional energía en las componentes del espacio de fases donde $\phi(-\infty) \neq \phi(+\infty)$. Asumamos por definición que $\phi(-\infty) = -a$ y $\phi(+\infty) = a$. El campo que minimiza la energía, es

$$\phi(x) = a \tanh(a\sqrt{2\lambda}(x - c)) \quad (1.58)$$

donde $c \in \mathcal{R}$ es arbitrario. Su energía mínima es $M = \frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{\lambda}a^3$ que coincide con la masa de las partículas cuánticas correspondientes al campo (1.58). Esto vale en general.

Un campo como (1.58), que representa el mínimo local de una funcional de energía es llamado «solitón». Los solitones no son invariantes traslacionales, así que el mínimo es degenerado: si un mínimo es alcanzado por $\phi(x)$, también será alcanzado por $\phi(x-d)$, porque la funcional energía sí es invariante traslacional.

Un solitón es una solución independiente del tiempo de las ecuaciones clásicas de movimiento. Para el caso de acciones invariantes relativistas, podemos obtener la solución dependiente del tiempo mediante una transformación de Lorentz y hablaremos entonces de un solitón con velocidad v .

1.4.3. Un Modelo Bidimensional: Vórtices de Abrikosov

Ahora vamos a analizar el análogo a la acción (1.53) para un campo escalar complejo ψ en dos dimensiones:

$$S = \int \mathcal{L} d^3x = \frac{1}{2} \int \left(\partial_\mu \bar{\psi} \partial^\mu \psi - \frac{1}{4} \lambda (|\psi|^2 - a^2)^2 \right) d^3x \quad (1.59)$$

donde $\mu = 0, 1, 2$, $x = (x^0, x^1, x^2) = (x_0, \vec{x}) \in \mathcal{R}^3$, $\partial_0 = \partial^0$ y $\partial_i = -\partial^i$ para $i = 1, 2$.

La funcional energía puede ser expresada en términos de las coordenadas generalizadas $\psi(x)$ y el momento generalizado $\pi(x) = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\psi}(x)$ de la siguiente manera:

$$E = T + V = \frac{1}{2} \int \left(|\pi(x)|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right|^2 + \frac{1}{4} \lambda (|\psi|^2 - a^2)^2 \right) d^2x \quad (1.60)$$

Primero estudiamos el conjunto de campos que satisface

$$\int (|\psi|^2 - a^2)^2 d^2x < \infty \quad (1.61)$$

y se comportan bien en infinito. Para ser más precisos, asumiremos que en coordenadas polares (r, φ) , el límite

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r, \varphi) = \Phi(\varphi) \quad (1.62)$$

existe y es finito para todo φ y que la convergencia es uniforme en φ . Como ψ es continua, también debe serlo $\Phi(\varphi)$. Además, (1.61) implica que $|\Phi(\varphi)| = a$, así que podemos escribir $|\Phi(\varphi)| = a e^{i\alpha(\varphi)}$, donde $\alpha(\varphi)$ es una función real y continua en el intervalo $[0, 2\pi]$ y satisface

$$\alpha(2\pi) - \alpha(0) = 2\pi n, \quad (1.63)$$

porque $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$. El entero $n = n(\Phi)$ caracteriza el tipo topológico de Φ .

Asumimos que $\Phi(\varphi)$ varía de manera continua con el campo ψ . Como el entero n no cambia bajo una transformación continua de Φ , tampoco lo hará bajo una variación continua de ψ . Entonces, los campos que satisfagan (1.61) se dividen en componentes caracterizadas por el número topológico n . Geométricamente hablando, n es el número de vueltas que da la función Φ , vista como un mapeo del círculo ϕ en \mathcal{R}^2 , subespacio del espacio físico a un círculo $|z| = a$ en el plano complejo, el espacio donde vive Φ .

Aunque el espacio que satisface (1.61) es disconexo, eso no implica que la acción (1.59) tenga una integral de movimiento topológica, ya que cada solución de energía finita es topológicamente trivial. Para ver esto, escribamos

$$\frac{1}{2} \int \left(\left| \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right|^2 \right) d^2 x = \int \left| \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|^2 r dr d\varphi + \int \left| \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right|^2 \frac{dr}{r} d\psi. \quad (1.64)$$

Para que esto sea finito, $\partial \Phi / \partial \varphi$ debe ir a cero a medida que $r \rightarrow \infty$, lo que implica que Φ debe tener un comportamiento asintótico trivial.

Podemos modificar la acción (1.59) de manera tal que existan integrales de movimiento topológicas. Para hacerlo, hacemos que ψ interactúe con un campo electromagnético A_μ , con lo que obtenemos la integral

$$S = \int \left(\frac{1}{2} D_\mu \bar{\psi} D^\mu \psi - \frac{1}{8} \lambda (|\psi|^2 - a^2)^2 - \frac{1}{4e^2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) d^3 x \quad (1.65)$$

donde $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$ y $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ el tensor de campo electromagnético. El campo magnético será $B = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$ y el eléctrico $(E_1, E_2) = (\dot{A}_1 - \partial_1 A_0, \dot{A}_2 - \partial_2 A_0)$. La acción (1.65) es invariante bajo transformaciones de gauge

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \lambda, \quad \psi \rightarrow \psi e^{i\lambda} \quad (1.66)$$

Usando la invarianza de gauge, imponemos la condición de gauge $A_0 = 0$. Considerando a ψ y A_i como coordenadas generalizadas y a $\pi = \dot{\psi}$ y $E_i = \dot{A}_i$ como sus momentos conjugados, podemos escribir la funcional energía como

$$E = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{e^2} (E_1^2 + E_2^2 + B^2) + |\pi|^2 + |D_1 \psi|^2 + |D_2 \psi|^2 + \frac{1}{4} \lambda (|\psi|^2 - a^2)^2 \right) d^2 x \quad (1.67)$$

Ahora podemos construir campos (ψ, A_i) de energía finita de manera tal que ψ tenga el número topológico n que uno elija. La energía en coordenadas polares tomará la forma

$$E = \frac{1}{2} \int \left(|D_r \psi|^2 + \frac{1}{r^2} |D_\varphi \psi|^2 + \frac{1}{4} \lambda (|\psi|^2 - a^2)^2 + \frac{1}{e^2} \left(\dot{A}_r^2 + \frac{1}{r^2} \dot{A}_\varphi^2 + B^2 \right) \right) r dr d\varphi \quad (1.68)$$

La siguiente combinación de campos tiene energía finita:

$$\psi(r, \varphi) = \alpha(r) e^{in\varphi}, \quad A_0 = 0, \quad A_r = 0, \quad A_\varphi = \gamma(r), \quad (1.69)$$

donde $\alpha(r) = a + \beta(r)$, $\gamma(r) = -n + \lambda(r)$ y las funciones $\beta(r)$ y $\lambda(r)$ decaen rápidamente a medida que $r \rightarrow \infty$. De esta manera, la energía de este sistema está localizada en un disco alrededor del origen. Agregar un campo de gauge, solucionó efectivamente el problema de energía infinita.

Hay además maneras elegantes de escribir el número topológico n

$$n = \frac{1}{2\pi} \oint A_\mu dx^\mu = \frac{1}{2\pi} \int B d^3 x. \quad (1.70)$$

Esto se debe a que la finitud de la energía implica que $D_\varphi \psi = \partial_\varphi \psi + iA_\varphi \psi$ tienda a cero a medida que r tiende a infinito. Como ψ se comporta como $a e^{i\lambda(\varphi)}$ cuando $r \rightarrow \infty$, vemos que

$$A_\varphi \approx i\psi^{-1} \partial_\varphi \psi = \partial_\varphi \lambda \quad (1.71)$$

de manera que

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_\varphi \lambda d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_\varphi d\phi = \frac{1}{2\pi} \oint A_\mu dx^\mu. \quad (1.72)$$

2. TEORÍA DE LIFSHITZ-CHERN-SIMONS

lcs

De manera general, uno puede imaginar teorías invariantes de escala con un exponente crítico dinámico z . En estas teorías, bajo una transformación de escala controlada por el parámetro λ , tenemos

$$t \rightarrow \lambda^z t, \quad x \rightarrow \lambda x \quad (2.1)$$

con las componentes de un campo de gauge escaleando como potencias inversas de λ . Un término de Chern-Simons es topológico y no prefiere ninguna elección de escaleo. Eligiendo $z = 1$, la teoría es consistente con el término de Maxwell invariante de Lorentz. Sin embargo, uno puede preguntarse que pasa si se elige algún otro z . Acá, vamos a considerar el caso $z = 2$. Para hacerlo, tenemos que encontrar una teoría de Maxwell deformada de manera tal que respete esta invarianza de escala. Para ello, introduciremos una teoría dual al campo escalar de Lifshitz.

2.1. Acerca de las dualidades

Un sistema de materia condensada que presenta una invarianza de escala con $z = 2$ es por ejemplo un sistema en el punto de Lifshitz, que será descrito por la acción

$$S_L = \frac{1}{2} \int dt d^2x [(\partial_t \phi)^2 - \kappa^2 (\nabla^2 \phi)^2] \quad (2.2)$$

donde ϕ es adimensional frente a escaleo. Si encontrásemos un dual de esta teoría que sea una teoría de Maxwell deformada, tendríamos nuestra teoría de gauge con $z = 2$. La misma tendrá una acción de la forma [10]

$$S = \int dt d^2x \left(\frac{1}{g_1^2} (a_0 \partial_i e_i + e_i \dot{a}_i) - \frac{1}{2g_2^2} (\partial_i e_i)^2 - \frac{1}{2g_3^2} b^2 \right) \quad (2.3)$$

donde $b = \epsilon_{ij} \partial_i a_j$.

2.1.1. Maxwell en 2 + 1 dimensiones

Para entender a qué nos referimos cuando decimos teoría dual, vamos a empezar con un caso bien conocido y luego ir complicándolo de a poco. El lagrangiano de Maxwell en 2 + 1 dimensiones es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}[A] F^{\mu\nu}[A] \quad (2.4)$$

donde $F_{\mu\nu}[A] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

y las ecuaciones de movimiento resultantes son

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu}[A] &= 0 \\ \text{donde } F_{\mu\nu}[A] &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \end{aligned} \quad (2.5)$$

que pueden ser reemplazadas por el par

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= 0 \\ \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde ahora $F_{\mu\nu}$ se puede entender como una variable independiente. Resolviendo la segunda ecuación de (2.7) tenemos

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.8)$$

En términos de un nuevo campo A_μ , y reemplazando en la primera (2.6) recuperamos (2.5).

