Fluctuaciones cuánticas de una D6-brana en $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$

Trabajo de Diploma
para la Licenciatura en Física

Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de La Plata

2013

JEREMIAS AGUILERA DAMIA

Agradecimeintos

A Guille y a Diego, que supieron despejar todas las dudas y me ayudaron a resolver todas las complicaciones que surgieron a lo largo de la realización de este trabajo. A mis viejos y a toda mi familia, que me apoyaron en todas las decisiones, que tuvieron que aguantar mis mejores y peores días y me ayudaron en todo lo que pudieron. A mis amigos de la facu, ya que sin ellos no habria aguantado ni dos años en la facultad. A todos mis amigos, que todos los días me recuerdan que no todo son cuerdas y espacio-tiempo deformado. Y a todas las personas que formaron parte de mi vida a lo largo de estos años.

Índice general

1. Resumen

Se calculan las ecuaciones clásicas de movimiento que describen la dinámica de una D6-brana en un espacio de fondo $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$. Se estudia una solución estática particular que describe, via AdS/CFT, un lazo de Wilson recto en la teoría de gauge dual conocida como teoría ABJM. Posteriormente, se calcula la dinámica para las fluctuaciones bosónicas y fermiónicas a orden cuadrático. Finalmente, se estudian los modos cero de las fluctuaciones bos'onicas.

2. Introducción

2.1. Motivaciones

La correspondencia gauge/gravedad conjetura una relación de equivalencia (dualidad) entre teorías de gauge y teorías de cuerdas [1, 2]. Un aspecto sobresaliente de esta dualidad es el modo en que relaciona los regímenes de acoplamiento de ambas teorías. Más precisamente, la correspondencia gauge/gravedad relaciona regímenes *fuertemente acoplados* de teorías de gauge con teorías de cuerdas en espacios *débilmente curvados*.

Una teoría de cuerdas en un espacio-tiempo cuyo radio de curvatura R es muy grande (en comparasión con la longitud característica de la teoría de cuerdas $l_s = \sqrt{\alpha'}$) puede estudiarse mediante técnicas semiclásicas. Esta posibilidad introduce una nueva herramienta de cálculo en el estudio de la dinámica de sistemas fuertemente interactuantes que escapan a las técnicas perturbativas usuales. La principal motivación para realizar el estudio semiclásico de D-branas en este trabajo de diploma, es entonces que este permitiría la descripción de ciertos observables de la teoría de gauge dual en el límite de acoplamiento fuerte.

En el contexto de la dualidad gauge/gravedad, las simetrías globales de la teoría de campos se traducen en las isometrías del background en la teoría de cuerdas dual y la información extraída de la teoría de cuerdas se codifica mediante una proyección de la dinámica sobre la frontera del espacio 10-dimensional. A la coordenada que determina esta frontera se la denomina *dirección holográfica*. El ejemplo canónico de este tipo de correspondencias establece que la teoría $\mathcal{N} = 4$ Super-Yang-Mills (SYM) es dual a una teoría de cuerdas en un background gravitacional en 10 dimensiones cuya geometría es $AdS_5 \times \mathbb{S}^5$[1][1].

Los lazos de Wilson (Wilson loops) pueden entenderse como el agregado de partículas cargadas de prueba a la teoría de gauge. Estos operadores se construyen a partir del factor de fase no abeliano,

$$U(C) = \mathbf{P}e^{ig\int_C A_\mu(x)dx^\mu} \equiv \prod_{x\in C} (1 + igA_\mu(x)dx^\mu) \tag{2.1}$$

[1]Un espacio-tiempo Anti de Sitter n-dimensional (AdS_n) es una variedad de curvatura hiperbólica el cual puede escribirse como cosets de la forma $AdS_n = \frac{O(2,n-1)}{O(1,n-1)}$. En coordenadas de Poincaré, su geometría puede escribirse como

$$ds^2_{AdS_n} = r^2\left(-dt^2 + d\vec{x}^2\right) + \frac{dr^2}{r^2}$$

donde $\vec{x}$ representa $n-2$ coordenadas cartesianas. Cabe aclarar que en esta parametrización no cubre la totalidad de la variedad, es decir que no son coordenadas globales.

donde C es una curva cor que representa la trayectoria de la partícula de prueba, $A_\mu(x)$ es un campo de Yang-Mills no-Abeliano y g alguna constante de acoplamiento. **P** denota el ordenamiento del producto en el lado derecho de (2.1) a lo largo del camino C. Se puede mostrar que, para trayectorias C cerradas, la traza del operador $U(C)$ es invariante de gauge. Se define entonces el lazo de Wilson como

$$W(C) \equiv \frac{1}{N}\mathrm{tr}\,[U(C)]$$

donde C es una curva cerrada y N es un parámetro relacionado con el grupo de gauge (*e.g.* $U(N)$).

El valor de expectación de estos operadores queda definido en términos de la integral funcional sobre todos los campos de la teoría de gauge en consideración (campos de gauge, fermiónicos, escalares, etc),

$$\langle W(C)\rangle = Z^{-1}\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \ldots e^{iS(A_\mu,\bar{\psi},\psi,\ldots)}W(C) \tag{2.2}$$

donde Z es la función de partición del sistema.

En el límite de N muy grande se puede ver que la teoría se simplifica y que los correladores que involucran varios Wilson loops se factorizan. La importancia de este tipo de operadores en el contexto de teorías de gauge es que, en el límite especificado anteriormente, es posible no sólo expresar todos los observables invariantes de gauge en términos de $\langle W(C)\rangle$, sino que se puede reformular toda la dinámica de la teoría en términos de los mismos [4].

Las integrales funcionales que definen $\langle W(C)\rangle$ en (2.2) se pueden calcular perturbativamente usando herramientas de teoría de campos en el límite de acoplamiento débil. La correspondencia AdS/CFT permite el cálculo de $\langle W(C)\rangle$ en el régimen opuesto, es decir en el límite de campos fuertemente acoplados, mediante un cálculo semiclásico en la teoría de cuerdas dual. En la dualidad AdS/CFT la teoría de gauge está, en cierto sentido, definida en la frontera de AdS. El cálculo semiclásico en la teoría de cuerdas dual que corresponde a $\langle W(C)\rangle$ incorpora la información de la curva C como una condición de contorno en la frontera de AdS. La propuesta de Maldacena fue igualar el valor de expectación del lazo de Wilson con la función de partición de la teoría de cuerdas dual, siendo C la condición de contorno que define el espacio de configuraciones de cuerdas sobre el que se realiza la suma

$$\langle W(C)\rangle = \sum_{S/\partial S=C} e^{-A_{str}(S)}. \tag{2.3}$$

Mas precisamente, la suma del lado derecho se realiza sobre todas las superficies de cuerdas que terminan en la frontera de AdS a lo largo de la curva C. Por su parte, $A_{str}(S)$ corresponde al área de estas superficies, y coincide con la acción de la teoría de cuerdas.

En conclusión, la dualidad gauge/gravedad para Wilson loops se basa en la proporcionalidad existente entre el valor de expectación del Wilson loop y la integral funcional de la teoría de cuerdas sobre un fondo de gravedad determinado. En el límite semiclásico, la función de partición (integral funcional) es dominada por la configuración clásica y obtenemos

$$\langle W(C)\rangle \sim \exp\left(-A_{str}(S_{clas})\right) \tag{2.4}$$

aquí S_{clas} es la solución clásica para la hoja de mundo de una cuerda que termina en el borde de AdS a lo largo de la curva C. El parámetro de la teoría de cuerdas que permite quedarnos con la aproximación clásica es $R^2/\alpha' \leftrightarrow 1/\hbar$. El siguiente término $\mathcal{O}(1)$ en la expansión en α'/R^2 de la integral funcional corresponde a aproximar la teoría a orden cuadrático alrededor de la solución clásica y calcular las correspondientes integrales gaussianas. Explícitamente,

$$\langle W(C)\rangle \simeq \exp\left(-A_{str}(S_{clas})\right)\left(\det\left(\frac{\delta^2 A_{str}}{\delta x_i \delta x_j}\Big|_{x_{cl}}\right)\right)^{-1/2} \tag{2.5}$$

donde x_i denota genéricamente los campos involucrados en la teoría de cuerdas, x_{cl} representa la configuración clásica de estos campos mencionada arriba y $A_{str}(S_{clas})$ es la acción evaluada en esta configuración clásica.

De todo lo expuesto se infiere el interés en calcular los espectros de las fluctuaciones cuánticas de los campos de la teoría de cuerdas, los mismos proveen la primera corrección al valor de expectación del Wilson loop dado por (2.4).

Los lazos de Wilson dependen también de la representación elegida para los generadores del grupo de gauge en el factor de fase (2.1). La prescripción en términos de cuerdas (2.3) discutida arriba computa el Wilson loop en la representación fundamental del grupo de gauge. El cálculo de WL en otras representaciones se describe en términos de Dp-branas. Para que esto sea posible, la p-brana apropiada para describir un WL deberá envolver (p-1) de sus direcciones en una variedad compacta del fondo gravitatorio, ya que el dato que imponga la Dp-brana en la frontera de AdS debe ser una curva.

La relación discutida a lo largo de esta sección entre valores de expectación de WL y cuerdas o Dp-branas en la teoría de cuerdas dual vale en general y no sólo para la realización prototípica mencionada más arriba. En particular, vale también para una realización más reciente de la correspondencia AdS/CFT desarrollada por Aharony, Bergman, Maldacena y Jafferis (ABJM) [3], la cual relaciona teorías de campos conformes en $(2+1)$ dimensiones con teorías de cuerdas en backgrounds de la forma $AdS_4 \times \mathcal{B}$, donde $\mathcal{B}$ es una variedad compacta 6-dimensional.

Para el estudio que llevaremos a cabo en este trabajo nos centraremos en el lado AdS (bulk) de la realización de ABJM. La teoría ABJM es una teoría de gauge con grupo $U(N) \times U(N)$ del tipo Chern-Simons, los niveles para cada grupo son $(k, -k)$. En límite de N muy grande, la teoría admite una descripción semiclásica dual definida sobre la geometría $AdS_4 \times \mathbb{S}^7/\mathbb{Z}_k$. Cuando el nivel k es muy grande[2], la teoría admite

[2] En este contexto se define el límite de t'Hooft el cual consiste en $N \to \infty$ y $k \to \infty$ manteniendo $\lambda = \frac{N}{k}$ constante.

una descripción en términos de un fondo 10-dimensional con geometría $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ soportada por campos de Ramond-Ramond (más específicamente una 2-forma y una 4-forma).

En el presente trabajo estudiaremos las fluctuaciones de una configuración clásica de D6-branas enrollando apropiadamente una variedad 5-dimensional en $\mathbb{C}P^3$. La configuración que analizaremos describe ciertos lazos de Wilson rectos en la representación totalmente antisimétrica de orden n del grupo de gauge.

2.2. Breve reseña sobre Dp-branas

Consideremos una teoría de cuerdas abiertas en d dimensiones espcio-temporales. La dinámica para dichas cuerdas está dada por la acción de Nambu-Goto

$$S_{NG}[X] = -T_s \int \sqrt{-g}\, d\tau d\sigma, \qquad g = \det g_{\mu\nu} \tag{2.6}$$

donde $X^m(\sigma^\mu)$ determina la inmersión de la cuerda en el espacio-tiempo de fondo (target space) con métrica $G_{mn}(X)$ $(m, n = 0, \ldots, d-1)$,

$$g_{\mu\nu} = G_{mn}(X)\partial_\mu X^m \partial_\nu X^n \tag{2.7}$$

es la métrica inducida sobre la hoja de mundo de la cuerda parametrizada por $\sigma^\mu = (\tau, \sigma)$, y $T_s = 1/2\pi\alpha'$ representa la *tensión* de la cuerda[3]. Las ecuaciones de movimiento se obtienen realizando la variación de la acción respecto a los campos $X^m(\tau, \sigma)$ e imponiendo condiciones de contorno apropiadas en los extremos de la cuerda de manera de eliminar los términos de borde y tener un principio variacional bien definido. En el caso de cuerdas cerradas los términos de borde se cancelan, para cuerdas abiertas, las posibles condiciones pueden ser de tipo Dirichlet o de tipo Neumman. Supongamos que se imponen $d - (p + 1)$ condiciones de tipo Dirichlet para los extremos de la cuerda. De esta manera queda definida una hipersuperficie (p+1)-dimensional determinada por los puntos en los que el extremo puede moverse libremente. A esta hipersuperficie se la denomina Dp-brana.