De manera alternativa, uno puede resolver la primera ecuación (2.6) para obtener

$$F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\rho \phi \quad (2.9)$$

en términos de un nuevo campo dual ϕ , y reemplazando en la segunda ecuación (2.7) obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \tilde{F}^\mu[\phi] &= 0 \\ \text{donde } \tilde{F}_\mu[\phi] &= \partial_\mu \phi \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde usamos la notación abreviada $\tilde{F}^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$. El conjunto (2.10) representa al sistema dual y puede ser derivado de la acción

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{dual}} &= -\frac{1}{4} \tilde{F}_\mu[\phi] \tilde{F}^\mu[\phi] \\ \text{con } \tilde{F}_\mu[\phi] &= \partial_\mu \phi \end{aligned} \quad (2.11)$$

que corresponde a un típico campo escalar.

2.1.2. Dual a la acción de Lifshitz en 2 + 1 dimensiones

Consideremos el lagrangiano en 2 + 1 dimensiones

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{g_1^2} (e_i \dot{a}_i + a_0 \partial_i e_i) - \frac{1}{2g_2^2} (\partial_i e_j)^2 - \frac{1}{2g_3^2} b[a]^2 \\ \text{donde } b[a] &= \epsilon^{ij} \partial_i a_j \end{aligned} \quad (2.12)$$

las ecuaciones de movimiento resultantes son

$$g_1^2 \nabla^2 e_i = g_2^2 (\partial_i a_0 - \dot{a}_i) \quad (2.13)$$

$$\partial_i e^i = 0 \quad (2.14)$$

$$g_1^2 \epsilon_{ji} \partial_j b[a] + g_3^2 \dot{e}_i = 0 \quad (2.15)$$

$$\text{donde } b[a] = \epsilon^{ij} \partial_i a_j$$

resolviendo la primera ecuación de (2.13) tenemos

$$e_i = \frac{g_2^2}{g_1^2} \frac{1}{\nabla^2} (\partial_i a_0 - \dot{a}_i) \quad (2.16)$$

en término de los campos a_0, a_i , y reemplazando en (2.14) y (2.15) obtenemos un conjunto de ecuaciones modificadas

$$\partial^i \left[\frac{1}{\nabla^2} (\partial_i a_0 - \dot{a}_i) \right] = 0 \quad (2.17)$$

$$g_1^2 \epsilon_{ji} \partial_j b[a] + g_2^2 g_3^2 \frac{1}{\nabla^2} (\partial_i \dot{a}_0 - \ddot{a}_i) = 0 \quad (2.18)$$

$$\text{donde } b[a] = \epsilon^{ij} \partial_i a_j$$

De manera alternativa uno puede resolver la segunda ecuación (2.14) para obtener

$$e^i = \epsilon^{ij} \partial_j \phi \quad (2.19)$$

en términos de un nuevo campo dual ϕ , y luego reemplazar la solución en (2.13) y (2.15) para obtener

$$g_1^2 \partial^j \nabla^2 \phi = g_2^2 \epsilon_{ij} (\dot{a}_i - \partial_i a_0) \quad (2.20)$$

$$g_1^2 b[a] + g_3^2 \dot{\phi} = 0 \quad (2.21)$$

$$\text{donde } b[a] = \epsilon^{ij} \partial_i a_j$$

tomando la derivada en la dirección x_j en la primer ecuación (2.20) y usando (2.21) y la definición de $b[a]$ esto pasa a ser

$$\kappa^2 \nabla^2 \nabla^2 \phi = \ddot{\phi} \quad (2.22)$$

con $\kappa^2 = g_1^2 / g_2^2 g_3^2$. El conjunto (2.22) representa al sistema dual y puede ser derivado de la acción

$$\mathcal{L}_{\text{dual}} = \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}^2 - \kappa^2 (\nabla^2 \phi)^2 \right) \quad (2.23)$$

que es la acción para un campo escalar de Lifshitz.

Por lo tanto podemos decir que la acción (2.3) representa al dual electromagnético de la acción de Lifshitz (2.2)

2.1.3. Acción dual de Lifshitz en 2 + 1 dimensiones fuera del punto crítico.

Consideremos ahora la densidad Lagrangiana (2.2) en 2 + 1 dimensiones, deformada por términos potencias del campo e

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g_1^2} (e_i \dot{a}_i + a_0 \partial_i e_i) - \frac{1}{2g_2^2} (\partial_i e_j)^2 - \frac{1}{2g_3^2} b[a]^2 + \frac{m^2}{2g_2^2} e_i^2 - \frac{\lambda}{4g_2^2} (e_i^2)^2 \quad (2.24)$$

$$\text{donde } b[a] = \epsilon^{ij} \partial_i a_j$$

Las ecuaciones de movimiento resultantes son

$$g_1^2 (\nabla^2 + m^2 - \lambda e_j^2) e_i = g_2^2 (\partial_i a_0 - \dot{a}_i) \quad (2.25)$$

$$\partial_i e^i = 0 \quad (2.26)$$

$$g_1^2 \epsilon_{ji} \partial_j b[a] + g_3^2 \dot{e}_i = 0 \quad (2.27)$$

$$\text{con } b[a] = \epsilon^{ij} \partial_i a_j$$

Uno puede resolver la segunda ecuación (2.26) para obtener

$$e^i = \epsilon^{ij} \partial_j \phi \quad (2.28)$$

en términos de un nuevo campo dual ϕ , y reemplazar en (2.25) y (2.27) para obtener

$$g_1^2 (\nabla^2 + m^2 - \lambda (\nabla \phi)^2) \partial^j \phi = g_2^2 \epsilon_{ij} (\dot{a}_i - \partial_i a_0) \quad (2.29)$$

$$g_1^2 b[a] + g_3^2 \dot{\phi} = 0 \quad (2.30)$$

$$\text{donde } b[a] = \epsilon^{ij} \partial_i a_j$$

tomando la derivada en la dirección x_j de la primer ecuación (2.29) y usando (2.30) y la definición de $b[a]$ se tiene

$$\kappa^2 (\nabla^2 + m^2) \nabla^2 \phi - \lambda \partial_i ((\nabla \phi)^2 \partial_i \phi) = \ddot{\phi} \quad (2.31)$$

El conjunto (2.31) representa el sistema dual y puede ser derivado de la acción

$$\mathcal{L}_{\text{dual}} = \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}^2 - \kappa^2 (\nabla^2 \phi)^2 + \kappa^2 m^2 (\nabla \phi)^2 - \kappa^2 \frac{\lambda}{2} (\nabla \phi)^4 \right) \quad (2.32)$$

que corresponde a la acción de Lifshitz con perturbaciones cuadrática y cuártica.

A bajas energías domina el término que acompaña a m^2 haciéndose la teoría relativista. A altas energías, el término $\nabla^2 \phi$ es el dominante de manera tal que se pierde la invarianza relativista. Por eso se dice que la de Lorentz es una simetría accidental del sistema.

2.2. La teoría de Chern-Simons-Lifshitz

En la acción (2.3), considerando que los campos se transforman de manera inversa a la coordenada que los etiqueta, tenemos invarianza de escala anisotrópica con $z = 2$. Deformando esta acción con los términos mencionados, se obtiene la acción (2.24). El operador e_i^2 resulta dominante en el límite IR y debe ser ajustado cuidadosamente en cero si se desea poner al sistema en el punto de Lifshitz. Si el coeficiente que lo acompaña es positivo, podemos ignorar el término $(\partial_i e_j)^2$. Uno puede integrar el campo eléctrico recuperando la teoría de Maxwell con «velocidad de la luz» determinada por el coeficiente que acompaña a e_i^2 . Si en cambio el coeficiente que acompaña a e_i^2 es negativo, un término de orden más alto, como $(e_i^2)^2$ debe estar presente con signo positivo para estabilizar la teoría y tener energías acotadas por abajo. En este caso, el sistema puede presentar ruptura espontánea de simetría rotacional. Este tipo de términos se hace irrelevante si e_i^2 es acompañado por un coeficiente positivo. En caso de que $(e_i^2)^2$ venga acompañado por un coeficiente negativo, sería necesario agregar un término $(e_i^2)^3$ para estabilizar el sistema.

Consideremos ahora una deformación adicional de (2.2) dada por el término de Chern-Simons

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g_1^2}(e_i \dot{a}_i + a_0 \partial_i e_i) - \frac{1}{2g_2^2}(\partial_i e_j)^2 - \frac{1}{2g_3^2}b[a]^2 + \frac{k}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}a_\mu \partial_\nu a_\rho \quad (2.33)$$

con $b[a] = \epsilon^{ij} \partial_i a_j$

Comparando la acción (2.3) con la acción deformada, vemos que b juega el papel de una densidad de carga. Es importante resaltar que, debido a la presencia del término de Chern-Simons, la versión dual de la presente teoría es no local en el campo ϕ .

Para obtener la forma de la carga conservada asociada a la invarianza de gauge de la acción, notemos que frente a una transformación de gauge $a_\mu \rightarrow a_\mu + \partial_\mu \Lambda$ la variación del lagrangiano es

$$\delta\mathcal{L} = \frac{k}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho}(\Lambda \partial_\nu a_\rho) \quad (2.34)$$

pero por otro lado tenemos, variando respecto a a_i la expresión de la corriente si la acción fuese invariante

$$j_0 = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_0 a_i} \partial_i \Lambda = \left(\frac{1}{g_1^2} e_i + \frac{k}{2} \epsilon_{ij} a_j \right) \partial_i \Lambda \quad (2.35)$$

a la cual le debemos sumar el valor de la variación de la densidad Lagrangiana (2.34). Esto implica, tener una carga conservada

$$Q(\Lambda) = - \int d^2x \left(\frac{1}{g_1^2} \partial_i e_i + kb \right) \Lambda \quad (2.36)$$

Mirando la ecuación de movimiento que se obtiene de variar respecto de a_0 , que más adelante se estudia en detalle, nos damos cuenta que $Q(\Lambda) = 0$.

3. SOLUCIONES DE VÓRTICE

El sistema en la fase anisotrópica presenta un vacío no nulo, lo que da la posibilidad a la existencia de soluciones de vórtice. La existencia o no de «winding» va a hablar de la forma geométrica particular en la que aparece la anisotropía. Un detalle interesante es que la teoría se ve enriquecida por el término de Chern-Simons que permite la existencia de soluciones con topología más rica.

3.1. Vacío no trivial

El lagrangiano en la fase anisotrópica es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g_1^2}(e_i \dot{a}_i + a_0 \partial_i e_i) - \frac{1}{2g_2^2}(\partial_i e_j)^2 - \frac{1}{2g_3^2}b[a]^2 + ka_0 b[a] + \frac{k}{2}\epsilon^{ij}a_i \dot{a}_j - \frac{\lambda}{4g_2^2}\left(e_i^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2 + \frac{m^4}{4g_2^2\lambda}$$

con $b[a] = \epsilon^{ij}\partial_i a_j$ (3.1)

donde se lo escribí de manera de que sea evidente la existencia de un vacío no trivial para $e_i^2 = m^2/\lambda$, en la densidad hamiltoniana,

$$\mathcal{H} = a_0 \left(\frac{\partial_i e_i}{g_1^2} + kb \right) + \frac{1}{g_3^2}b^2 + \frac{1}{g_2^2}(\partial_i e_j)^2 + \frac{\lambda}{4g_2^2}\left(e_i^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2 - \frac{m^4}{4g_2^2\lambda}$$
(3.2)

Tal solución de vacío toma la forma general $\vec{e} = m/\sqrt{\lambda}(\cos(\alpha(\varphi)), \sin(\alpha(\varphi)))$, donde $\alpha(\varphi)$ es una función que satisface

$$\alpha(2\pi) - \alpha(0) = 2n\pi$$
(3.3)

porque se debe cumplir que $e(0) = e(2\pi)$. El entero n caracteriza el tipo topológico de \vec{e} .

Siendo así, corresponde preguntarse si existen soluciones de las ecuaciones de movimiento que tengan vacíos topológicamente no triviales como condición de contorno en infinito. En particular, nos concentraremos en soluciones que tiendan al vacío que tiene $n = 1$.

3.2. Soluciones en el disco

Las ecuaciones de movimiento resultantes de la acción (3.1) son, para el caso estático

$$g_1^2(\nabla^2 e_i + m^2 e_i - \lambda e_i e_j^2) = g_2^2(\partial_i a_0)$$
(3.4)

$$\partial_i e^i + kg_1^2 b = 0$$
(3.5)

$$\partial_j(b[a] - g_3^2 ka_0) = 0$$
(3.6)

De las ecuaciones (3.4), (3.5) y (3.6) se puede obtener la siguiente ecuación en la que solo aparece \vec{e}

$$-C\partial_i\vec{\nabla}\cdot\vec{e}+\nabla^2e_i+m^2e_i-\lambda e^2e_i=0 \quad (3.7)$$

con $C = \frac{g_2^2}{k^2g_1^4g_3^2}$

Nuestra intención es resolver estas ecuaciones para $n = 1$, siendo así, nuestro «Ansatz» considerará al campo eléctrico radial y dependiente sólo de la coordenada radial, es decir $\vec{e} = e_r(r)\check{r}$, con $e_r \rightarrow m/\sqrt{\lambda}$ en el infinito.

Para el caso $k = 0$, tenemos que la ecuación (3.5) en coordenadas cilíndricas se escribe

$$\frac{1}{r}\partial_r(re_r) = 0 \quad (3.8)$$

lo cual implica que $e_r = c/r$, cuyo decaimiento como $1/r$ contradice la condición de contorno $e_r \rightarrow m/\sqrt{\lambda}$. Es decir que en ausencia del término de Chern-Simons, no existen soluciones con topología no trivial.

Veamos que pasa para $k \neq 0$. En ese caso, la ecuación vectorial (3.7) pasa a ser una única ecuación

$$(1-C)\left(e_r'' + \frac{1}{r}e_r' - \frac{1}{r^2}e_r\right) + m^2e_r - \lambda e_r^3 = 0 \quad (3.9)$$

Analicemos su comportamiento en el origen y en el infinito introduciendo un término βr^s del desarrollo en series de e_r . Al hacerlo, la ecuación (3.9) toma la forma

$$(1-C)\beta r^{s-2}(s^2-1) + m^2\beta r^s - \lambda\beta^3r^{3s} = 0 \quad (3.10)$$

Para r pequeño tenemos que $s = \pm 1$. Esto significa que existe una solución regular en el origen. Como queremos que e_r vaya a una constante para r grande, tenemos que mirar el caso en que $s = 0$. En ese límite vemos que $\beta^2 = m^2/\lambda$, es decir, que efectivamente va a vacío en infinito.

Teniendo en cuenta este análisis, resolvimos la ecuación (3.9) numéricamente utilizando *Mathematica*, obteniendo el gráfico que se muestra en la figura 3.1

Como e_r va constante en el infinito, la ecuación (3.5) nos dice que b irá a cero como $1/r$. Por lo tanto, el término con b^2 en la densidad hamiltoniana (3.2) va a cero como $1/r^2$. Considerando el factor r en la medida de integración, esto implica que la contribución a la energía de dicho término diverge logarítmicamente. Por otro lado, el término $(\partial_i e_j)^2$ para nuestro «Ansatz» toma la forma $(\partial_r e_r)^2 + e_r/r^2$, que también tiende a cero como $1/r^2$ contribuyendo con una divergencia logarítmica. Teniendo en cuenta que el factor que acompaña a a_0 en (3.2) no es más que una relación de vínculo que se anula on shell, concluimos que la solución propuesta tiene energía infinita.

Se podría pensar que la mencionada divergencia se debe a que el «Ansatz» con $n = 1$ considerado es demasiado sencillo. Sin embargo al analizar la ecuación (3.5) nos enteramos que sólo es posible anular b en el infinito respetando las condiciones de contorno si e_θ es lineal en θ , lo cual rompe con la periodicidad que se necesita en dicha coordenada.

Por lo tanto, las solución aquí construida sólo tiene sentido físico como una solución en una muestra con forma de disco de radio finito.

El problema de la energía infinita aparece también en los vórtices de Abrikosov para un campo escalar. En ese caso, el problema se soluciona agregando un campo de gauge. Teniendo en cuenta esto último, tiene sentido buscar soluciones con energía finita de esta teoría agregando con un campo escalar de Lifshitz. Esta posibilidad queda abierta para investigación futura.

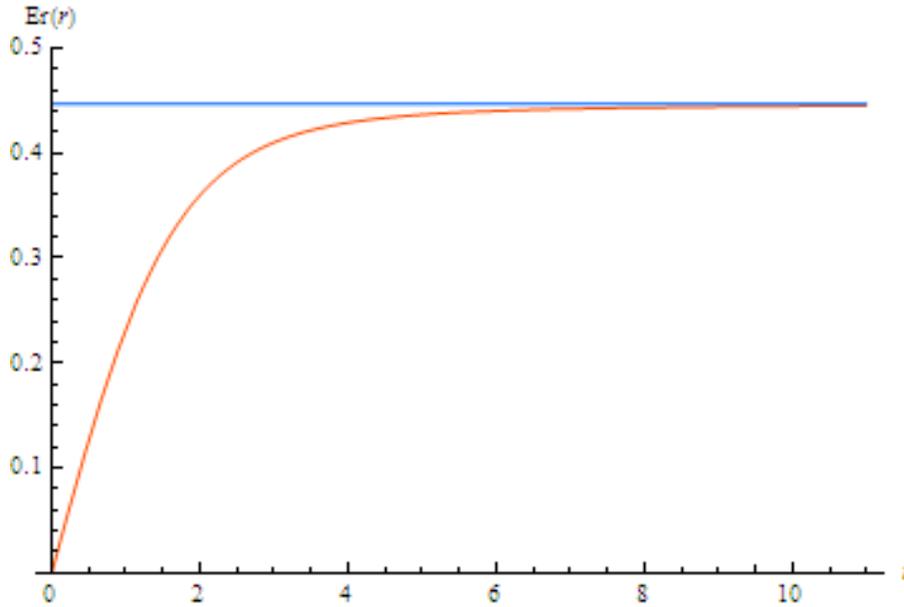


Fig. 3.1: La curva roja muestra el campo eléctrico radial en función de la posición para $m^2/\lambda = 0,2$. La línea azul corresponde al valor de vacío del campo E . er

3.3. Soluciones en la esfera

Nuestra solución puede presentarse en dos formatos, como un campo radial saliente o como uno entrante. Siendo así podríamos considerar pegar estas dos soluciones poniendo sus orígenes en los polos de una esfera. El intervalo sobre la superficie de una esfera es

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (3.11)$$

El «Ansatz» equivalente sobre la esfera va a ser considerar $e_\phi = 0$ y $e_\theta = e_\theta(\theta)$. Siendo así, vamos a tener que la ecuación (3.7) toma ahora la forma

$$\frac{(1-C)}{R^2} (e_\theta'' + \text{ctg}(\theta) e_\theta' - \text{csc}^2(\theta) e_\theta) + m^2 e_\theta - \lambda R^2 e_\theta^3 = 0 \quad (3.12)$$

donde $e_\theta = e_\theta(\theta)$, y la ecuación (3.9) se recupera para θ cercano a cero o a π . Esto significa que seguirá se respetando el comportamiento lineal alrededor de los polos. Sin embargo, en el ecuador no tiene por qué ir a su valor de vacío, ya que al hacer un desarrollo en series de potencias, deberá considerar también los términos de orden superior.

Resolvimos la ecuación (3.12) numéricamente en *Mathematica*, pidiendo que la derivada del campo se anule en el ecuador y haciendo un «shooting» sobre los posibles valores que puede tomar el campo ahí, hasta obtener soluciones que vayan a cero en los polos. Es interesante notar que estas soluciones tienen energía finita siempre que el radio R de la esfera donde habitan sea finito. El límite de R yendo a infinito se corresponde con el caso de espacio plano.