Todo objeto extendido (hipersuperficie) en una determinada geometría provee una manera natural de proyectar la métrica del fondo al volumen de mundo de objeto, la métrica así definida se denomina métrica inducida y la denotaremos como $g_{\mu\nu}$. Se puede mostrar que al cuantizar una D-brana, el volumen de mundo de la misma contiene como grado de libertad a un campo elctromagnético que denotaremos por una 2-forma $\mathcal{F}$ [6]. Las fuentes de estos campos se relacionan con cargas y corrientes definidas por los extremos las cuerdas que terminan sobre la D-brana.

La importancia de estos objetos macroscópicos extendidos en diversas aplicaciones de la teoría de cuerdas desencadenó diversos desarrollos en el estudio de Dp-branas ocupando éstas un carácter fundamental en la teoría. De hecho estas Dp-branas tienen una

[3]La constante α' se conoce como pendiente de Regge, en el presente trabajo fijaremos $\alpha' = 1$. Notese que la tensión hace las veces de la "masa"de la cuerda ($[T_s] = L^{-2}$).

dinámica propia, es decir que deben satisfacer ciertas ecuaciones de movimiento. No es el objetivo de este trabajo realizar una deducción exhaustiva de la acción correspondiente a la dinámica de las Dp-branas, sino que nos limitaremos a indicar que la consistencia de la teoría de cuerdas con extremos fijos a una Dp-brana impone que dicha Dp-brana con un campo $\mathcal{F}$ debe satisfacer la ecuaciones que minimizan la la acción de Dirac-Born-Infeld[4],

$$S_{DBI} = -T_p \int d\sigma^{p+1} e^{-\Phi} \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + \mathcal{F}_{\mu\nu})} \tag{2.8}$$

aquí $\Phi, G_{mn}(X)$ son los campos de fondo donde se propaga a D-brana. El campo de dilatón Φ se relaciona con la constante de acoplamiento de las cuerdas g_s de la siguiente manera $e^{\Phi} = g_s$. A su vez, $g_{\mu\nu}$ es la métrica inducida en volumen de mundo (2.7) y $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ el campo soportado en la Dp-brana. Por último, T_{Dp} es la tensión de la Dp-brana,

$$T_p = \frac{T_{p-1}}{2\pi\sqrt{\alpha'}} \tag{2.9}$$

Finalmente, debemos sealar que las Dp-branas se acoplan también a eventuales (p+1)-formas presentes en el fondo mediante términos de Wesz-Zumino (ver cap.**??**).

2.3. Descripción del trabajo

En el presente trabajo consideramos la descripción dual en la correspondencia AdS/CFT de ciertos Wilson lines (Wilson loops con trayectorias rectas) en la teoría ABJM. Ms precisamente estudiaremos D6-branas en el espacio-tiempo de fondo $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$. Las configuraciones que estudiaremos corresponderán a D6-branas extendidas a lo largo de la dirección holográfica y envolviendo subvariedades 5-dimensionales $T^{1,1}$ deformadas$\subset \mathbb{C}P^3$. El volumen de mundo de dichas D6-branas resulta $AdS_2 \times \tilde{T}^{1,1}$, es decir que en la frontera de AdS_4 dan origen a una línea recta que corresponde al soporte del Wilson loop dual.

Los parámetros de la teoría de gauge (*i.e.* los enteros N y k) se relacionan con el radio R de AdS_4 de la siguiente manera

$$\frac{R^3}{4k} = \pi\sqrt{\frac{2N}{k}} \tag{2.10}$$

En el capítulo **??** se estudia el espacio-tiempo de fondo $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$, su métrica y las correspondientes formas (Ramond-Ramond) que lo soportan. En el capítulo **??** se estudia

[4]El modelo de Dirac-Born-Infeld fue desarrollado como una alternativa a la teoría clásica del electromagnetismo. El objetivo de esta formulación era dar, a nivel clásico, un origen electromagnético a la masa de las partículas conocidas hasta ese momento. La idea principal consistió en modificar las ecuaciones de Maxwell de manera de imponer una cota máxima a los valores posibles del campo electromagnético, de manera de eliminar divergencias en el cálculo de la autoenergía de partículas cargadas. El descubrimiento del neutrón (es decir que la masa no estaba necesariamente ligada a la carga), las dificultades para su cuantificación y el éxito de la electrodinámica cuántica (QED) fueron las causas principales del olvido de esta teoría. Finalmente, fue reconsiderada en los años '80 en el contexto de las teorías de cuerdas.

la configuración clásica discutida arriba que resulta de minimizar la acción de una D6-brana inmersa en el fondo ABJM. En el capítulo **??** se encuentra la dinámica para las fluctuaciones bosónicas y fermiónic as sobre la configuración clásica a orden cuadrático. En todos los aspectos relativos a los campos bosónicos seguiremos [7], mientras que para las fluctuaciones fermiónicas utilizaremos las ideas planteadas en [8] y [9]. En el capítulo **??** se exponen los resultados obtenidos a lo largo del trabajo, las conclusiones y se plantean posibles cálculos futuros. Finalmente, en el Apéndice se explicitan las convenciones de índices, representaciones de las matrices de Dirac en 10 dimensiones, estructuras geométricas y una breve reseña sobre armónicos esféricos en espacios $\tilde{T}^{1,1}$.

3. Espacio-tiempo de background

3.1. Métrica del Espacio-Tiempo

El espacio de fondo del presente trabajo corresponde al tipo ABJM de teoría de cuerdas tipo IIA correspondiente a un espacio 10-dimensional con una métrica $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$:

$$ds^2 = \frac{R^3}{4k}\left(ds^2_{AdS_4} + 4ds^2_{\mathbb{CP}^3}\right) \tag{3.1}$$

en donde $ds^2_{AdS_4}$ es la métrica de AdS_4 y puede ser escrita en coordenadas de Poincaré de la forma:

$$ds^2_{AdS_4} = r^2\left(-dt^2 + dx^2 + dy^2\right) + \frac{dr^2}{r^2} \tag{3.2}$$

Por su parte, $ds^2_{\mathbb{CP}^3}$ es la métrica canónica de Fubbini-Study. Para escribirla en una forma conveniente consideremos cuatro coordenadas complejas z^i $(i = 1, \ldots, 4)$ que parametrizan una 7-esfera, es decir $\sum_i | z^i |^2 = 1$. Representaremos estas coordenadas complejas en términos de las 7 variables angulares α,θ_1,θ_2,φ_1,φ_2,χ y ξ de la forma:

$$z^1 = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}e^{\frac{i}{4}(2\varphi_1+\chi+\xi)} \quad z^2 = \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\theta_1}{2}e^{\frac{i}{4}(-2\varphi_1+\chi+\xi)}$$
$$z^3 = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}e^{\frac{i}{4}(2\varphi_2-\chi+\xi)} \quad z^4 = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}e^{\frac{i}{4}(-2\varphi_2-\chi+\xi)}$$

Se puede ver que la métrica de $\mathbb{S}^7$ puede escribirse en estas coodenadas como un *bundle* de $U(1)$ sobre $\mathbb{CP}^3$:

$$ds^2_{\mathbb{S}^7} = ds^2_{\mathbb{CP}^3} + (d\psi + A)^2$$

En esta parametrización, e identificando $\psi \sim \xi$, obtenemos la métrica de $\mathbb{CP}^3$ de la forma:

$$\begin{aligned} ds^2_{\mathbb{CP}^3} = \frac{1}{4}\Big[d\alpha^2 + \cos^2\frac{\alpha}{2}\left(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\varphi_1^2\right) + \sin^2\frac{\alpha}{2}\left(d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\varphi_2^2\right) + \\ \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(d\chi^2 + \cos\theta_1 d\varphi_1 + cos\theta_2 d\varphi_2\right)^2\Big] \end{aligned} \tag{3.3}$$

y la conexión de $U(1)$ resulta:

$$A = \cos\alpha d\chi + 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos\theta_1 d\varphi_1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\theta_2 d\varphi_2 \tag{3.4}$$

Los rangos de las coordenadas angulares son $0 \leq \alpha, \theta_1, \theta_2 \leq \pi$, $0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 2\pi$ y $0 \leq \chi \leq 4\pi$. Es importante notar q ue, en esta parametrización, las subvariedades con $\alpha = cte$ corresponden espacios 5-dimensionales $T^{1,1}$ deformados.[1]

3.2. Soporte de la Geometría

El soporte de esta geometría consta de un campo escalar constante ϕ (dilatón) y dos campos Ramond-Ramond, más explícitamente una 2-forma $F^{(2)}$ y una 4-forma $F^{(4)}$, tales que:

$$e^{2\phi} = \frac{R^3}{k^3}, \qquad F^{(4)} = \frac{3}{8} R^3 \Omega_{AdS_4}, \qquad F^{(2)} = \frac{k}{4} dA \tag{3.5}$$

donde $\Omega_{AdS_4} = r^2 dt \wedge dr \wedge dx \wedge dy$ es la forma de volumen correspondiente a la métrica (3.2).

Las componentes no nulas de la 2- forma $F^{(2)}$ resultan ser entonces:

$$\begin{aligned}
F^{(2)}_{47} &= -\sin\alpha\cos\theta_1 & F^{(2)}_{48} &= -\sin\alpha\cos\theta_2 \\
F^{(2)}_{49} &= -\sin\alpha & F^{(2)}_{57} &= -2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\theta_1 \\
F^{(2)}_{68} &= 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\theta_2
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Por su parte, la 4-forma $F^{(4)}$ sólo posee componentes sobre AdS_4. Sus componentes no nulas sern $F^{(6)}_{0123} = \frac{3}{8} R^3 r^2$ y las 4! combinaciones antisimétricas de estos índices, las cules, por definición, sólo diferirán en un signo.

A su vez, se define la 6-forma $F^{(6)}$ como el Hodge dual de $F^{(4)}$. En esta geometría está dado por:

$$F^{(6)} =^* F^{(4)} = \frac{3R^6}{2^8 k} \sin^3\alpha d\alpha \wedge \epsilon_5 \tag{3.7}$$

[1]La variedad topológica $T^{1,1}$ puede pensarse como un $U(1)$ bundle sobre $S^2 \times S^2$, o bien como la variedad del grupo cociente $SU(2) \times SU(2)/U(1)$. El grupo de isometría de esta variedad es $SU(2) \times SU(2) \times U(1) \cong SO(4) \times U(1)$. Utilizando las coodenadas (θ_1, φ_1) y (θ_2, φ_2) para parametrizar las esferas S^2 y la coordenada $\chi \in [0, 4\pi)$ para parametrizar la fibra $U(1)$, la métrica de $T^{1,1}$ puede escribirse como:

$$ds^2 = a\left(d\chi + \cos\theta_1 d\varphi_1 + \cos\theta_2 d\varphi_2\right)^2 + b\sum_{i=1}^{2}\left(d\theta_i^2 + \sin^2\theta_i d\varphi_i^2\right)$$

Se puede ver que si $a = \frac{1}{9}$ y $b = \frac{1}{6}$ se corresponde con un espacio de Einstein, es decir que $R_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$, con $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci. Un espacio $T^{1,1}$ deformado $(\tilde{T}^{1,1})$ no es más que el caso particular en el que las 2-esferas de la métrica de $T^{1,1}$ poseen radios distintos, como es claramente el caso de este trabajo.

donde $\epsilon_5 = \sin\theta_1 \sin\theta_2 d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\chi d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$.