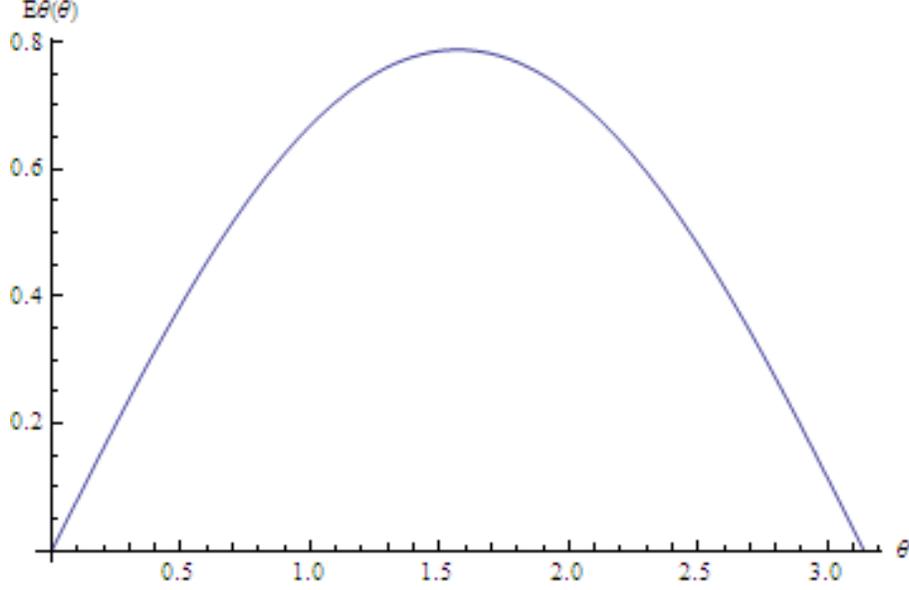


Fig. 3.2: Campo eléctrico radial en función de la posición para $m^2/\lambda = 4,5$ en una esfera de radio 1.

ere

3.4. Soluciones en el espacio hiperbólico

La métrica de un espacio hiperbólico en coordenadas polares es [13]

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2(r/R) d\theta^2 \quad (3.13)$$

Los únicos símbolos de Christoffel no nulos son

$$\Gamma_{\theta r}^{\theta} = \Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{R} \operatorname{ctgh}(r/R) \quad (3.14)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{R} \cosh(r/R) \sinh(r/R). \quad (3.15)$$

Siendo así, la ecuación (3.7) toma la forma

$$(1 - C) \left(e_r'' + \frac{1}{R} \operatorname{ctgh}(r/R) e_r' - \frac{1}{R^2} \operatorname{csch}^2(r/R) e_r \right) + m^2 e_r - \lambda e_r^3 = 0 \quad (3.16)$$

donde se ha tenido en cuenta el «Ansatz» $e_r = e_r(r)$ y $e_{\theta} = 0$.

Introduciendo esta ecuación en *Mathematica* y dejando correr las condiciones de contorno en el origen, se puede encontrar una solución como la que se ve en la figura (3.3). Se puede ver que la misma va asintóticamente al valor de vacío del campo $m/\sqrt{\lambda}$.

De la ecuación

$$b = -\frac{1}{g_3 k} e_{;\alpha}^{\alpha} = -\frac{1}{g_3 k} (e_{,\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha} e^{\beta}) \quad (3.17)$$

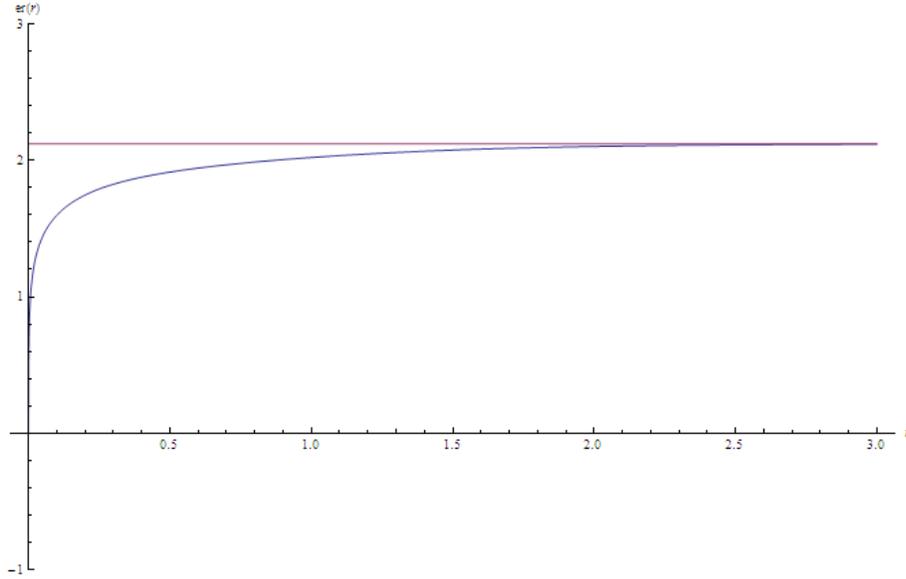


Fig. 3.3: En azul, el campo eléctrico radial en función de la posición para $m^2/\lambda = 4,5$ en un espacio hiperbólico con curvatura 1. En violeta, el valor de vacío esperado. Cómo se ve, ambas curvas tienden a superponerse a medida que nos alejamos del origen. erh

podemos ver que, dado que el campo e_r va a una constante para radios grandes, el comportamiento de b estará regido por el símbolo de Christoffel, lo cual resulta en $b \sim \text{ctgh}(r/R) \sim \text{cte}$. Teniendo en cuenta que la medida de integración en este sistema de coordenadas es $R \sinh(r/R)$, se ve que la contribución a energía total del sistema proveniente del término b^2 en la densidad hamiltoniana diverge exponencialmente.

4. COEFICIENTES DE TRANSPORTE

Se suele construir una teoría de Chern-Simons alrededor de la existencia de una corriente conservada, la cual permite inmediatamente definir un campo de gauge de la siguiente manera:

$$J^\mu = \frac{1}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu a_\rho \quad (4.1)$$

Una vez definido, el lagrangiano para el campo a_ρ será el discutido más arriba, por ser aquel que respeta la simetría $z = 2$. Al mismo, lo reescribiremos dejando el número mínimo necesario de constantes libres de la siguiente manera

$$S = \int d^2x dt \frac{1}{g^2} \left[e_i \partial_t a_i + a_t \partial_i e_i - \frac{\kappa^2}{2} (\partial_i e_j)^2 - \frac{1}{2} b^2 - \frac{r}{2} (e_i)^2 - \frac{\lambda}{4} (e_i)^4 \right] + \frac{k}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda \quad (4.2)$$

Vale la pena preguntarse como se comportará el sistema, frente a la acción de un campo externo de gauge A^μ que se acople mínimamente a la corriente conservada, de manera tal que

$$\delta S = \int d^2x dt A^\mu J_\mu \quad (4.3)$$

A orden cuadrático en la acción, podemos integrar para escribir una acción efectiva para el campo externo. La acción completa tiene la forma

$$S = \int d^2x dt \left(\frac{1}{2} O_{mn} \mathfrak{a}_m \mathfrak{a}_n + J_\rho A^\rho \right). \quad (4.4)$$

donde $m, n = 0, \dots, 4$, $\mathfrak{a}_m = a_m$ para $m = 0, 1, 2$ y $\mathfrak{a}_m = e_m$ para $m = 3, 4$ y $\mu, \nu = 0, \dots, 3$. La forma del operador O_{mn} se puede leer de la expresión 4.2. Siendo así, podemos encontrar la siguiente ecuación de movimiento para la transformada de Fourier

$$O_{\mu n}(i\omega_n, \vec{p}) \mathfrak{a}_n(i\omega_n, \vec{p}) - \frac{1}{2\pi} \epsilon_{\lambda\rho\mu} i p_\rho A^\lambda(i\omega_n, \vec{p}) = 0 \quad (4.5)$$

que se puede reescribir usando la definición del campo \mathfrak{a} y de la corriente J :

$$\begin{aligned} J_\alpha(i\omega_n, \vec{p}) &= \frac{1}{2\pi} \epsilon_{\alpha\beta\nu} i p_\beta a_\nu(i\omega_n, \vec{p}) = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} O_{\mu\nu}^{-1}(i\omega_n, \vec{p}) \epsilon_{\alpha\beta\nu} \epsilon_{\lambda\rho\mu} p_\beta p_\rho A^\lambda(i\omega_n, \vec{p}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde

$$O_{\alpha\beta}^{-1} = \langle a_\alpha(-i\omega_n, -\vec{p}) a_\beta(i\omega_n, \vec{p}) \rangle \quad (4.7)$$

La misma ecuación de movimiento se puede obtener de la siguiente acción efectiva variándola respecto a A_μ

$$S_{ef} = \frac{1}{2} \sum_n \int d^2p A_\mu(-i\omega_n, -\vec{p}) K_{\mu\nu}(i\omega_n, \vec{p}) A_\nu(i\omega_n, \vec{p}) \quad (4.8)$$

donde

$$K_{\mu\nu}(i\omega_n, \vec{p}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \epsilon_{\alpha\beta\nu} \epsilon_{\lambda\rho\mu} p_\beta p_\rho \langle a_\alpha(-i\omega_n, -\vec{p}) a_\beta(i\omega_n, \vec{p}) \rangle \quad (4.9)$$

Por otro lado, la definición tradicional de la conductividad es

$$J^i = \sigma_{ij} E^j. \quad (4.10)$$

Si además consideramos el caso de momento nulo, tenemos que $E^i(i\omega_n, \vec{p}) = i\omega A^i(i\omega_n, \vec{p})$, lo que implica que la conductividad será [11]

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{i\omega} K_{ij}(i\omega, 0) \quad (4.11)$$

Como las funciones de Green tendrán polos para ciertos valores de ω , aun queda elegir cómo saltar dichos polos. El cambio $i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta$ nos asegura que las funciones de Green que utilicemos sean las retardadas. Siendo así, la expresión para la conductividad queda

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{i\omega + \delta} K_{\mu\nu}(\omega + i\delta, \vec{p} = 0) \quad (4.12)$$

Para calcular la conductividad es necesario en primer lugar calcular los propagadores, para lo cual es necesario fijar un gauge. Nosotros elegimos el gauge $\partial_i a_i = 0$ e hicimos explícita dicha elección agregando un término $(\alpha/2)(\partial_i a_i)^2$ en la densidad lagrangiana. Finalmente, tomamos el valor $\alpha = -1$ ya que simplifica los cálculos, y corresponde al gauge de Feynman en la teoría del electromagnetismo común.

Veamos cuál es el valor de dicha conductividad en las distintas fases y en el punto crítico.

4.1. En el punto crítico, $r = 0$

Los propagadores son

$$\begin{aligned}
\langle e_i(-i\omega_n, -\vec{p})e_j(i\omega_n, \vec{p}) \rangle &= -\frac{g^2 p^2}{\omega_n^2 + \tilde{\kappa}^2 p^4} P_{ij}^T(p) - \frac{g^6 \kappa^2 k^2 p^2 \delta_{ij} + g^4 k \omega_n \epsilon_{ij}}{\omega_n^2 + \tilde{\kappa}^2 p^4} \\
\langle e_i(-i\omega_n, -\vec{p})a_j(i\omega_n, \vec{p}) \rangle &= -\frac{g^2 \omega_n}{\omega_n^2 + \tilde{\kappa}^2 p^4} P_{ij}^T(p) - \frac{g^4 \kappa^2 k p_i \epsilon_{jk} p_k}{\omega_n^2 + \tilde{\kappa}^2 p^4} \\
\langle e_i(-i\omega_n, -\vec{p})a_t(i\omega_n, \vec{p}) \rangle &= -\frac{-ig^2((\omega_n^2 + \kappa^2 p^4)p_i - \kappa^2 g^2 k \omega_n \epsilon_{ij} p_j)}{p^2(\omega_n^2 + \tilde{\kappa}^2 p^4)} \\
\langle a_i(-i\omega_n, -\vec{p})a_j(i\omega_n, \vec{p}) \rangle &= -\frac{g^2 \kappa^2 p^2}{\omega_n^2 + \tilde{\kappa}^2 p^4} P_{ij}^T(p) - \frac{g^2 p_i p_j}{p^2} \\
\langle a_t(-i\omega_n, -\vec{p})a_i(i\omega_n, \vec{p}) \rangle &= \frac{ig^2 p_i \omega_n}{p^4} - \frac{ig^4 \kappa^4 k p^6 \epsilon_{ij} p_j}{p^4(\omega_n^2 + \tilde{\kappa}^2 p^4)} \\
\langle a_t(-i\omega_n, -\vec{p})a_t(i\omega_n, \vec{p}) \rangle &= \frac{g^2(\omega_n^4 + (\kappa^2 + \tilde{\kappa}^2)\omega_n^2 p^4 + \kappa^4 p^8)}{p^4(\omega_n^2 + \tilde{\kappa}^2 p^4)}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

donde $P_{ij}^T(p) = \delta_{ij} - p_i p_j / p^2$ es el proyector en la dirección transversal y $\tilde{\kappa}^2 = \kappa^2(1 + \kappa^2 g^4 k^2)$. Los mismos muestran como en esta teoría el término de Chern-Simons no le da masa a los campos de gauge, en contraste con lo que sucede con la teoría con $z = 1$.

Sutituyendo los mismos en la ecuación (4.9), se obtiene

$$\begin{aligned}
K_{xx}(i\omega_n, \vec{p}) &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{\kappa^2 g^2 p^2 (\omega_n^2 + \kappa^2 p_y^2 p^2)}{\omega_n^2 + \tilde{\kappa}^2 p^4} \\
K_{xy}(i\omega_n, \vec{p}) &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{\kappa^2 g^2 p^4 (g^2 \tilde{k} \omega_n - p_x p_y)}{\omega_n^2 + \tilde{\kappa}^2 p^4}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

de donde se deduce de manera inmediata que el sistema es absolutamente aislante en el punto crítico,

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 0 \\
\sigma_{xy} &= 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

4.2. En la fase isotrópica, $r > 0$

En la fase con $r > 0$, es de esperarse que el comportamiento sea el mismo que para la teoría tradicional de Maxwell-Chern-Simons, ya que el término e_i^2 rompe la invarianza de escala con $z = 2$, y a bajas energías nuestro lagrangiano y el de Maxwell-Chern-Simon coinciden. No daremos la expresión explícita de los propagadores, ya que es sumamente engorrosa. En cambio las funciones de respuesta son

$$\begin{aligned}
K_{xx}(i\omega_n, \vec{p}) &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{g^2 (g^4 r^2 p_y^2 + \kappa^2 p^2 (\omega_n^2 + \kappa^2 p_y^2 p^2) + g^2 r (\omega_n^2 + 2\kappa^2 p_y^2 p^2))}{g^8 k^2 r^2 + \omega_n^2 + g^2 r p^2 + 2\kappa^2 g^2 k^2 r p^2 + \kappa^2 p^4 + \kappa^4 g^4 k^2 p^4} \\
K_{xy}(i\omega_n, \vec{p}) &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{g^2 (g^2 k \omega_n - p_x p_y) (g^2 r + \kappa^2 p^4)}{g^8 k^2 r^2 + \omega_n^2 + g^2 r p^2 + 2\kappa^2 g^2 k^2 r p^2 + \kappa^2 p^4 + \kappa^4 g^4 k^2 p^4}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

de donde se deduce

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{i}{8\pi^2 k} \frac{\omega/g^4 k r}{1 - (\omega/g^4 k r)^2} \\ \sigma_{xy} &= \frac{1}{8\pi^2 k} \frac{1}{1 - (\omega/g^4 k r)^2}\end{aligned}\quad (4.17)$$

Vemos que el efecto del término de Chern-Simons es introducir una conductividad Hall en la dirección transversal al campo eléctrico. A frecuencias bajas, la parte real de la conductividad longitudinal se anula y la conductividad Hall se hace $1/8\pi^2 k$.

4.3. En la fase anisotrópica, $r < 0$

Para $r < 0$, e_i desarrolla un valor de expectación, rompiendo así la simetría rotacional $SO(2)$. Suponiendo que no haya winding, podemos elegir al campo de vacío como $e_i = (\sqrt{-r/\lambda}, 0)$. Los campos dinámicos, serán perturbaciones lineales alrededor de este valor de vacío, es decir $e_i = (\sqrt{-r/\lambda} + e_x, e_y)$. Sustituyendo esto en (4.2) obtenemos

$$S = \int d^2 x dt \frac{1}{g^2} \left[e_i \partial_t a_i + a_i \partial_i e_i - \frac{\kappa^2}{2} (\partial_i e_j)^2 - \frac{1}{2} b^2 + r(e_x)^2 + O(e^3) \right] + \frac{k}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda \quad (4.18)$$

donde tiramos los términos constantes y los de orden superior en los campos. En esta expresión, se puede ver como uno de los grados de libertad del campo tomó masa mientras que el otro no, correspondiéndose con un bosón de Goldstone (ver apéndice).

Dado que nos interesa la física de bajas energías, podemos elegir quedarnos además a orden más bajo en derivadas, en cuyo caso debemos hacer el reemplazo $(\partial_i e_j)^2 \rightarrow (\partial_i e_y)^2$. Con esto obtenemos

$$\begin{aligned}K_{xx}(i\omega_n, \vec{p}) &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\kappa^2 g^2 p^2 (\omega_n^2 + g^2 r p_y^2)}{\omega_n^2 + g^2 r p_y^2 + \kappa^2 p^2 (g^6 k^2 r + p_x^2)} \\ K_{yy}(i\omega_n, \vec{p}) &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{g^2 (\omega_n^2 + \kappa^2 r p_x^2 p^2) (2r + \kappa^2 p^2)}{\omega_n^2 + g^2 r p_y^2 + \kappa^2 p^2 (g^6 k^2 r + p_x^2)} \\ K_{xy}(i\omega_n, \vec{p}) &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\kappa^2 g^2 (g^2 k \omega_n - p_x p_y) p^2 (2r + \kappa^2 p^2)}{\omega_n^2 + g^2 r p_y^2 + \kappa^2 p^2 (g^6 k^2 r + p_x^2)}\end{aligned}\quad (4.19)$$

Entonces tenemos para las conductividades.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(\omega) &= 0 \\ \sigma_{yy}(\omega) &= \frac{g^2 r}{2\pi} \delta(\omega) + \frac{i g^2 r}{2\pi^2 \omega} \\ \sigma_{xy}(\omega) &= 0\end{aligned}\quad (4.20)$$

Lo que implica que el sistema es aislante en una dirección y superconductor en la dirección transversal.

Vale la pena aclarar que la simetría rotacional puede no ser una simetría exacta del sistema que estamos analizando. Dicha rotura de simetría puede venir de la red cristalina del material, que despreciamos a bajas energías, o de efectos de desorden o impurezas. Para tener en cuenta dichos efectos, vamos a suponer que podemos cargarlos todos en la parte cuadrática del campo eléctrico, de manera tal que

nuestro lagrangiano se verá modificado cambiando $e_i^2 \rightarrow (e_x^2 + (1 - \alpha^2)e_y^2)$ en el término que acompaña a r . Esta ruptura explícita de la isotropía estará controlada por el parámetro de anisotropía α^2 , el cual puede ser tanto positivo como negativo, y se anula para el caso isotrópico.

En este último caso la teoría efectiva a bajas energías en la fase anisotrópica será una teoría anisotrópica de Maxwell-Chern-Simons. Las funciones de respuesta serán pequeñas modificaciones de las (4.17) y las conductividades serán

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(\omega) &= \alpha \frac{i}{8\pi^2 k} \frac{\omega/g^4 k r \alpha}{1 - (\omega/g^4 k r \alpha)^2} \\ \sigma_{yy}(\omega) &= \frac{1}{\alpha} \frac{i}{8\pi^2 k} \cdot \frac{\omega/g^4 k r \alpha}{1 - (\omega/g^4 k r \alpha)^2} \\ \sigma_{xy}(\omega) &= \frac{1}{8\pi^2 k} \frac{1}{1 - (\omega/g^4 k r \alpha)^2}\end{aligned}\tag{4.21}$$

Vemos que en este caso, el efecto de la ruptura explícita de simetría rotacional conspira con el término de Chern-Simons para dar origen a una conductividad Hall trasnversal al campo aplicado.