Definimos la 5-forma C_5 tal que sea el potencial de F_6 (*i.e.* $F_6 = dC_5$). Es fácil ver que:

$$C_5 = -\frac{R^6}{2^8 k} C(\alpha)\epsilon_5 \tag{3.8}$$

en donde

$$C(\alpha) = \cos\alpha \left(\sin^2\alpha + 2\right) - 2. \tag{3.9}$$

4. D6-branas

Consideremos una D6-brana extendida en el espacio-tiempo. El embedding[1] de la misma se realiza en términos de coordenadas $X^m(\sigma^\mu)$, *i.e.* son funciones de las coordenadas del volumen de mundo de la D6-brana. La métrica inducida es el pull-back de la métrica del espacio-tiempo sobre el volumen de mundo, es decir:

$$g_{\mu\nu} = G_{mn} \frac{\partial X^m}{\partial \sigma^\mu} \frac{\partial X^n}{\partial \sigma^\nu} \tag{4.1}$$

Introducimos un campo $\mathcal{F}_{\mu\nu}$, el cual es una 2-forma soportada en el volumen de mundo. El término de Dirac-Born-Infeld en la acción clásica de la D6-brana es:

$$S_{DBI} = -T_{D_6} \int d^7\sigma e^{-\phi} \sqrt{-\det\left(g + \mathcal{F}\right)} \tag{4.2}$$

donde T_{D_6} es la tensión de la D6-brana y es tal que $T_{D_6} = \frac{1}{(2\pi)^6} \left(\frac{k}{R}\right)^{\frac{3}{2}}$.

El término de Wesz-Zumino en la acción acopla el campo $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ del volumen de mundo a la 6-forma $F^{(6)} =^* F^{(4)}$ del fondo via el potencial (3.8):

$$S_{WZ} = T_{D_6} \int C_5 \wedge \mathcal{F} \tag{4.3}$$

La acción clásica será la suma de estos dos términos, es decir:

$$S = S_{DBI} + S_{WZ} \tag{4.4}$$

4.1. Fijado del gauge

La invarianza frente a difeomorfismos (reparametrizaciones) de la acción (4.4) nos permite imponer el gauge estático. El embedding resultante es de la forma:

$$\begin{gathered} \sigma^\mu = \{t, r, \theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2, \chi\} \\ x = x(\sigma^\mu), \quad y = y(\sigma^\mu), \quad \alpha = \alpha(\sigma^\mu) \end{gathered} \tag{4.5}$$

[1]Sea ϕ un mapeo suave entre dos variedades $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ tal que $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ y $\dim \mathcal{M} \leq \dim \mathcal{N}$. Entonces decimos que:
a)ϕ es una **inmersión** de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ si el mapeo diferencial $\phi_* : T_p\mathcal{M} \to T_{\phi(p)}\mathcal{N}$ es inyectivo.
b)ϕ es un **embedding** de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ si es injectivo y además es una inmersión, *i.e.* tanto ϕ como ϕ_* son injectivos. En este caso a la imagen $\phi(\mathcal{M})$ se la denomina un **subvariedad** de $\mathcal{N}$. En la práctica, $\phi(\mathcal{M})$ es difeomorfo a $\mathcal{M}$.

Notemos que, en un abuso de notación, en (4.5) hemos denominado a las coordenadas del volumen de mundo de la misma manera que las del espacio-tiempo. Esto es posible debido a que en el embedding estático se identifican coordenadas del volumen de mundo con coordenadas en el espacio-tiempo, sin embargo no hay que perder de vista que no son elementos equivalentes. En este gauge se calculan las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos $x(\sigma^\alpha)$, $y(\sigma^\mu)$, $\alpha(\sigma^\mu)$, $A_\nu(\sigma^\mu)$, donde A_ν son las componentes del potencial del campo $\mathcal{F}$, *i.e.* $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

4.2. Solución de las ecuaciones de movimiento

Consideremos un embedding estático:

$$x(\sigma^\mu) = x_0 \qquad y(\sigma^\mu) = y_0 \qquad \alpha(\sigma^\mu) = \alpha_0 \tag{4.6}$$

Se comprueba que este embedding solución de las ecuaciones de movimiento generales del sistema y es el que se utilizará para la configuración clásica de la D6-brana.
Por otro lado, la solución de las ecuaciones de movimiento para los campos A_α en este embedding corresponde a un flujo radial de campo eléctrico, mientras que el resto de las componentes son nulas. Más explícitamente:

$$A_0 = -\frac{R^3 \cos\alpha_0}{4k} r \qquad A_i = 0, i = 1, \ldots, 6 \tag{4.7}$$

dando lugar a un flujo constante en la dirección radial que resulta:

$$\mathcal{F}_{0r} = \frac{R^3 \cos\alpha_0}{4k} \tag{4.8}$$

Introduciendo la forma (ref) para el potencial C_5 e integrando en las coordenadas angulares, el lagrangeano efectivo en el embedding estático resulta:

$$\mathcal{L} = \frac{R^9}{2^{10}\pi^3 k^3}\left[\sin^3\alpha_0\sqrt{1 - \frac{16k^2}{R^6}\mathcal{F}_{0r}^2} + C(\alpha_0)\mathcal{F}_{0r}\right] \tag{4.9}$$

Finalmente, introduciendo la solución (4.8) para el campo eléctrico obtenemos la acción clásica efectiva en términos de α_0:

$$S_{cl} = -\int \frac{R^9 \sin^4[\frac{\alpha_0}{2}]}{2^9\pi^3 k^2} dtdr \tag{4.10}$$

La geometría interna de la D6-brana en esta configuración clásica corresponde a una variedad 7-dimensional con métrica $AdS_2 \times \tilde{T}^{1,1}$, con $\tilde{T}^{1,1}$ un espacio $T^{1,1}$ deformado. Las expresiones correspondientes para los intervalos son de la forma:

$$ds_{cl}^2 = \frac{R^3}{4k}\left(ds_{AdS_2}^2 + ds_{\tilde{T}^{(1,1)}}^2\right) \tag{4.11}$$

$$ds_{AdS_2}^2 = -r^2 dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} \tag{4.12}$$

$$ds^2_{\tilde{T}^{(1,1)}} = \cos^2\frac{\alpha_0}{2}\left(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\varphi_1^2\right) + \sin^2\frac{\alpha_0}{2}\left(d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\varphi_2^2\right) + \\ + \sin^2\frac{\alpha_0}{2}\cos^2\frac{\alpha_0}{2}\left(d\chi^2 + \cos\theta_1 d\varphi_1 + cos\theta_2 d\varphi_2\right)^2 \tag{4.13}$$

5. Fluctuaciones

5.1. Fluctuaciones Bosónicas

Consideremos ahora las fluctuaciones en torno a la configuración clásica estudiada. Para ello definimos los campos χ, ξ, y f, los cuales represenarán las fluctuaciones en las coodenadas transversales al volumen de mundo y en el campo $\mathcal{F}$ respectivamente. Por lo tanto tenemos que:

$$x = x_0 + \chi, \qquad \alpha = \alpha_0 + \xi, \qquad \mathcal{F} = \bar{f} + f \tag{5.1}$$

donde x_0, α_0 y $\bar{f}$ son los valores de los capos correspondientes a la configuración clásica. Cabe aclarar que en esta sección el símbolo x denota a los campos cartesianos x e y y por lo tanto χ representa la fluctuación en ambos campos. Sin embargo, dada la equivalencia entre estos campos, esta notación no genera ambigüedades de ning'un tipo.
En términos de estos campos fluctuados se realizará una expansión a segundo orden del Lagrangeano del sistema. Debido a que la configuración clásica no es más que una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, es claro que el primer término será nulo o igual a una derivada total.
Consideremos en primer lugar el desarrollo a segundo orden de la métrica inducida. Para ello definimos $\bar{g}$ como el orden 0 del desarrollo (*i.e.* la geometr'ia correspondiente a la configuración clásica). A su vez, $\tilde{g}$ concentrará los términos lineales y cuadráticos del desarrollo. Denominamos X^m_{cl} a los valores clásicos de las coordenadas de la D6-brana y δX^m a las fluctuaciones. A su vez denotamos con G^{cl} a la métrica de espacio- tiempo evaluada en la configuración clásica del sistema. Con esta notación, tenemos que:

$$g = \bar{g} + \tilde{g} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\mu\nu} =& G^{cl}_{mn}\partial_\mu \delta X^m \partial_\nu \delta X^n \\ &+ \partial_\mu X^m_{cl}\partial_\nu X^n_{cl}\partial^2_{pq}G_{mn}\delta X^p \delta X^q \\ &+ \partial_\mu X^m_{cl}\partial_\nu X^n_{cl}\partial_p G_{mn}\delta X^p \\ &+ \partial_\mu X^m_{cl}\partial_\nu \delta X^n G^{cl}_{mn}\end{aligned} \tag{5.3}$$

donde está implícito que las derivadas de la métrica son evaluadas en la configuración clásica.

Por otro lado, notemos que podemos escriibir:

$$\sqrt{-\det(g+\mathcal{F})} = \sqrt{-\det(\bar{g}+\bar{f})}\sqrt{\det(1+X)} \tag{5.4}$$

con $X = \left(\bar{g}+\bar{f}\right)^{-1}(\tilde{g}+f)$.
En nuestro desarrollo haremos uso de la expresión:

$$\sqrt{\det(1+X)} = 1 + \frac{1}{2}Tr(X) - \frac{1}{4}Tr(X^2) + \frac{1}{8}\left(Tr(X)\right)^2 + \mathcal{O}(X^3) \tag{5.5}$$

Denominemos M_0 a $(\bar{g}+\bar{f})$. La reescribimos en términos de su parte simétrica y su parte antisimétrica:

$$M_0^{-1} = \mathcal{G}^{-1} + \mathcal{J} \tag{5.6}$$

Notemos que $\mathcal{J}$ sólo recibe contribución de $\bar{f}$, y por lo tanto sus únicos elementos no nulos son:

$$\mathcal{J}^{0r} = -\mathcal{J}^{r0} = \frac{4k}{R^3}\frac{\cot\alpha_0}{\sin\alpha_0} \tag{5.7}$$

Por su parte, $\mathcal{G}^{-1}$ es la inversa de la denominada *open string metric* y sus elementos no nulos son:

$$\mathcal{G}^{00} = -\frac{4k}{R^3}\frac{1}{r^2\sin^2\alpha_0} \qquad \mathcal{G}^{rr} = \frac{4k}{R^3}\frac{r^2}{\sin^2\alpha_0} \qquad \mathcal{G}^{ij} = \frac{4k}{R^3}\breve{g}^{ij} \tag{5.8}$$

donde los índices $i,j = 2,\ldots,6$ y $\breve{g}$ es la métrica de $\tilde{T}^{1,1}$. Por lo tanto tenemos que la open string metric es de la forma:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}d\sigma^\mu d\sigma^\nu = \frac{R^3}{4k}\left(\sin^2\alpha_0 ds^2_{AdS_2} + ds^2_{\tilde{T}^{(1,1)}}\right) \tag{5.9}$$

En el cálculo de $Tr(X)$ debemos evaluar 5 términos. El primero es:

$$\left(\mathcal{G}^{-1}+\mathcal{J}\right)^{\mu\nu}\partial_\mu\delta X^m\partial_\nu\delta X^n G^{cl}_{mn} \tag{5.10}$$

Haciendo uso de que G es diagonal en las variables fluctuadas (x,y,α) y de que $\partial_\mu\delta X^m\partial_\nu\delta X^n$ es simétrica ante el intercambio $\mu\leftrightarrow\nu$, se obtiene la expresión final para (5.10):

$$G_{xx}\mathcal{G}^{\mu\nu}\partial_\mu\chi\partial_\nu\chi + G_{\alpha\alpha}\mathcal{G}^{\mu\nu}\partial_\mu\xi\partial_\nu\xi \tag{5.11}$$

donde nuevamente x y χ denotan respectivamente a ambas coordenadas cartesianas y sus fluctuaciones.
El segundo término a analizar es:

$$\left(\mathcal{G}^{-1}+\mathcal{J}\right)^{\mu\nu}\partial_\mu X^m_{cl}\partial_\nu X^n_{cl}\partial^2_{pq}G^{cl}_{mn}\delta X^p\delta X^q \tag{5.12}$$

Ahora bien, recordemos que $G_{mn} = G_{mn}(r,\alpha,\theta_1,\theta_2)$ mientras que $\delta X^p = (\chi,\alpha)$, por lo que $p,q = \alpha$. Por otro lado, sólo G_{ij} con $i,j\in\tilde{T}^{1,1}$ dependen de α. A su vez, en el ebedding que estamos estudiando, para $i = 5, \ldots, 9$, $\partial_\mu X^i_{cl} = \delta^i_\mu$. Haciendo uso de todo esto obtenemos la correspondiente expresión para (5.12):

$$\frac{4k}{R^3} \breve{g}^{ij} \partial^2_{\alpha\alpha} G_{ij} \xi^2 \tag{5.13}$$

Mediante argumentos similares podemos ver que:

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{G}^{-1} + \mathcal{J}\right)^{\mu\nu} \partial_\mu X^m_{cl} \partial_\nu X^n_{cl} \partial_p G_{mn} \delta X^p &= \frac{4k}{R^3} \breve{g}^{ij} \partial_\alpha G_{ij} \xi \\ \left(\mathcal{G}^{-1} + \mathcal{J}\right)^{\mu\nu} \partial_\mu X^m_{cl} \partial_\nu \delta X^n G^{cl}_{mn} &= 0 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Finalmente, dada la antisimetría de f, sólo puede contraerse con $\mathcal{J}$, obteniendo:

$$\left(\mathcal{G}^{-1} + \mathcal{J}\right)^{\mu\nu} f_{\mu\nu} = -2\mathcal{J}^{0r} f_{0r} \tag{5.15}$$

Tengamos en cuenta que:

$$\frac{4k}{R^3} \breve{g}^{ij} \partial_\alpha G_{ij} = 6 \cot \alpha_0 \qquad \frac{4k}{R^3} \breve{g}^{ij} \partial_{\alpha\alpha} G_{ij} = 3 \cot^2 \alpha_0 - 1 \tag{5.16}$$

Para obtener la expresión final, reunimos (5.11), (5.13), (5.14) y (5.15) y reemplazamos por los valores correspondientes para los distintos elementos:

$$\begin{aligned} Tr(X) = -\frac{8k}{R^3} \frac{\cot \alpha_0}{\sin \alpha_0} f_{0r} + 6 \cot \alpha_0 \xi + (3 \cot^2 \alpha_0 - 1)\xi^2 + \\ + \frac{R^3}{4k} \mathcal{G}^{\mu\nu} \partial_\mu \xi \partial_\nu \xi + \frac{R^3}{4k} r^2 \mathcal{G}^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi \end{aligned} \tag{5.17}$$

Para calcular X^2 nos quedamos con los términos lineales en las fluctuaciones. De (5.14) sabemos que uno de ellos es nulo. A su vez definimos:

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu X^m_{cl} \partial_\nu X^n_{cl} \partial_p G_{mn} \delta X^p = \partial_\alpha G_{\mu\nu} \xi \tag{5.18}$$

Notemos que $A_{\mu\nu}$ sólo posee componentes en $\tilde{T}^{1,1}$ y es simétrico frente al intercambio $\mu \leftrightarrow \nu$. Entonces tenemos que:

$$Tr\left(X^2\right) = M_0^{\mu\rho} \left(A_{\rho\sigma} + f_{\rho\sigma}\right) M_0^{\sigma\nu} \left(A_{\nu\mu} + f_{\nu\mu}\right) \tag{5.19}$$

Consideremos el término:

$$M_0^{\mu\rho} A_{\rho\sigma} M_0^{\sigma\nu} A_{\nu\mu} \tag{5.20}$$

Dada la simetría de $A_{\mu\nu}$, cualquier contracción con la parte antisimétrica de M_0 es nula. Por lo tanto, y debido a que $A_{\mu\nu}$ sólo posee componentes en $\tilde{T}^{1,1}$, tenemos que (5.20) queda:

$$\frac{16k^2}{R^6} \breve{g}^{\mu\rho} \breve{g}^{\sigma\nu} \partial_\alpha G_{\rho\sigma} \partial_\alpha G_{\nu\mu} \xi^2 \tag{5.21}$$

Por otro lado, tenemos dos términos de acople entre ξ y f los cuales son de la forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{\mu\rho}A_{\rho\sigma}\mathcal{G}^{\sigma\nu}f_{\nu\mu} &= -\mathcal{G}^{\mu\rho}A_{\rho\sigma}\mathcal{G}^{\sigma\nu}f_{\mu\nu} \\ &= -\mathcal{G}^{\sigma\nu}A_{\rho\sigma} - \mathcal{G}^{\mu\rho}f_{\nu\mu} \\ &= -\mathcal{G}^{\mu\rho}A_{\rho\sigma}\mathcal{G}^{\sigma\nu}f_{\nu\mu}\end{aligned} \tag{5.22}$$

donde en el último paso hemos hecho $k \leftrightarrow l$ y $m \leftrightarrow n$. Concluimos entonces que estos términos son nulos.
Por último tenemos los términos cuadráticos en f, los cuales son:

$$\begin{aligned}&\mathcal{G}^{\mu\rho}\mathcal{G}^{\sigma\nu}f_{\rho\sigma}f_{\nu\mu} + \mathcal{G}^{\mu\rho}\mathcal{J}^{\sigma\nu}f_{\rho\sigma}f_{\nu\mu} \\ &\mathcal{J}^{\mu\rho}\mathcal{G}^{\sigma\nu}f_{\rho\sigma}f_{\nu\mu} + \mathcal{J}^{\mu\rho}\mathcal{J}^{\sigma\nu}f_{\rho\sigma}f_{\nu\mu}\end{aligned} \tag{5.23}$$

Analicemos el segundo término:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{\mu\rho}\mathcal{J}^{\sigma\nu}f_{\rho\sigma}f_{\nu\mu} &= \mathcal{G}^{\mu\rho}\mathcal{J}^{0r}f_{\rho 0}f_{r\mu} + \mathcal{G}^{\mu\rho}\mathcal{J}^{r0}f_{\rho r}f_{0\mu} \\ &= \mathcal{J}^{0r}\mathcal{G}^{\mu\rho}\left(f_{\rho 0}f_{r\mu} - f_{\rho 0}f_{r\mu}\right) \quad = \quad 0\end{aligned} \tag{5.24}$$

Mediante un razonamiento análogo concluimos que el tercer término de (5.23) es también nulo.

Finalmente, reeemplazando los valores correspondientes en los términos no nulos de (5.19) y haciendo uso de que:

$$\frac{16k^2}{R^6}\breve{g}^{\mu\rho}\breve{g}^{\sigma\nu}\partial_\alpha G_{\rho\sigma}\partial_\alpha G_{\nu\mu} = 4(3\cot\alpha_0 + 1) \tag{5.25}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}Tr(X^2) = 4(3\cot\alpha_0 + 1)\xi^2 + \mathcal{G}^{\mu\rho}\mathcal{G}^{\sigma\nu}f_{\rho\sigma}f_{\nu\mu} + \\ + \frac{32k^2}{R^6}\frac{\cos^2\alpha_0}{\sin^4\alpha_0}f_{0r}^2\end{aligned} \tag{5.26}$$

Para calcular $(Tr(X))^2$ nos quedamos con los términos lineales en (5.17) obteniendo:

$$Tr(X)^2 = 36\cot^2\alpha_0\xi^2 - \frac{96k}{R^3}\frac{\cot^2\alpha_0}{\sin\alpha_0}\xi f_{0r} + \frac{64k^2}{R^6}\frac{\cot^2\alpha_0}{\sin^2\alpha_0}f_{0r}^2 \tag{5.27}$$

Finalmente, introduciendo las expresiones (5.17), (5.26) y (5.27) en (5.5) obtenemos:

$$\begin{aligned}\sqrt{\det(1+X)} = 1 - \frac{4k}{R^3}\frac{\cot\alpha_0}{\sin\alpha_0}f_{0r} + 3\cot\alpha_0\xi + \frac{R^3}{8k}\mathcal{G}^{\mu\nu}\partial_\mu\xi\partial_\nu\xi + \\ + \frac{R^3}{8k}r^2\mathcal{G}^{\mu\nu}\partial_\mu\chi\partial_\nu\chi + \frac{1}{4}\mathcal{G}^{\mu\rho}\mathcal{G}^{\sigma\nu}f_{\rho\nu}f_{\mu\sigma} + \\ \frac{3}{2}(3\cot^2\alpha_0 - 1)\xi^2 - \frac{12k}{R^3}\frac{12k}{R^3}\frac{\cot^2\alpha_0}{\sin\alpha_0}\xi f_{0r}\end{aligned} \tag{5.28}$$

Notemos también que:

$$e^{-\phi}\sqrt{-\det(\bar{g}+\bar{f})} = \frac{R^9}{2^{10}k^2}\sin^4\alpha_0\sin\theta_1\sin\theta_2 \tag{5.29}$$

Calculamos el desarrollo a segundo orden del término de Wesz-Zunino. Para ello obtenemos el desarrollo de la función $C(\alpha)$, el cual es de la forma:

$$C(\alpha) = C(\alpha_0) - 3\sin^3\alpha_0\xi - \frac{9}{2}\sin^2\alpha_0\cos\alpha_0\xi^2 \tag{5.30}$$

Luego, el desarrollo del lagrangeano de WZ resulta:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{WZ} = &- T_{D_6}\frac{R^9}{2^10k^2}\sin\theta_1\sin\theta_2\Big[C(\alpha_0)\cos\alpha_0 + C(\alpha_0)f_{0r} - \\ &- 3\sin^3\alpha_0\cos\alpha_0\xi - \frac{9}{2}\sin^2\alpha_0\cos^2\alpha_0\xi^2 - \frac{12k}{R^3}\sin^3\alpha_0\xi f_{0r}\Big]\end{aligned} \tag{5.31}$$

Haciendo uso de (5.28), (5.29) y (5.31) obtenemos el lagrangeano cuadrático en las fluctuaciones:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = -T_{D_6}\frac{R^9}{2^{10}k^2}\sin^3\alpha_0\sin\theta_1\sin\theta_2\Big[&\frac{R^3}{8k}r^2\mathcal{G}^{\mu\nu}\partial_\mu\chi\partial_\nu\chi + \frac{R^3}{8k}\mathcal{G}^{\mu\nu}\partial_\mu\xi\partial_\nu\xi + \\ &\frac{1}{4}\mathcal{G}^{\mu\rho}\mathcal{G}^{\sigma\nu}f_{\rho\nu}f_{\mu\sigma} - \frac{3}{2\sin^2\alpha_0}\xi^2 - \frac{12k^2}{R^3\sin^3\alpha_0}\xi f_{0r}\Big]\end{aligned} \tag{5.32}$$

Notar que los términos lineales provenientes de (5.17) se cancelan con los de (5.31), como era de esperarse.

5.1.1. Ecuaciones de Movimiento para las fluctuaciones bosónicas

En términos del lagrandeano (6.2) para los campos fluctuados, aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange (*i.e.* $\partial_\mu(\partial_{\partial_\mu\phi^l}\mathcal{L}) = \partial_{\phi^l}\mathcal{L}$) para obtener las correspondientes ecuaciones de movimiento:

Modos Cartesianos

Para los campos χ, el lagrangeano sólo posee término cinético y es fácil ver que la ecuación puede escribirse de la forma:

$$\partial_\mu\Big[r^2\sqrt{\breve{g}}\mathcal{G}^{\mu\nu}\partial_\nu\chi\Big] = 0 \tag{5.33}$$

Teniendo en cuenta la forma de $\mathcal{G}$ y multimplicando la ecuación por $\frac{R^3\sin^2\alpha_0}{4k\sqrt{\breve{g}}}$ obtenemos:

$$\partial_r\left(r^4\partial_r\chi\right) - \partial_0^2\chi + \frac{r^2\sin^2\alpha_0}{\sqrt{\breve{g}}}\partial_i\left(\sqrt{\breve{g}}\mathcal{G}^{ij}\partial_j\chi\right) = 0 \tag{5.34}$$

donde $i, j \in \tilde{T}^{1,1}$. Sabemos que, para una dada una grometría genérica con métrica g, operador el laplaciano se define como:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{|\, g\, |}} \partial_i \left(\sqrt{|\, g\, |} g^{ij} \partial_j \right) \tag{5.35}$$

por lo que la ecuación (5.34) puede reescribirse como:

$$\partial_r \left(r^4 \partial_r \chi \right) - \partial_0^2 \chi + r^2 \sin^2 \alpha_0 \nabla^2_{\tilde{T}^{1,1}} \chi \tag{5.36}$$

Proponemos una solución de la forma:

$$\chi = e^{iEt} Y_{\ell_1, \ell_2}(\tilde{T}^{1,1}) \phi(r) \tag{5.37}$$

donde $Y_{\ell_1,\ell_2}(\tilde{T}^{1,1})$ son los armónicos esféricos de $\tilde{T}^{1,1}$. Remplazando (5.37) en (5.36) y haciendo uso de (A.47) tenemos que la ecuación para $\phi(r)$ resulta:

$$\partial_r \left(r^4 \partial_r \phi \right) + E^2 \phi - r^2 \lambda(\ell_1, \ell_2, \nu) \phi = 0 \tag{5.38}$$

donde $\lambda(\ell_1, \ell_2, \nu)$ está definido en (A.46).