4.4. Correcciones en derivadas más altas

Siguiendo la filosofía de [12], podemos pensar términos del estilo de Chern-Simons pero con derivadas más altas, que no son topológicos y que no rompen la invarianza frente a cambios de escala con $z = 2$. Para ello, podemos agregar al lagrangiano términos de la forma

$$g_e \epsilon_{ij} e_i \partial_t e_j + g_b b \epsilon_{ij} \partial_i e_j\tag{4.22}$$

Con estas correcciones, si analizamos la conductividad en el punto crítico, tenemos que la misma es

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(\omega) &= 0 \\ \sigma_{xy}(\omega) &= -\frac{g^4}{2\pi^2} \frac{g_e}{\tilde{g}_e}\end{aligned}\tag{4.23}$$

donde definimos $\tilde{g}_e = (1 + 2g^4 g_e \tilde{k})$. Podemos ver que aparece una conductividad Hall debida a uno de los nuevos términos.

En cambio, la conductividad en la fase isotrópica, $r > 0$, será

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(\omega) &= -\frac{i}{4\pi^2} \frac{g^2 r \omega}{g^4 k^2 r^2 + \omega^2 \tilde{g}_e^2} \\ \sigma_{xy}(\omega) &= \frac{g^4}{4\pi^2} \frac{k r^2 + 2g_e \tilde{g}_e \omega^2}{g^4 k^2 r^2 + \omega^2 \tilde{g}_e^2}\end{aligned}\tag{4.24}$$

donde nuevamente los términos de Chern-Simons en derivadas más altas contribuyen a la conductividad Hall.

Para la fase anisotrópica, con $r < 0$, obtenemos las siguientes conductividades

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}(\omega) &= 0 \\
 \sigma_{yy}(\omega) &= \frac{g^2 r}{2\pi \tilde{g}_e^2} \delta(\omega) + \frac{i}{2\pi^2} \frac{g^2 r}{\omega \tilde{g}_e^2} \\
 \sigma_{xy}(\omega) &= -\frac{1}{2\pi^2} \frac{g^4 g_e}{\tilde{g}_e^2}
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Una vez más, podemos apreciar también en este caso, la aparición de una conductividad Hall debida a las nuevas deformaciones incorporadas a la teoría.

Para el caso en que $SO(2)$ no es una simetría exacta del sistema

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}(\omega) &= -\frac{i\alpha^2}{4\pi^2} \frac{g^2(1+g^2)r\omega}{2g^4(1+g^2)k^2r^2\alpha^2 + \omega^2\tilde{g}_e^2} \\
 \sigma_{yy}(\omega) &= -\frac{i}{2\pi^2} \frac{g^2r\omega}{2g^4(1+g^2)k^2r^2\alpha^2 + \omega^2\tilde{g}_e^2} \\
 \sigma_{xy}(\omega) &= \frac{g^4}{4\pi^2} \frac{kr^2\alpha^2(1+g^2) + g_e\tilde{g}_e\omega^2}{2g^4(1+g^2)k^2\pi r^2\alpha^2 + \omega^2\tilde{g}_e^2}
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

ahora la conductividad transversa tiene contribuciones debidas a los nuevos términos y contribuciones debidas a la ruptura explícita de simetría. Es importante destacar que, al igual que en el caso anterior, la ruptura explícita de simetría se pone de manifiesto en la conductividad Hall sólo en presencia de un término de Chern-Simons

5. CONCLUSIONES

En este trabajo de diploma estudiamos la teoría de Chern-Simons-Lifshitz, que es una teoría invariante de escala con escaleo anisotropico entre tiempo y espacio, y que se obtiene de deformar con un término de Chern-Simons el dual electromagnético de un campo de Lifshitz.

Esta teoría describe un sistema al cual podemos sintonizar en su punto crítico variando r , el coeficiente que acompaña al cuadrado del campo eléctrico e_i^2 . De cada lado del punto crítico yacen las siguientes fases. Cuando r es positivo, la teoría en el infrarrojo se corresponde con la teoría de Maxwell-Chern-Simons. Para r negativo, el vacío rompe espontáneamente $SO(2)$ y tenemos entonces un bosón de Goldstone. Si en cambio el sistema sólo tiene simetría rotacional discreta, las dos componentes del campo eléctrico tienen masa. Cualquiera sea el caso, el estado de simetría rota tiene una dirección preferida y las fluctuaciones alrededor de este estado son invariantes frente a la inversión de dicha dirección. Siendo así, la fase tiene simetría nemática.

La fase anisotrópica admite también soluciones con número de winding $n = 1$, que no existen si se apaga el término de Chern-Simons, haciendo que dicho comportamiento no pueda aparecer en la teoría dual escalar local. Dichas soluciones tienen una energía que crece con el tamaño del sistema, haciendo que solo puedan aplicarse a sistemas físicos reales en muestras pequeñas.

Si consideramos a la corriente conservada de esta teoría como una corriente electromagnética, entonces la teoría describe una transición de fase entre un estado de Hall cuántico (para la fase con $r > 0$) y una fase anisotrópica (para $r < 0$). Para r positivo, las conductividades coinciden con la teoría de Maxwell-Chern-Simons, la descripción efectiva del efecto Hall. Cuando r se anula, el sistema se vuelve aislante para todas las frecuencias. Cuando r es negativo el sistema es aislante a lo largo de la dirección ordenada, mientras presenta una delta de Dirac en la conductividad longitudinal, como un superconductor, en la dirección ortogonal. Si se introducen términos con ruptura explícita de la simetría rotacional en la acción, el sistema estará en un estado de Hall cuántico con la misma conductividad Hall que en la otra fase de la transición y una conductividad longitudinal anisotrópica y finita.

Si agregamos ahora a la teoría términos de Chern-Simons en derivadas más altas, que respetan la simetría de escaleo del sistema, encontramos un comportamiento cualitativamente distinto en el punto crítico y en la fase anisotrópica para el caso de un sistema con simetría $SO(2)$. Por otro lado, tanto en la fase Hall como en la fase Hall anisotrópica para un sistema con ruptura explícita de simetría rotacional, el comportamiento es cualitativamente el mismo, pero con un parámetro libre más a tener en cuenta. Tanto en el punto crítico como en la fase anisotrópica aparecen conductividades Hall independientes de la frecuencia que otrora eran cero.

Como perspectivas para futuras investigaciones queda abierta la posibilidad de introducir en la teoría un campo escalar de Lifshitz cargado con respecto al campo a_i , con la esperanza de obtener soluciones de vórtice con energía finita.

Apéndice

A. ROTURA ESPONTÁNEA DE SIMETRÍAS

El estudio de rotura espontánea de simetrías tuvo una explosión desde la propuesta del mecanismo de Higgs para darle masa a las diferentes partículas del modelo estándar. Resulta interesante cuando uno se encuentra frente a la rotura espontánea de alguna simetría global saber que ocurrirá con los distintos grados de libertad de la teoría: ¿Cuáles tomarán masa? ¿Cuáles no?. Respecto a esto, en física de partículas se cuenta con el teorema de Goldstone.

Una demostración general del mismo, requiere de hipótesis que no siempre se cumplen. Por ejemplo, tratar con una teoría que viva en un espacio tetradimensional de Minkowski, que no se trate de una teoría de gauge, o que la simetría global rota sea interna. Estos requisitos no son siquiera cumplidos por el modelo estándar, sin embargo los resultados del teorema de Goldstone nos ayudan a entender que pasa con los distintos grados de libertad involucrados y su conocimiento resulta de utilidad a la hora de estudiar rotura de simetrías globales en diferentes contextos. Siendo así, presentaré a continuación dicho teorema, y un ejemplo sencillo donde se lo puede ver actuar en una teoría que satisface todas las hipótesis.

A.1. El teorema de Goldstone

Consideremos una teoría descrita por un lagrangiano \mathcal{L} que tiene una simetría global continua G , generada por cargas Q^a . Entre otras cosas, la teoría contiene campos escalares elementales Φ_i , $i = 1, \dots, n$, que tomaremos reales. De ser complejos, podrían ser transformados en reales con solo duplicar el número de vectores en la base. El teorema enuncia que la rotura espontánea de G involucra polos en $p^2 = 0$ en ciertas funciones de Green lo cual implica la existencia de bosones sin masa en el espectro.

Sea entonces la función de Green[5]:

$$G_{\mu,k}^a(x-y) = \langle 0|Tj_\mu^a(x)\Phi_k(y)|0\rangle \quad (\text{A.1})$$

donde $j_\mu^a(x)$ es la corriente correspondiente al generador Q^a y T significa que el producto está ordenado temporalmente. Su derivada será

$$\partial_{(x)}^\mu G_{\mu,k}^a(x-y) = \delta(x^0 - y^0) \langle 0|[j_0^a(x), \Phi_k(y)]|0\rangle \quad (\text{A.2})$$

Sabemos además que los campos transforman según

$$\Phi_i \rightarrow \Phi'_i = e^{i\alpha_a Q^a} \Phi_i e^{-i\alpha_a Q^a} \approx \Phi_i + i\delta\alpha_a [Q^a, \Phi_i] \quad (\text{A.3})$$

y si comparo con

$$\Phi_i \rightarrow \Phi'_i = (\delta_{ij} - i\delta\alpha^a T_{ij}^a)\Phi_j \quad (\text{A.4})$$

deduzco inmediatamente

$$[j_0^a(\mathbf{x}, t), \Phi_k(\mathbf{y}, t)] = -T_{kj}^a \Phi_j(\mathbf{y}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (\text{A.5})$$

Entonces, haciendole una traslación al campo

$$\Phi_j(0) = e^{ip^\mu y_\mu} \Phi(y) e^{-ip^\mu y_\mu} \quad (\text{A.6})$$

y teniendo en cuenta que $p^\mu |0\rangle = 0$, obtenemos

$$\partial_{(x)}^\mu G_{\mu,k}^a(x-y) = -\delta(x-y) T_{kj}^a \langle 0 | \Phi_j(0) | 0 \rangle \quad (\text{A.7})$$

Las corrientes conservadas no están sujetas a renormalización y las constantes de renormalización de los campos $\Phi_i^B = Z_i^{1/2} = Z_i^{1/2} \Phi_i^R$ no llevan los índices de grupo porque el lagrangiano es invariante bajo G . Así pues, los campos renormalizados transforman bajo el grupo G de la misma manera que los campos desnudos y la identidad de Waard (A.7) vale tanto para las funciones de Green desnudas como renormalizadas. Introducimos la transformada de Fourier $\tilde{G}_{\mu,k}^a(p)$

$$G_{\mu,k}^a(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp[-ip(x-y)] \tilde{G}_{\mu,k}^a(p) \quad (\text{A.8})$$

para obtener

$$ip^\mu \tilde{G}_{\mu,k}^a(p) = T_{kj}^a \langle 0 | \Phi_j(0) | 0 \rangle \quad (\text{A.9})$$