Estudiaremos el comportamiento de la función ϕ en la frontera de AdS_2, es decir, cuando $r \to \infty$. Para ello supongamos un comportamiento de la forma $\phi \sim r^\gamma$ en este límite. A su vez, dado que r es muy grande, nos quedaremos sólo con los términos de (5.38) que son $\mathcal{O}(r^2)$, es decir el de la derivada y el que involucra el autovalor $\lambda(\ell_1, \ell_2, \nu)$:

$$\gamma(\gamma + 3) r^{\gamma+2} - \lambda(\ell_1, \ell_2, \nu) r^{\gamma+2} = 0 \tag{5.39}$$

Obtenemos entonces una ecuación cudrática en γ de la forma:

$$\gamma(\gamma + 3) - \lambda(\ell_1, \ell_2, \nu) = 0 \tag{5.40}$$

cuyas raíces son:

$$\gamma_{pm} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \lambda(\ell_1, \ell_2, \nu)} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \ell_1(\ell_1 + 2)\nu + \ell_2(\ell_2 + 2)(1 - \nu)} \tag{5.41}$$

La solución en r grande se comporta entonces de la forma:

$$\phi(r) \sim c_{(+)} r^{\gamma_+} + c_{(-)} r^{\gamma_-}, \quad r \to \infty \tag{5.42}$$

Notemos que r^{γ_+} es divergente en la frontera para cualquier valor de ℓ_1 y ℓ_2.
Se puede ver [7] que estos exponentes obtenidos se relacionan directamente con las dimensiones de los operadores duales en el lado de la teoría de gauge.

Modos Acoplados

La ecuación de movimiento para el campo ξ resulta:

$$\frac{R^3}{4k}\frac{1}{\sqrt{\breve{g}}}\partial_\mu\left(\sqrt{\breve{g}}\mathcal{G}^{\mu\nu}\partial_\nu\xi\right)+\frac{3}{\sin^2\alpha_0}\xi+\frac{12k}{R^3\sin^3\alpha_0}f_{0r}=0 \tag{5.43}$$

Reemplazando los valores correspondientes para la open string metric y multiplicando por $\sin^2\alpha_0$ puede llevarse a la forma:

$$\partial_r(r^2\partial_r\xi)-\frac{1}{r^2}\partial_0^2\xi+\frac{3}{\sin^2\alpha_0}+\frac{12kE}{R^3\sin^3\alpha_0}f_{0r}=0 \tag{5.44}$$

Definimos los potenciales a_μ del campo de gauge fluctuado (f). Dado que el lagrangeano sólo depende de f, tenemos que las ecuaciones serán de la forma $\partial_\mu(\partial_{\partial_\mu a_\nu}\mathcal{L})=0$. Las ecuaciones resultantes para estos campos de gauge dependen del índice $\sigma=0,r,i$ y son 7 ecuaciones de la forma:

$$\frac{1}{\sqrt{\breve{g}}}\partial_\mu\left(\sqrt{\breve{g}}\mathcal{G}^{\mu\rho}\mathcal{G}^{\sigma\nu}f_{\rho\nu}\right)+\frac{12k}{R^3}\frac{1}{\sin^3\alpha_0}\left[\partial_r\xi\delta_0^\sigma-\partial_0\xi\delta_r^\sigma\right]=0 \tag{5.45}$$

Proponemos la siguiente solución para los potenciales no nulos:

$$a_r=e^{iEt}Y_{\ell_1,\ell_2}(\tilde{T}^{1,1})\psi(r)\quad,\qquad a_i=e^{iEt}\nabla_iY_{\ell_1,\ell_2}(\tilde{T}^{1,1})\tilde{\psi}(r) \tag{5.46}$$

De aquí que las componentes del campo f serán:

$$\begin{aligned}
f_{0r}&=\partial_0a_r=iEe^{iEt}Y_{\ell_1,\ell_2}(\tilde{T}^{1,1})\psi(r)\\
f_{0i}&=\partial_0a_i=iEe^{iEt}\nabla_iY_{\ell_1,\ell_2}(\tilde{T}^{1,1})\tilde{\psi}(r)\\
f_{ri}&=\partial_ra_i-partial_ia_r=e^{iEt}(\partial_r\tilde{\psi}(r)-\psi(r))\nabla_iY_{\ell_1,\ell_2}(\tilde{T}^{1,1})\\
f_{ij}&=\partial_ia_j-\partial_ja_i=e^{iEt}\tilde{\psi}(r)(\nabla_{ij}Y_{\ell_1,\ell_2}(\tilde{T}^{1,1})-\nabla_{ji}Y_{\ell_1,\ell_2}(\tilde{T}^{1,1}))=0
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Y para el campo ξ proponemos:

$$\xi=e^{iEt}Y_{\ell_1,\ell_2}(\tilde{T}^{1,1})z(r) \tag{5.48}$$

Introduciendo los ansatz (5.47) y (5.48) en la ecuación (5.44) y operando obtenemos:

$$\partial_r(r^2\partial_rz)+\frac{E^2}{r^2}z+(3-\lambda(\ell_1,\ell_2,\nu))z+i\frac{12kE}{R^3\sin\alpha_0}\psi=0 \tag{5.49}$$

Haciendo lo mismo para (5.45) con $\sigma=0$ se obtiene:

$$r^2\partial_r\psi-\lambda(\ell_1,\ell_2,\nu)\tilde{\psi}-i\frac{3R^3}{4kE}\sin\alpha_0\partial_rz=0 \tag{5.50}$$

Mientras que para $\sigma=r$ se obtiene:

$$E^2\psi+\lambda(\ell_1,\ell_2,\nu)r^2(\partial_r\tilde{\psi}-\psi)+i\frac{3ER^3}{4k}\sin\alpha_0z=0 \tag{5.51}$$

Para $\sigma = i$ la ecuación (5.45) es de la forma:

$$\frac{1}{\sqrt{\breve{g}}}\partial_\mu\left(\sqrt{\breve{g}}\mathcal{G}^{\mu\rho}\mathcal{G}^{ij}f_{\rho j}\right) = 0 \tag{5.52}$$

Teniendo en cuenta que para nuestro ansatz $f_{\rho j} \neq 0$ sólo si $\mu = 0, r$ y reemplazando los valores correspondientes $\mathcal{G}$ se puede llevar a la forma:

$$E^2\breve{g}^{ij}\nabla_j Y_{\ell_1,\ell_2}(\tilde{T}^{1,1})\tilde{\psi} + g^{ij}\nabla_j Y_{\ell_1,\ell_2}(\tilde{T}^{1,1})r^2\partial_r\Big[r^2(\partial_r\tilde{\psi} - \psi)\Big] = 0 \tag{5.53}$$

De la última podemos extraer la condicón:

$$E^2\tilde{\psi} + r^2\partial_r\Big[r^2(\partial_r\tilde{\psi} - \psi)\Big] = 0 \tag{5.54}$$

Notemos sin embargo que la ecuación (5.54) no es independiente de las demás. De hecho, es posible obtenerla derivando (5.51) y restando (5.50). Finalmente, de (5.50) tenemos que:

$$\lambda(\ell_1, \ell_2, \nu)\tilde{\psi} = r^2\partial_r\psi - i\frac{3R^3}{4Ek}r^2\sin\alpha_0\partial_r z \tag{5.55}$$

Podemos utilizar esta última expresión para eliminar $\tilde{\psi}$ de (5.51), obteniendo una ecuación que relaciona ψ y z:

$$\partial_r(r^2\partial_r\psi) + \frac{E^2}{r^2}\psi - \lambda(\ell_1, \ell_2, \nu)\psi - i\frac{3R^3\sin\alpha_0}{4Ek}\left[\partial_r(r^2\partial_r z) + \frac{E^2}{r^2}z\right] = 0 \tag{5.56}$$

La cual, junto con (5.49) forman un sistema de dos ecuaciones diferenciales acopladas para las funciones ψ y z.

Para desacoplar el sistema definimos nuevas funciones:

$$\hat{z} = -i\frac{R^3}{4kE}\sin alpha_0 z, \quad \eta = \psi - i\frac{3R^3}{4kE}\sin\alpha_0 z \tag{5.57}$$

A su vez, definimos el operador $\mathcal{O}$ tal que actúa sobre una función genérica f de la forma:

$$\mathcal{O}f = \partial_r(r^2\partial_r f) + \frac{E}{r^2}f \tag{5.58}$$

Haciendo uso de que $\psi = \eta - 3\hat{z}$ podemos reescribir (5.49) y (5.56) en forma matricial como:

$$(\mathcal{O} - \mathcal{M})\begin{pmatrix}\hat{z}\\ \eta\end{pmatrix} = 0 \tag{5.59}$$

con

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix}6 + \lambda(\ell_1, \ell_2, \nu) & -3\\ -3\lambda(\ell_1, \ell_2, \nu) & \lambda(\ell_1, \ell_2, \nu)\end{pmatrix} \tag{5.60}$$

Notemos que $\mathcal{M}$ es diagonalizable con autovalores:

$$\Lambda^{(\pm)} = \lambda(\ell_1, \ell_2, \nu) + 3(1 \pm \sqrt{1 + \lambda(\ell_1, \ell_2, \nu)}) \tag{5.61}$$

y los autovectores pueden escribirse como:

$$\psi_\pm = (\sqrt{1 + \lambda(\ell_1, \ell_2, \nu)} \pm 1)\hat{z} + \eta \tag{5.62}$$

En términos de estas autofunciones, el sistema queda desacoplado obteniendo las ecuaciones:

$$\partial_r(r^2 \partial_r \psi_\pm) + \left(\frac{E}{r^2} - \Lambda^{(\pm)}\right)\psi_\pm = 0 \tag{5.63}$$

Nuevamente supongamos un comportamiento de la forma r^γ para r grande. Despreciando el término que es orden $\frac{1}{r}$ obtenemos entonces las correspondientes ecuaciones cuadráticas en γ:

$$\gamma(\gamma + 1) - \Lambda^{(\pm)} = 0 \tag{5.64}$$

que posee raíces de la forma:

$$\gamma_1^\pm = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \Lambda^{(\pm)}}, \quad \gamma_2^\pm = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \Lambda^{(\pm)}} \tag{5.65}$$

Por lo que el comportamiento de las funciones $\psi_\pm$ en la frontera es:

$$\psi_\pm = c_1 r^{\gamma_1^\pm} + c_2 r^{\gamma_2^\pm} \tag{5.66}$$

Notemos que $\Lambda^{(+)} \geq 0$ para todos los valores posibles de $\lambda(\ell_1, \ell_2, \nu)$, por lo que $r^{\gamma_1^+}$ es divergente y $r^{\gamma_2^-}$ es bien comportada en la frontera. Por otro lado, $\Lambda^{(-)} < 0$ si $0 < \lambda(\ell_1, \ell_2, \nu) < 3$ y $\lambda^{(-)} \geq -1/4$, por lo que las soluciones no presentan oscilaciones y tenemos que $r^{\gamma_1^-}$ es divergente para cualquier valor de $\lambda(\ell_1, \ell_2, \nu)$ y $r^{\gamma_2^{(-)}}$ es bien comportada para $\lambda(\ell_1, \ell_2, \nu) > 3$.

Nuevamente, es posible derivar las dimensiones de los operadores duales en la teoría de gauge en términos de estos exponentes [7].