De la invarianza de Lorentz, la estructura general de $\tilde{G}_{\mu,k}^a(p)$ puede ser escrita como

$$\tilde{G}_{\mu,k}^a(p) = p_\mu F_k^a(p^2) \quad (\text{A.10})$$

de manera que

$$F_k^a(p^2) = -iT_{kj}^a \langle 0 | \Phi_j(0) | 0 \rangle / p^2 \quad (\text{A.11})$$

Vemos que la función de Green presenta un polo en $p^2 = 0$. Falta entonces demostrar, que dicho polo implica la existencia de bosones sin masa en el espectro físico. Con este fin, consideremos el elemento de matriz

$$\langle 0 | j_\mu^a(x) | \pi^k(p) \rangle = if_k^a p_\mu \exp(-ipx) \quad (\text{A.12})$$

donde el vector $|\pi^k(p)\rangle$ describe una partícula de masa m_k que es un cuanto del campo Φ_k . Usando el procedimiento de la fórmula de reducción de Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ) [6]

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^m \int d^4 x_i e^{ik_i x_i} \prod_{j=1}^n \int d^4 y_j e^{ip_j y_j} \times \langle 0 | T \Phi(x_1) \dots \Phi(x_m) \Phi(y_1) \dots \Phi(y_n) | 0 \rangle = \\ & = \left(\prod_{i=1}^m \frac{i\sqrt{Z}}{k_i^2 - m^2} \right) \left(\prod_{j=1}^n \frac{i\sqrt{Z}}{p_j^2 - m^2} \right) \langle \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n | iT | \mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_n \rangle \end{aligned}$$

uno puede relacionar el elemento de matriz $\langle 0 | j_\mu^a(x) | \pi^k(p) \rangle$ con la función de Green $\tilde{G}_{\mu,k}^a(p)$. Veamos cómo.

Teniendo en cuenta los tiempos a los cuales están definidos los operadores, y su acción sobre el vacío, podemos hacer las siguientes identificaciones:

$$\begin{aligned}\langle 0|j_\mu^a(x)|\pi^k(p)\rangle &= \sqrt{2E_k}Z^{-1/2}\langle 0|j_\mu^a(x)a_{in}^\dagger|0\rangle = \sqrt{2E_k}Z^{-1/2}\langle 0|Tj_\mu^a(x)a_{in}^\dagger|0\rangle = \\ &= \sqrt{2E_k}Z^{-1/2}\langle 0|Tj_\mu^a(x)(a_{in}^\dagger - a_{out}^\dagger)|0\rangle\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

donde

$$(2E_k)^{1/2}a_k^{\dagger,(in)} = -iZ^{-1/2}\lim_{t\rightarrow-\infty}\int d^3x e^{-ikx}\partial_0^{\leftrightarrow}\Phi\quad (\text{A.14})$$

y

$$(2E_k)^{1/2}a_k^{\dagger,(out)} = -iZ^{-1/2}\lim_{t\rightarrow+\infty}\int d^3x e^{-ikx}\partial_0^{\leftrightarrow}\Phi\quad (\text{A.15})$$

Por otro lado, tenemos que

$$\left(\lim_{t\rightarrow+\infty} - \lim_{t\rightarrow-\infty}\right)\int d^3x f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x f(x)\quad (\text{A.16})$$

donde jugando un poco con la integración por parte obtenemos para $f(x) = -iZ^{-1/2}e^{-ikx}\partial^{\leftrightarrow}\Phi$

$$(2E_k)^{1/2}(a_k^{\dagger,(in)} - a_k^{\dagger,(out)}) = iZ^{-1/2}\int d^4x e^{-ikx}(\square + m^2)\Phi(x)\quad (\text{A.17})$$

Con estas consideraciones, concluimos que el elemento de matriz se puede escribir como

$$\langle 0|j_\mu^a(x)|\pi^k(p)\rangle = iZ^{-1/2}\int d^4y e^{-ipy}(\square_y + m^2)\langle 0|Tj_\mu^a(x)\Phi_k(y)|0\rangle\quad (\text{A.18})$$

Haciendo una integración por partes y uso de la definición de la función de Green (A.1) obtenemos

$$\langle 0|j_\mu^a(x)|\pi^k(p)\rangle = iZ^{-1/2}\int d^4y e^{-ipy}(p^2 + m^2)G_{\mu,k}^a(x-y)\quad (\text{A.19})$$

Para reescribir esta expresión, vamos a hacer uso de las propiedades generales

$$G_{k'k}(y-z) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-\delta_{k'k}}{q^2 - m_k^2 + i\epsilon} e^{iq(y-z)}\quad (\text{A.20})$$

$$\int d^4y G^{-1}(x-y)G(y-z) = \delta(x-z)\quad (\text{A.21})$$

entonces introduciendo una delta, obtenemos

$$\begin{aligned}\langle 0|j_\mu^a(x)|\pi^k(p)\rangle &= \int d^4z \int d^4y \int d^4\omega G^{-1}(y-\omega)G(\omega-z)e^{-ipz}(-p^2 + m^2)G_{\mu,k}^a(x-y) \\ &= \int d^4z \int d^4y \int d^4\omega G^{-1}(y-\omega)G(\omega-z)e^{-ipz}(-p^2 + m^2)G_{\mu,k}^a(x-y) \\ &= \int d^4z \int d^4y \int d^4\omega G^{-1}(y-\omega)\delta(\omega-z)e^{-ipz}G_{\mu,k}^a(x-y) \\ &= \int d^4z \int d^4y G^{-1}(y-\omega)e^{-ipz}(-p^2 + m^2)G_{\mu,k}^a(x-y).\end{aligned}\quad (\text{A.22})$$

Ahora, debemos escribir $\exp(ipz)$ como $\exp(-ipx)\exp[ip(x-y)]\exp[ip(y-z)]$, de manera que quedan explícitamente como transformadas de Fourier y luego tomar el límite on-shell, ya que es entonces cuando las partículas tienen sentido físico. Siendo así:

$$\begin{aligned}\langle 0|j_\mu^a(x)|\pi^k(p)\rangle &= \lim_{p^2 \rightarrow m_k^2} \exp(-ipx)\tilde{G}_{\mu,k'}^a(p)i\tilde{G}_{k,k}^{-1}(p) \\ &= \lim_{p^2 \rightarrow m_k^2} -i \exp(-ipx)\tilde{G}_{\mu,k'}^a(p)(p^2 - m_k^2)\end{aligned}\quad (\text{A.23})$$

Una comparación con la ecuación (A.12) nos da nuestra ecuación final

$$\lim_{p^2 \rightarrow m_k^2} \tilde{G}_{\mu,k'}^a(p)(p^2 - m_k^2) = -f_k^a p_\mu \quad (\text{A.24})$$

Si $\tilde{G}_{\mu,k'}^a(p)$ presenta un polo en $p^2 = 0$ producido por la rotura espontánea de simetría entonces la ecuación anterior implica $m_k^2 = 0$ y $f_k^a \neq 0$.

$$f_k^a = iT_{kj}^a \langle 0|\Phi_j(0)|\rangle \quad (\text{A.25})$$

Siendo así, tiene que haber bosones sin masa $|\Pi^a(p)\rangle = iT_{kj}^a \langle 0|\Phi_j(0)|0\rangle |\pi_k\rangle$ en el espectro físico que no dejan invariante el vacío $T_{kj}^a \langle 0|\Phi_j(0)|0\rangle \neq 0$.

Antes de aplicar el teorema, hagamos incapié en los casos para los cuales no vale el mismo, así no mentemos.

El teorema de Goldstone no vale para rotura espontánea de simetrías de gauge. Esto se puede ver si se trabaja en el gauge físico, el gauge en el cual el campo tiene solo grados de libertad físicos. Fijar un gauge requiere la especificación de cierto tetravector n_μ y la forma general del elemento de matriz que involucra la corriente de gauge fuente no es más (A.10): un término proporcional a n_μ puede presentarse.

Otro dato relevante, es que el teorema fue demostrado sólo para simetrías internas, y en un espacio-tiempo tetra-demiensional y de Minkowski. Relajando algunas de estas condiciones, es probable que el teorema de Goldstone deje de valer. Por ejemplo, no hay bosones de Goldstone en 1 + 1 dimensiones [7].

A.2. El modelo σ

El modelo σ surge como una alternativa para estudiar la rotura de simetría quirial en QCD. El mismo es un modelo fenomenológico, donde los campos escalares son introducidos como campos elementales y sus interacciones son fijadas para que se produzca rotura inmediata de la simetría quirial.

El modelo σ contiene dos fermiones de Dirac

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

y cuatro escalares σ' y $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$. El lagrangiano, viene dado por[8]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\sigma^{lin} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma')^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^i)^2 - \frac{\mu^2}{2}(\sigma'^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\gamma}{4}(\sigma'^2 + \vec{\pi}^2)^2 \\ &\quad + \bar{\psi}i\cancel{D}\psi + g\bar{\psi}(\sigma' + i\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\gamma^5)\psi,\end{aligned}\quad (\text{A.27})$$

donde $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli. Al mismo, lo podemos reescribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\sigma^{lin} = & \frac{1}{4}Tr(\partial_\mu \Sigma^\dagger \partial^\mu \Sigma) - \frac{\mu^2}{4}Tr(\Sigma^\dagger \Sigma) - \frac{\gamma}{16}[Tr(\Sigma^\dagger \Sigma)]^2 \\ & + \bar{\psi}_L \not{\partial} \psi_L + \bar{\psi}_R \not{\partial} \psi_R + g\bar{\psi}_L \Sigma \psi_R + g\bar{\psi}_R \Sigma^\dagger \psi_L, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

donde definimos $\Sigma \equiv \sigma' + \beta \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}$, que satisface

$$\sigma'^2 + \vec{\pi}^2 = \frac{1}{2}Tr(\Sigma^\dagger \Sigma). \quad (\text{A.29})$$

Para que el lagrangiano sea invariante frente a simetría quirial, Σ tiene que transformar como un bidoblete

$$\psi_{L,R} \rightarrow U_{L,R} \psi_{L,R}, \quad \Sigma \rightarrow U_L \Sigma U_R \quad (\text{A.30})$$

con $U_{L,R}$ matrices arbitrarias de $SU(2)$

$$U_{L,R} = \exp(-i\alpha_{L,R}^a \sigma^a / 2) \quad (\text{A.31})$$

Usando que $Tr \sigma^i = 0$ y que $\sigma^i \sigma^j = \beta \epsilon^{ijk} \sigma^k + \delta^{ij}$, tenemos

$$\sigma' \rightarrow \sigma' + \frac{1}{2}(\vec{\alpha}_L^k - \vec{\alpha}_R^k) \cdot \vec{\pi} \quad (\text{A.32})$$

$$\pi^k \rightarrow \pi^k - \frac{1}{2}(\alpha_L^k - \alpha_R^k) \sigma' - \frac{1}{2} \epsilon^{klm} \pi^l (\alpha_L^m + \alpha_R^m) \quad (\text{A.33})$$

El teorema de Noether predice la existencia de corrientes conservadas [9]

$$J_s^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \delta \alpha_s]} \quad (\text{A.34})$$

Usando entonces la expresión explícita para la variación respecto a transformaciones L y R , obtenemos

$$\begin{aligned} J_{L\mu}^k &= \bar{\psi}_L \gamma_\mu \frac{\sigma^k}{2} \psi_L - \frac{i}{8} Tr[\sigma^k (\Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger - \partial_\mu \Sigma \Sigma^\dagger)] = \\ &= \bar{\psi}_L \gamma_\mu \frac{\sigma^k}{2} \psi_L - \frac{1}{2} (\sigma' \partial_\mu \pi^k - \pi^k \partial_\mu \sigma') + \frac{1}{2} \epsilon^{klm} \pi^l \partial_\mu \pi^m \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

y

$$J_{R\mu}^k = \bar{\psi}_L \gamma_\mu \frac{\sigma^k}{2} \psi_L + \frac{i}{8} Tr[\sigma^k (\Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger - \partial_\mu \Sigma \Sigma^\dagger)] \quad (\text{A.36})$$

$$= \bar{\psi}_L \gamma_\mu \frac{\sigma^k}{2} \psi_L + \frac{1}{2} (\sigma' \partial_\mu \pi^k - \pi^k \partial_\mu \sigma') + \frac{1}{2} \epsilon^{klm} \pi^l \partial_\mu \pi^m \quad (\text{A.37})$$

Estas corrientes pueden ser combinadas para dar la corriente vectorial

$$V_\mu^k = J_{L\mu}^k + J_{R\mu}^k = \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\sigma^k}{2} \psi + \epsilon^{klm} \pi^l \partial_\mu \pi^m \quad (\text{A.38})$$

y la corriente axial

$$A_\mu^k = J_{L\mu}^k - J_{R\mu}^k = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\sigma^k}{2}\psi + \pi^k\partial_\mu\sigma' - \sigma'\partial_\mu\pi^k \quad (\text{A.39})$$

que tendrán sentido físico más adelante.

Dependiendo de los parámetros del potencial escalar, el vacío del sistema puede no ser invariante frente a simetría quiral y decimos que la misma está espontáneamente rota. El potencial escalar puede ser escrito, a menos de una constante

$$V(\sigma', \pi^k) = \frac{\lambda}{4} \left(\sigma' + \bar{\pi}^2 + \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2 \quad (\text{A.40})$$

Si $\mu^2 > 0$, entonces el mínimo de potencial se alcanza para $\sigma' = \pi^k = 0$ y el vacío es también invariante bajo simetría quiral. Esto significa que las excitaciones corresponderán con multipletes degenerados, es decir que los cuatro escalares tendrán la misma masa, al igual que los dos fermiones.

Por otro lado, si $\mu^2 < 0$, el mínimo de potencial ocurre cuando los campos satisfacen

$$\sigma'^2 + \bar{\pi}^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2. \quad (\text{A.41})$$

El verdadero vacío corresponde a un punto en esta variedad y cualquier decisión es físicamente equivalente, ya que están todas relacionadas por la simetría del lagrangiano. En particular, podemos elegir

$$\langle \sigma' \rangle = v, \quad \langle \pi^k \rangle = 0. \quad (\text{A.42})$$

Con esta elección, el vacío es todavía invariante bajo simetría de isospín (la que arriba asociamos a la corriente vectorial), pero no bajo simetría axial. Entonces, tenemos un patrón de rotura de la simetría $SU(2)_L \times SU(2)_R$ siendo rota espontáneamente a $SU(2)_V$. Veamos que ocurre con el espectro.

Para preservar la orogonalidad del vacío, definimos el campo físico

$$\sigma = \sigma' - v \quad (\text{A.43})$$

tal que $\langle \sigma \rangle = 0$. El lagrangiano, se puede expresar ahora

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}i\cancel{\partial}\psi + gv\bar{\psi}\psi + \frac{1}{2}[(\partial_\mu\sigma)^2 - 2\lambda v^2\sigma^2] + \frac{1}{2}(\partial_\mu\bar{\pi})^2 + \\ & + g\bar{\psi}[\sigma + i\vec{\sigma}\cdot\bar{\pi}]\psi - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \bar{\pi}^2)^2 - \lambda v\sigma(\sigma^2 + \bar{\pi}^2) \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

que describe un nucleón de masa $-gv$, un mesón σ de masa $m_\sigma = \sqrt{2\lambda}v$ y un triplete de isospín de piones sin masa $\bar{\pi}$ y sus interacciones.

Nótese que como es predicho por el teorema de Goldstone, hemos encontrado tres bosones no masivos, que se corresponden con los tres generadores rotos. Usando las relaciones de los generadores

$$[T_{L,R}^i, T_{L,R}^j] = i\epsilon^{ijk}T_{L,R}^k, \quad [T_L^i, T_R^j] = 0 \quad (\text{A.45})$$

obtenemos

$$[T_{V,A}^i, T_{V,A}^j] = i\epsilon^{ijk}T_V^k, \quad [T_V^i, T_A^j] = i\epsilon^{ijk}T_A^k \quad (\text{A.46})$$

La última ecuación nos dice que los generadores rotos transforman como un triplete bajo el grupo no roto de isospin. Que los bosones de Goldstone transformen como un triplete, está entonces de acuerdo con el teorema.

¿Qué pasaría si incluyésemos un término que rompa la simetría de manera explícita en el Lagrangiano? Consideremos el término que preserva isospin pero rompe simetría quiral

$$\mathcal{L} = -\epsilon\sigma' = -\frac{\epsilon}{2}\text{Tr}\Sigma. \quad (\text{A.47})$$

Siendo así, la corriente axial ya no es más conservada

$$\partial^\mu A_\mu^a = -\delta_{A^a}\mathcal{L}' = -\epsilon\delta_{A^a}\sigma' = -\epsilon\pi^a \quad (\text{A.48})$$

Otra implicación es que el mínimo de potencial se ve modificado

$$\partial_{\sigma'}V = \sigma'[\mu^2 + \gamma(\sigma'^2 + \vec{\pi}^2)] + \epsilon \quad (\text{A.49})$$

$$\partial_{\pi^i}V = \pi^i[\mu^2 + \gamma(\sigma'^2 + \vec{\pi}^2)] \quad (\text{A.50})$$

de manera que la degeneración del mínimo es rota y el vacío clásico se consigue cuando

$$\langle \pi^i \rangle = 0, \quad \langle \sigma' \rangle = v \quad (\text{A.51})$$

con v raíz de $\mu^2v + \gamma v^3 + \epsilon = 0$. Definiendo $\sigma = \sigma' - v$ obtenemos la masa para los piones

$$m_\pi^2 = \mu^2 + \lambda v^2 = -\epsilon/v \quad (\text{A.52})$$

que es distinta de cero.

Bibliografia

- `chaikin` [1] P. M. Chaikin and T. C. Lubensky, «Principles of condensed matter physics»
- `Susskind:2001fb` [2] L. Susskind, “The quantum Hall fluid and non-commutative Chern Simons theory,” arXiv:hep-th/0101029.
- `Deser:1981wh` [3] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, “Topologically massive gauge theories,” *Annals Phys.* **140** (1982) 372 [Erratum-ibid. **185** (1988 APNYA,185,406.1988 APNYA,281,409-449.2000) 406.1988 APNYA,185,406.1988].
- `schwartz` [4] A. S. Schwartz, «Quantum Field Theory and Topology»
- `Pokorski:1987ed` [5] S. Pokorski, “gauge FIELD THEORIES,” *Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987) 394 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics)*
- `Maggiore:2005qv` [6] M. Maggiore, “A Modern introduction to quantum field theory,” *Oxford University Press, 2005. (Oxford Series in Physics, 12. ISBN 0 19 852073 5)*
- `Coleman:1973ci` [7] S. R. Coleman, “There are no Goldstone bosons in two-dimensions,” *Commun. Math. Phys.* **31** (1973) 259.
- `jose` [8] J. Santiago, “The Physics of Electroweak Symmetry breaking.” (<http://www.ugr.es/~jsantiago/PoEWSBLectures.pdf>)
- `Itzykson:1980rh` [9] C. Itzykson and J. B. Zuber, “Quantum Field Theory,” *New York, Usa: Mcgraw-hill (1980) 705 P. (International Series In Pure and Applied Physics)*
- `Mulligan:2010wj` [10] M. Mulligan, C. Nayak and S. Kachru, “An Isotropic to Anisotropic Transition in a Fractional Quantum Hall State,” arXiv:1004.3570 [cond-mat.str-el].
- `Hartnoll:2009sz` [11] S. A. Hartnoll, “Lectures on holographic methods for condensed matter physics,” *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 224002 [arXiv:0903.3246 [hep-th]].
- `Deser:1999pa` [12] S. Deser and R. Jackiw, “Higher derivative Chern-Simons extensions,” *Phys. Lett. B* **451**, 73 (1999) [arXiv:hep-th/9901125].
- `Callan:1989em` [13] C. G. . Callan and F. Wilczek, “INFRARED BEHAVIOR AT NEGATIVE CURVATURE,” *Nucl. Phys. B* **340** (1990) 366.
- `chris` [14] <http://calclab.math.tamu.edu/~fulling/m489GR/hyper.pdf>