5.2. Fluctuaciones fermiónicas

Notemos que nuesra solución de background no considera ningún tipo de campo fermiónico, es decir que son nulos en la expresión a orden cero de la acción del sistema. Al considerar las fluctuaciones a segundo orden introduciremos una acción cuadrática en los campos fermiónicos que sea compatible con las simetrías del sistema. Para ello seguiremos los resultados de [8], el cual porpone una acción cuadrática de la forma:

$$S_F = \frac{T_{D6}}{2} \int d^7\sigma e^{-\Phi} \sqrt{-\det(g + \mathcal{F})}\bar{\theta}(1 - \Gamma_{D6})\Big[(\tilde{M}^{-1})^{\mu\nu}\Gamma_\nu D_\mu - \Delta\Big]\theta \tag{5.67}$$

donde θ representa a un espinor de 32 componentes, las cuales son funciones de las coordenadas del volumen de mundo, y $\Gamma_\mu = \partial_\mu X^m \Gamma_m = \partial_\mu X^m E_m^{\underline{a}} \Gamma_{\underline{a}}$. Notemos que dado que el vielbein $E^{\underline{a}}$ es un **covielbein** (ver Apéndice), el pulback sobre las 1-formas del vielbein del espacio-tiempo evaluado en la solución clásica ($\alpha \to \alpha_0$) no es más que el vielbein de la geometría inducida. Por esto último, en lo que sigue escribiremos $\Gamma_\mu = e_\mu^{\underline{\mu}} \Gamma_{\underline{\mu}}$ (ver Apéndice). Por otro lado definimos:

$$\tilde{M}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \Gamma_{(10)} \mathcal{F}_{\mu\nu} \tag{5.68}$$

A su vez, $D_\mu = P[D_m]$, con D_m de la forma:

$$D_m = D_m^{(0)} + W_m = \nabla_m + \frac{1}{4 \cdot 2!} H_{mnp} \Gamma^{np} \Gamma_{(10)} + W_m \tag{5.69}$$

donde ∇_m es la derivada covariante aplicada al espinor, es decir $\nabla_m = \partial_m + \frac{1}{4} \Omega_m^{\underline{ab}} \Gamma_{\underline{ab}}$. El pullback en este caso corresponde a hacer $\partial_m \to \partial_\mu$ y $\{\Omega_m^{\underline{ab}}\} \to \{\omega_\mu^{\underline{\nu\rho}}\}$.
Por otro lado definimos:

$$W_m = W \Gamma_m = -\frac{1}{8} e^\Phi \left(\frac{1}{2} F_{np}^{(2)} \Gamma^{np} \Gamma_{(10)} + \frac{1}{4!} F_{npqr}^{(4)} \Gamma^{npqr} \right) \Gamma_m \tag{5.70}$$

y $\Delta = \Delta^{(1)} + \Delta^{(2)}$ con:

$$\Delta^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\Gamma^m \partial_m \Phi + \frac{1}{2 \cdot 3!} H_{mnp} \Gamma^{mnp} \Gamma_{(10)} \right) \quad , \tag{5.71}$$

$$\Delta^{(2)} = \frac{1}{8} e^\Phi \left(\frac{3}{2} F_{np}^{(2)} \Gamma^{np} \Gamma_{(10)} - \frac{1}{4!} F_{npqr}^{(4)} \Gamma^{npqr} \right) \tag{5.72}$$

donde cabe aclarar que estos operadores se definen en el contexto de un teoría del tipo IIA, siendo ligeramente distintos en el caso IIB.
Notemos que en el sistema de estudio de este trabajo, el campo dilatón ϕ es constante y el campo H es nulo, por lo que $\Delta^{(1)} = 0$ y $D_m^{(0)} = \nabla_m$.
Por último definimos:

$$\Gamma_{Dp} = \frac{\sqrt{-\det g}}{\sqrt{-\det(g + \mathcal{F})}} \Gamma_{Dp}^{(0)} (\Gamma_{(10)})^{\frac{p+2}{2}} \sum_q \frac{(-1)^q (\Gamma_{(10)})^q}{q! 2^q} \Gamma^{\mu_1 \ldots \mu_{2q}} \mathcal{F}_{\mu_1 \mu_2} \ldots \mathcal{F}_{\mu_{2q-1} \mu_{2q}} \tag{5.73}$$

con:

$$\Gamma_{Dp}^{(0)} = \frac{\epsilon^{\mu_1 \ldots \mu_{p+1}}}{(p+1)! \sqrt{-\det g}} \Gamma_{\mu_1 \ldots \mu_{p+1}} \tag{5.74}$$

Es muy importante recalcar que, dado que la acción (5.67) ya es cuadrática en las fluctuaciones fermiónicas, todas las cantidades que involucren campos bosónicos deben evaluarse en la solución clásica de los mismos.
Antes de calcular la forma explícita de la acción fermiónica (5.67), seguiremos [9] y haremos algunas transformaciones que la llevarán a una forma más transparente.

Definiremos ahora algunos objetos que nos serán útiles en los próximos cálculos. Primero, se puede mostrar que siempre es posible realizar una transformación de Lorentz conveniente de manera que el campo $\mathcal{F}$ en el volumen de mundo puede escribirse de la forma:

$$\mathcal{F} = \tanh\phi_0 e^{\underline{0}} \wedge e^{\underline{1}} + \sum_{r=1}^{(p-1)/2} \tan\phi_r e^{\underline{2r}} \wedge e^{\underline{2r+1}} \tag{5.75}$$

donde ϕ_r son ángulos convenientemente escogidos. A su vez, definimos una 2-forma $Y^{(2)}$ sobre el volumen de mundo tal que:

$$Y^{(2)} = \phi_0 e^{\underline{0}} \wedge e^{\underline{1}} + \sum_{r=1}^{(p-1)/2} \phi_r e^{\underline{2r}} \wedge e^{\underline{2r+1}} \tag{5.76}$$

En términos de esto último definimos:

$$R = \frac{1}{4} Y_{\mu\nu} \Gamma^{\underline{\mu\nu}} \tag{5.77}$$

Por último, definimos la matriz X, tal que $X_{\underline{\mu}}^{\underline{\nu}} = \mathcal{F}_{\underline{\mu}}^{\underline{\nu}}$ y el operador:

$$T = \sqrt{1 - X^2} \tag{5.78}$$

Ahora evaluemos estos objetos en nuestro sistema de estudio.Recordando que las magnitudes bosónicas est'an evaluadas en la solución clásica, notemos que:

$$\mathcal{F} = \frac{R^3 \cos\alpha_0}{4k} dt \wedge dr = \cos\alpha_0 e^{\underline{0}} \wedge e^{\underline{1}} = \tanh\phi_0 e^{\underline{0}} \wedge e^{\underline{1}} \tag{5.79}$$

con $\phi_0 = \tanh^{-1}(\cos\alpha_0)$. Reemplazando en las expresiones (5.76) y (5.77), tenemos:

$$Y^{(2)} = \phi_0 e^{\underline{0}} \wedge e^{\underline{1}} \tag{5.80}$$

$$R = \frac{1}{2} \phi_0 \Gamma^{\underline{01}} \tag{5.81}$$

Por su parte, la matriz X resulta ser de la forma:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha_0 & 0 \\ \cos\alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_5 \end{pmatrix} \tag{5.82}$$

por lo que (5.78) resulta:

$$T = \begin{pmatrix} \sin\alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & I_5 \end{pmatrix} \tag{5.83}$$

donde I_5 es la identidad correspondiente a las coordenadas de $\tilde{T}^{1,1}$. De esta última expresión y de (A.28) tenemos que:

$$\hat{e}_{\nu}^{\underline{\mu}} = T_{\underline{\sigma}}^{\underline{\mu}} e_{\nu}^{\sigma} \qquad \hat{e}_{\underline{\nu}}^{\mu} = (T^{-1})_{\underline{\nu}}^{\underline{\sigma}} e_{\underline{\sigma}}^{\mu} \tag{5.84}$$

En lo que sigue haremos uso de operadores de la forma $\exp\left(2R\Gamma_{(10)}\right)$, por lo que es útil evaluarlo en términos de los parámetros del sistema. Haciendo uso de que $\left[\Gamma^{\underline{ab}}, \Gamma_{(10)}\right] = 0$ y de que $(\Gamma^{\underline{01}})^{2k} = I_{32}$ y lo mismo para $\Gamma_{(10)}$, tenemos que:

$$\left(\Gamma^{\underline{01}}\Gamma_{(10)}\right)^{2k} = I_{32} \qquad \left(\Gamma^{\underline{01}}\Gamma_{(10)}\right)^{2k+1} = \Gamma^{\underline{01}}\Gamma_{(10)} \tag{5.85}$$

A su vez, haremos uso de las siguientes igualdades:

$$\cosh\left(\tanh^{-1}(\cos(x))\right) = \frac{1}{\sin x} \qquad \sinh\left(\tanh^{-1}(\cos(x))\right) = \frac{\cos x}{\sin x} \tag{5.86}$$

Haciendo uso de (5.85) y (5.86) se obtiene:

$$e^{\pm 2R\Gamma_{(10)}} = \frac{1}{\sin\alpha_0} \pm \cot\alpha_0 \Gamma^{\underline{01}}\Gamma_{(10)} \tag{5.87}$$

Por otro lado, haciendo uso de la expresión (5.68), es fácil ver que:

$$\tilde{M}^{-1} = \frac{4k}{R^3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{r^2\sin^2\alpha_0} & \Gamma_{(10)}\frac{\cos\alpha_0}{\sin^2\alpha_0} & 0 \\ -\Gamma_{(10)}\frac{\cos\alpha_0}{\sin^2\alpha_0} & \frac{r^2}{\sin^2\alpha_0} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\tilde{T}^{1,1}\right)^{-1} \end{pmatrix} \tag{5.88}$$

Estudiemos los términos de la forma $\tilde{M}^{\mu\nu}\Gamma_\nu\nabla_\mu$ provenientes de (5.67). Haciendo uso de (5.88), del veilbein y las conexiones del Apéndice tenemos que:

$$\tilde{M}^{00}e_0^{\underline{0}}\Gamma_{\underline{0}}\nabla_0 = -\frac{2\sqrt{k}}{R^{3/2}}\frac{1}{r\sin^2\alpha_0}\frac{2\sqrt{k}}{R^{3/2}}\Gamma_{\underline{0}}\left(\partial_0 + \frac{r}{2}\Gamma_{\underline{01}}\right) \tag{5.89}$$

$$\tilde{M}^{01}e_1^{\underline{1}}\Gamma_{\underline{1}}\nabla_0 = \frac{2\sqrt{k}}{R^{3/2}}\frac{\cot\alpha_0}{\sin\alpha_0}\frac{1}{r}\Gamma_{(10)}\Gamma_{\underline{1}}\left(\partial_0 + \frac{r}{2}\Gamma_{\underline{01}}\right) \tag{5.90}$$

$$\tilde{M}^{10}e_0^{\underline{0}}\Gamma_{\underline{0}}\nabla_1 = -\frac{2\sqrt{k}}{R^{3/2}}\frac{\cot\alpha_0}{\sin\alpha_0}r\Gamma_{(10)}\Gamma_{\underline{1}}\partial_1 \tag{5.91}$$

$$\tilde{M}^{11}e_1^{\underline{1}}\Gamma_{\underline{1}}\nabla_1 = \frac{2\sqrt{k}}{R^{3/2}}\frac{r}{\sin^2\alpha_0}\Gamma_{\underline{1}}\partial_1 \tag{5.92}$$

De (5.89) y (5.90) vemos que el términos que involucran a ∂_0 es:

$$
\begin{aligned}
\frac{2\sqrt{k}}{R^{3/2}}\frac{1}{r\sin_{\alpha_0}}\left(-\frac{1}{\sin\alpha_0}\Gamma_{\underline{0}}+\cot\alpha_0\Gamma_{(10)}\Gamma_{\underline{1}}\right)\partial_0 &= \frac{2\sqrt{k}}{R^{3/2}}\frac{1}{r\sin_{\alpha_0}}\Gamma^{\underline{0}}\left(\frac{1}{\sin\alpha_0}+\cot\alpha_0\Gamma^{\underline{01}}\Gamma_{(10)}\right)\partial_0 \\
&= \frac{2\sqrt{k}}{R^{3/2}}\frac{1}{r\sin_{\alpha_0}}\Gamma^{\underline{0}}e^{2R\Gamma_{(10)}}\partial_0 \\
&= \hat{e}^0_{\underline{0}}\Gamma^{\underline{0}}e^{2R\Gamma_{(10)}}\partial_0 \\
&= \hat{\Gamma}^0 e^{2R\Gamma_{(10)}}\partial_0
\end{aligned}
\tag{5.93}
$$

donde hemos hecho uso de (5.87), de la espresión Vielbein en el Apéndice y de que $\hat{\Gamma}^\mu = \hat{e}^\mu_\nu\Gamma^{\underline{\nu}}$.
Analicemos ahora los términos que involucran a la conexión $\omega_0 = \frac{1}{2}\omega^{\underline{01}}\Gamma_{\underline{01}} = \frac{r}{2}\Gamma_{\underline{01}}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{2\sqrt{k}}{R^{3/2}}\frac{1}{r\sin_{\alpha_0}}\frac{r}{2}\left(-\frac{1}{\sin\alpha_0}\Gamma_{\underline{0}}\Gamma_{\underline{01}}+\cot\alpha_0\Gamma_{(10)}\Gamma_{\underline{1}}\Gamma_{01}\right) &= \hat{e}^0_{\underline{0}}\frac{r}{2}\Gamma^{\underline{0}}\left(\frac{1}{\sin\alpha_0}\Gamma_{\underline{01}}-\cot\alpha_0\Gamma^{\underline{0}}\Gamma_{\underline{1}}\Gamma_{\underline{01}}\Gamma_{(10)}\right) \\
&= \hat{\Gamma}^0\frac{r}{2}\Gamma_{\underline{01}}\left(\frac{1}{\sin\alpha_0}+\cot\alpha_0\Gamma^{\underline{01}}\Gamma_{(10)}\right) \\
&= \hat{\Gamma}^0\hat{\omega}_0 e^{2R\Gamma_{(10)}}
\end{aligned}
\tag{5.94}
$$

donde hemos hecho uso de $\{\hat{\omega}_\mu\} = \{\omega_\mu\}$ (ver Apéndice).

El proceso es análogo para los términos (5.91) y (5.92) que involucran ∂_1, obteniéndose:

$$
\hat{\Gamma}^1\nabla_1 e^{2R\Gamma_{(10)}} \tag{5.95}
$$

Dado que $\Gamma^{\underline{0}}$ y $\Gamma^{\underline{1}}$ conmutan con $R\Gamma_{(10)}$, podemos reescribir (5.93), (5.94) y (5.95) de la forma:

$$
e^{R\Gamma_{(10)}}\left(\hat{\Gamma}^0\hat{\nabla}_0+\hat{\Gamma}^1\hat{\nabla}_1\right)e^{R\Gamma_{(10)}} \tag{5.96}
$$

Finalmente, haciendo uso de que $\{\Gamma^{\underline{i}}, R\Gamma_{(10)}\} = 0$ con $i \in \tilde{T}^{1,1}$, y que $\tilde{M}^{ij} = g^{ij} = \hat{g}^{ij}$ si $i, j \in \tilde{T}^{1,1}$, podemos reescribir estos términos de la forma:

$$
\begin{aligned}
\tilde{M}^{ij}\Gamma_j\nabla_i &= \hat{g}^{ij}\hat{\Gamma}_j e^{-R\Gamma_{(10)}}e^{R\Gamma_{(10)}}\hat{\nabla}_i \\
&= e^{R\Gamma_{(10)}}\hat{\Gamma}^i\hat{\nabla}_i e^{R\Gamma_{(10)}}
\end{aligned}
\tag{5.97}
$$

En conclusión, sumando (5.96) y (5.97), tenemos que:

$$
\tilde{M}^{\mu\nu}\Gamma_\nu\nabla_\mu = e^{R\Gamma_{(10)}}\hat{\Gamma}^\mu\hat{\nabla}_\mu e^{R\Gamma_{(10)}} \tag{5.98}
$$

Calculemos ahora el proyector $\Gamma^{(0)}_{D6}$ de la expresión (5.74):

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(0)}_{D6} &= \frac{\epsilon^{\mu_1\ldots\mu_7}}{7!\sqrt{-\det g}}\Gamma_{\mu_1\ldots\mu_7} \\
&= \frac{\epsilon^{\mu_1\ldots\mu_7}}{7!\sqrt{-\det g}}e^{\underline{\nu_1}}_{\mu_1}\ldots e^{\underline{\nu_7}}_{\mu_7}\Gamma_{\underline{\nu_1}\ldots\underline{\nu_7}}
\end{aligned}
\tag{5.99}
$$

Consideremos una situación en la que $\underline{\nu_i} = \underline{\nu_j}$. De (A.20) vemos que esto ocurre sólo si $\mu_i, \mu_j = 4, 5, 6$ y $\nu_i = \nu_j = 6$. Sin embargo, siempre habrá un término que se obtiene de cambiar $\mu_i \leftrightarrow \mu_j$ tal que $\Gamma_{\underline{\nu_1}\ldots\underline{\nu_j}\ldots\underline{\nu_i}\ldots\underline{\nu_7}} \Gamma_{\underline{\nu_1}\ldots\underline{\nu_i}\ldots\underline{\nu_j}\ldots\underline{\nu_7}}$ pero $\epsilon^{\mu_1\ldots\mu_j\ldots\mu_i\ldots\mu_7} = -\epsilon^{\mu_1\ldots\mu_i\ldots\mu_j\ldots\mu_7}$. Entonces sólo quedan los términos diagonales. Haciendo uso de la antisimetría de los productos de matrices de Dirac y de la antisimetría de $\epsilon^{\mu_1\ldots\mu_7}$, éstos resultan en 7! términos iguales. A su vez, recordemos que el producto de los elementos diagonales del vielbein no es más que $\sqrt{-\det g}$. Entonces:

$$\Gamma^{(0)}_{D6} = \Gamma_{\underline{0\ldots6}} \tag{5.100}$$

notemos que $(\Gamma^{(0)}_{D6})^2 = I$, por lo que resulta ser un proyector.

Por otro lado, notemos que:

$$g_{\mu\nu} + \mathcal{F}_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\,(\delta^\rho_\nu + \mathcal{F}^\rho_\nu) = g_{\mu\rho}\,(\delta^\rho_\nu + X^\rho_\nu) \tag{5.101}$$

entonces tenemos que:

$$\sqrt{-\det(g + \mathcal{F})} = \sqrt{-\det(g)\det(1 + X)} \tag{5.102}$$

Hagamos uso de esto para calcular:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{-\det g}}{\sqrt{-\det(g+\mathcal{F})}} \sum_q \frac{(-1)^q(\Gamma_{(10)})^q}{q!2^q}\Gamma^{\mu_1\ldots\mu_{2q}}\mathcal{F}_{\mu_1\mu_2}\ldots\mathcal{F}_{\mu_{2q-1}\mu_{2q}} &= \\ = \frac{1}{\sqrt{-\det(1+X)}}\Gamma^{\mu_1\ldots\mu_{2q}}\mathcal{F}_{\mu_1\mu_2}\ldots\mathcal{F}_{\mu_{2q-1}\mu_{2q}} & \\ = \frac{1}{\sqrt{-\det(1+X)}}\Gamma^{\underline{\mu_1}\ldots\underline{\mu_{2q}}}\mathcal{F}_{\underline{\mu_1\mu_2}}\ldots\mathcal{F}_{\underline{\mu_{2q-1}\mu_{2q}}} & \\ = \frac{1}{\sin\alpha_0}\left(1 - \cos\alpha_0\Gamma^{\underline{01}}\Gamma_{(10)}\right) & \\ = e^{-2R\Gamma_{(10)}} & \end{aligned} \tag{5.103}$$

Es posible ver a su vez que $\{\Gamma^{(0)}_{D6}, R\Gamma_{(10)}\} = 0$. Haciendo uso de esto y reemplazando (5.103) en (5.73) tenemos que:

$$\Gamma_{D6} = e^{R\Gamma_{(10)}}\Gamma^{(0)\prime}_{D6}e^{-R\Gamma_{(10)}} \tag{5.104}$$

donde $\Gamma^{(0)\prime}_{Dp} = \Gamma^{(0)}_{D6}(\Gamma_{(10)})^{\frac{p+2}{2}}$. Notemos que en este caso ($p = 6$), tenemos que $(\Gamma_{(10)})^4 = I_{32}$ y entonces $\Gamma^{(0)\prime}_{Dp} = \Gamma^{(0)}_{D6}$.

Definimos un espinor rotado Θ tal que:

$$\Theta = e^{R\Gamma_{(10)}}\theta \tag{5.105}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}\bar{\Theta} &= \left(e^{R\Gamma_{(10)}}\theta\right)^{\dagger}\Gamma^{\underline{0}} \\ &= \theta^{\dagger}e^{\Gamma^{\dagger}_{(10)}R^{\dagger}}\Gamma^{\underline{0}} \\ &= \theta^{\dagger}\Gamma^{\underline{0}}e^{R\Gamma_{(10)}} \\ &= \bar{\theta}e^{R\Gamma_{(10)}}\end{aligned} \tag{5.106}$$

donde hemos hecho uso de que $\Gamma^{\underline{0}}\Gamma^{\underline{\mu}} = -(\Gamma^{\underline{\mu}})^{\dagger}\Gamma^{\underline{0}}$ y por lo tanto $R^{\dagger}\Gamma^{\underline{0}} = \Gamma^{\underline{0}}R$.

Definimos los operadores *hat* de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\hat{W} &= e^{-R\Gamma_{(10)}}We^{R\Gamma_{(10)}} \\ \hat{\Delta}^{(2)} &= e^{R\Gamma_{(10)}}\Delta e^{-R\Gamma_{(10)}}\end{aligned} \tag{5.107}$$

Para evaluar las expresiones de (5.107) estudiaremos la acción de $e^{\pm R\Gamma_{(10)}}$ sobre las matrices de Dirac. Haciendo uso que $[\Gamma^{\underline{0}}, \Gamma^{\underline{01}}\Gamma_{(10)}] = [\Gamma^{\underline{1}}, \Gamma^{\underline{01}}\Gamma_{(10)}] = 0$ tenemos que:

$$\begin{aligned}e^{\pm R\Gamma_{(10)}}\Gamma^{\underline{0}}e^{\pm R\Gamma_{(10)}} &= \Gamma^{\underline{0}}e^{\pm 2R\Gamma_{(10)}} \\ &= \Gamma^{\underline{0}}\frac{1}{\sin\alpha_0}\left(1 \mp \Gamma^{\underline{1}\Gamma_{(10)}}\right)\end{aligned} \tag{5.108}$$

$$\begin{aligned}e^{\pm R\Gamma_{(10)}}\Gamma^{\underline{1}}e^{\pm R\Gamma_{(10)}} &= \Gamma^{\underline{1}}e^{\pm 2R\Gamma_{(10)}} \\ &= \Gamma^{\underline{1}}\frac{1}{\sin\alpha_0}\left(1 \mp \Gamma^{\underline{0}\Gamma_{(10)}}\right)\end{aligned} \tag{5.109}$$

A su vez, para $\underline{i} = 2\ldots 6$, debido a que $\{\Gamma^{\underline{i}}, \Gamma^{\underline{01}}\Gamma_{(10)}\} = 0$, tenemos que:

$$e^{\pm R\Gamma_{(10)}}\Gamma^{\underline{i}}e^{\pm R\Gamma_{(10)}} = \Gamma^{\underline{i}} \tag{5.110}$$

Haciendo uso de (5.82) y (5.83), estas últimas expresiones pueden reescribirse de una manera más elegante:

$$e^{\pm R\Gamma_{(10)}}\Gamma^{\underline{\mu}}e^{\pm R\Gamma_{(10)}} = \Gamma^{\underline{\nu}}\left(1 \mp \Gamma_{(10)}X\right)_{\underline{\nu}}^{\underline{\sigma}}(T^{-1})_{\underline{\sigma}}^{\underline{\mu}} \tag{5.111}$$

Ahora definimos el vielbein deformado extendido tal que se define sobre todo el espacio-tiempo 10-dimensional y coincide con el vielbein del espacio-tiempo en las coordenadas transversales al volumen de mundo. Por ejemplo, definimos $\hat{e}^m_{\underline{a}}$ con $m, \underline{a} = 0\ldots 9$ tal que, sobre la variedad inducida no es más que el vielbein deformado convencional y $\hat{e}^m_{\underline{a}} = E^m_{\underline{a}}$ si $m = 2, 3, 4$. Extendemos el operador X de manera que sus componentes en el espacio transversal son nulas. Esto lo hacemos porque en (5.70) y (5.72) entran en juego contracciones 2-formas y 4-formas definidas sobre todo el espacio tiempo y queremos aplicar (5.111) para evaluar (5.107). De esta manera, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
e^{\pm R\Gamma_{(10)}}\Gamma^{m_1}\Gamma^{m_2}e^{\mp R\Gamma_{(10)}} &= e^{\pm R\Gamma_{(10)}}\Gamma^{m_1}e^{\pm R\Gamma_{(10)}}e^{\mp R\Gamma_{(10)}}\Gamma^{m_2}e^{\mp R\Gamma_{(10)}} \\
&= e^{m_1}_{\underline{a_1}}\Gamma^{\underline{b_1}}\left(1\mp\Gamma_{(10)}X\right)^{\underline{c_1}}_{\underline{b_1}}(T^{-1})^{\underline{m_1}}_{\underline{c_1}}e^{m_2}_{\underline{a_2}}\Gamma^{\underline{b_2}}\left(1\pm\Gamma_{(10)}X\right)^{\underline{c_2}}_{\underline{b_2}}(T^{-1})^{\underline{m_2}}_{\underline{c_2}} \\
&= \hat{e}^{m_1}_{\underline{c_1}}\hat{e}^{m_2}_{\underline{c_2}}\Gamma^{\underline{b_1}}\Gamma^{\underline{b_2}}\left(1\pm\Gamma_{(10)}X\right)^{\underline{c_1}}_{\underline{b_1}}\left(1\pm\Gamma_{(10)}X\right)^{\underline{c_2}}_{\underline{b_2}} \\
&= \Gamma^{\underline{b_1}}\Gamma^{\underline{b_2}}\left(1\pm\Gamma_{(10)}X\right)^{m_1}_{k_1}\left(1\pm\Gamma_{(10)}X\right)^{m_2}_{k_2}\hat{e}^{k_1}_{\underline{b_1}}\hat{e}^{k_2}_{\underline{b_2}} \\
&= \hat{\Gamma}^{k_1}\hat{\Gamma}^{k_2}\left(1\pm\Gamma_{(10)}X\right)^{m_1}_{k_1}\left(1\pm\Gamma_{(10)}X\right)^{m_2}_{k_2}
\end{aligned}
\tag{5.112}
$$

donde hemos hecho uso de la propiedad (5.84) y en la última expresión, los índices de $\left(1\mp\Gamma_{(10)}X\right)$ son respecto a la geometría deformada. Sin embargo no se ha hecho incapié en denotar $\hat{X}$ ya que, como $\{e^{\underline{\mu}}\}$ y $\{\hat{e}^{\underline{\mu}}\}$ difieren sólo en una constante, es fácil ver que $X = X^{\underline{\mu}}_{\underline{\nu}}e^{\mu}_{\underline{\mu}}e^{\underline{\nu}}_{\nu} = X^{\underline{\mu}}_{\underline{\nu}}\hat{e}^{\mu}_{\underline{\mu}}\hat{e}^{\underline{\nu}}_{\nu} = \hat{X}$. Se puede ver que esta igualdad vale para casos más generales [8]. La última expresión es válida para cualquier producto de la forma $\Gamma^{m_1}\ldots\Gamma^{m_n}$ con n par, por lo que también se generaliza para calcular el término de (5.70) y (5.72) que involucra a $F^{(4)}$.

Haciendo uso de las propiedades vistas hasta ahora se obtiene:

$$\hat{W} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{R^3}}\left[\left(\Gamma^{\underline{49}}+\Gamma^{\underline{57}}-\Gamma^{\underline{68}}\right)\Gamma_{(10)}-\Gamma^{\underline{0123}}\right] \tag{5.113}$$

$$\hat{\Delta}^{(2)} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{R^3}}\left[3\left(-\Gamma^{\underline{49}}-\Gamma^{\underline{57}}+\Gamma^{\underline{68}}\right)\Gamma_{(10)}-\Gamma^{\underline{0123}}\right] \tag{5.114}$$

donde los índices planos de las matrices de Dirac en estas expresiones corresponden al espacio tangente 10-dimensional.

Apliquemos todas estas transformaciones a la acción (5.67). Para ello, escribiremos los espinores en términos de los espinores rotados, e introduciremos convenientemente identidades de la forma $e^{\pm R\Gamma_{(10)}}e^{\mp R\Gamma_{(10)}}$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
&\bar{\theta}(1-\Gamma_{D6})\Big[(\tilde{M}^{-1})^{\mu\nu}\Gamma_\nu D_\mu-\Delta\Big]\theta = \\
&\qquad = \bar{\Theta}e^{-R\Gamma_{(10)}}(1-\Gamma_{D6})e^{R\Gamma_{(10)}}e^{-R\Gamma_{(10)}}\Big[(\tilde{M}^{-1})^{\mu\nu}\Gamma_\nu D_\mu-\Delta\Big]e^{-R\Gamma_{(10)}}\Theta \\
&\qquad = \bar{\Theta}(1-\Gamma^{(0)\prime}_{D6})e^{-R\Gamma_{(10)}}\Big[(\tilde{M}^{-1})^{\mu\nu}\Gamma_\nu\left(\nabla_\mu+W_\mu\right)-\Delta^{(2)}\Big]e^{-R\Gamma_{(10)}}\Theta
\end{aligned}
\tag{5.115}
$$

donde hemos hecho uso de (5.104), de (5.69) y de que $\Delta^{(1)}=0$. En la última expresión puede hacerse uso de la igualdad (5.98) y de la definición (5.114) obteniendo:

$$\bar{\Theta}(1-\Gamma^{(0)\prime}_{D6})\Big[\hat{\Gamma}^\mu\hat{\nabla}_\mu+e^{-R\Gamma_{(10)}}(\tilde{M}^{-1})^{\mu\nu}\Gamma_\nu W_\mu e^{-R\Gamma_{(10)}}-e^{-R\Gamma_{(10)}}\hat{\Delta}^{(2)}\Big]\Theta \tag{5.116}$$

Estudiemos ahora el término que involucra a W. Para ello, reescribamos $\tilde{M}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\tilde{M}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} + \Gamma_{(10)}\mathcal{F}_{\mu\nu} \\ &= g_{\rho\nu}\left(\delta^{\rho}_{\mu} + \Gamma_{(10)}\mathcal{F}^{\rho}_{\mu}\right) \\ &= g_{\rho\nu}\left(\delta^{\rho}_{\mu} + \Gamma_{(10)}X^{\rho}_{\mu}\right)\end{aligned} \tag{5.117}$$

donde hemos usado la definición de X. Cabe sealar que la convención utilizada aquí es de la forma:

$$X^{\nu\rightarrow columna}_{\mu\rightarrow fila} \tag{5.118}$$

Por lo que la última expresión puede reescribirse en forma matricial como:

$$\tilde{M} = \left(1 + \Gamma_{(10)}X\right) g \tag{5.119}$$

Por lo que la inversa es $\tilde{M}^{-1} = g^{-1}\left(1 + \Gamma_{(10)}X\right)^{-1}$, la cual puede escribirse en componentes de la forma:

$$(\tilde{M}^{-1})^{\mu\nu} = g^{\mu\sigma}[\left(1 + \Gamma_{(10)}X\right)^{-1}]^{\nu}_{\sigma} \tag{5.120}$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} & e^{-R\Gamma_{(10)}}(\tilde{M}^{-1})^{\mu\nu}\Gamma_{\nu}W_{\mu}e^{-R\Gamma_{(10)}} = \\ &\quad = e^{-R\Gamma_{(10)}}g^{\mu\sigma}[\left(1 + \Gamma_{(10)}X\right)^{-1}]^{\nu}_{\sigma}\Gamma_{\nu}W\Gamma_{\mu}e^{-R\Gamma_{(10)}} \\ &\quad = e^{-2R\Gamma_{(10)}}g^{\mu\sigma}[\left(1 + \Gamma_{(10)}X\right)^{-1}]^{\nu}_{\sigma}e^{\underline{\mu}}_{\mu}e^{\underline{\nu}}_{\nu}e^{R\Gamma_{(10)}}\Gamma_{\underline{\nu}}e^{R\Gamma_{(10)}}\hat{W}e^{-R\Gamma_{(10)}}\Gamma_{\underline{\mu}}e^{-R\Gamma_{(10)}}\end{aligned} \tag{5.121}$$

donde hemos hecho uso de (5.107) y de que $[\Gamma_{(10)}, R] = 0$.
Consideremos ahora los casos $\underline{\mu}, \underline{\nu} = 0, 1$ en (5.121). En estos casos tenemos que $[\Gamma_{\underline{\mu}}, R\Gamma_{(10)}] = 0$ y $e^{\underline{\mu}}_{\underline{\nu}} = \frac{1}{\sin\alpha_0}\hat{e}^{\underline{\mu}}_{\underline{\nu}}$, por lo que reescribimos (5.121) como:

$$e^{-2R\Gamma_{(10)}}\frac{g^{\mu\sigma}}{\sin^2\alpha_0}[\left(1 + \Gamma_{(10)}X\right)^{-1}]^{\nu}_{\sigma}\hat{e}^{\underline{\mu}}_{\mu}\hat{e}^{\underline{\nu}}_{\nu}\Gamma_{\underline{\nu}}e^{2R\Gamma_{(10)}}\hat{W}e^{-2R\Gamma_{(10)}}\Gamma_{\underline{\mu}} \tag{5.122}$$

Ahora notemos que, dado que $[\left(1 + \Gamma_{(10)}X\right)^{-1}]$ es diagonal por bloques, y que el vielbein es diagonal en la parte de AdS_2, tenemos que $\sigma = 0, 1$, por lo que $g^{\mu\sigma}$ es la métrica de AdS_2, la cual en este caso cumple que $g^{\mu\sigma} = \sin^2\alpha_0\hat{g}^{\mu\sigma}$. Por otro lado, notemos de (5.113) que $\hat{W}$ solo posee productos de la forma $\Gamma^{\underline{ab}}$ con $\underline{ab} = 4, 5, 6, 7, 8, 9$, por lo que es fácil ver que $[\hat{W}, R\Gamma_{(10)}] = 0$. Aplicando todo esto y la definición de las matrices de Dirac de la métrica deformada en (5.122) podemos reescribir estos ́terminos de la forma:

$$e^{-2R\Gamma_{(10)}}\hat{g}^{\mu\sigma}[\left(1 + \Gamma_{(10)}X\right)^{-1}]^{\nu}_{\sigma}\hat{\Gamma}_{\nu}\hat{W}\hat{\Gamma}_{\mu} \tag{5.123}$$

donde no hemos hecho explícito que las componentes de $[\left(1 + \Gamma_{(10)}X\right)^{-1}]$ son en la métrica inducida o en la deformada debido a que son equivalentes como se aclaró anteriormente.

En el caso de $\underline{\mu},\underline{\nu}=2,3,4,5,6$, sabemos que $e^{\mu}_{\underline{\mu}}=\hat{e}^{\mu}_{\underline{\mu}}$. Además, $\{\Gamma_{\underline{\mu}},R\Gamma_{(10)}\}=0$. Finalmente, haciendo uso de que $[\left(1+\Gamma_{(10)}X\right)^{-1}]^{\underline{\nu}}_{\underline{\sigma}}=\delta^{\underline{\nu}}_{\underline{\sigma}}$ y que $\hat{g}^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}$ para $\mu\nu\in\tilde{T}^{1,1}$, podemos llevar el resto de los términos de (5.121) a una forma equivalente a (5.123).
Por último, notemos que:

$$\begin{aligned}\hat{g}_{\mu\nu}&=g_{\mu\nu}-\mathcal{F}_{\mu\rho}g^{\rho\sigma}\mathcal{F}_{\sigma\nu}\\&=\left(\delta^{\tau}_{\mu}-\mathcal{F}^{\sigma}_{\mu}\mathcal{F}^{\tau}_{\sigma}\right)g_{\tau\nu}\end{aligned}\tag{5.124}$$

lo que puede escribirse , según nuestra convención de índices, en forma matricial como:

$$\hat{g}=\left(1-X^2\right)g\tag{5.125}$$

Por lo tanto podemos escribir:

$$\det(g+\mathcal{F})=\det g\det(1+X)=\frac{\det\hat{g}}{\det(1-X)}\tag{5.126}$$

Definimos entonces un nuevo campo dilatón tal que:

$$e^{-\hat{\Phi}}=\frac{e^{-\Phi}}{\sqrt{\det(1-X)}}\tag{5.127}$$

En conclusión, la expresión final de la acción fermiónica (5.67) se reescribe de la forma:

$$\begin{aligned}S_F=&\frac{T_{D6}}{2}\int d^7\sigma e^{-\hat{\Phi}}\sqrt{-\det\hat{g}}\{\bar{\Theta}\left(1-\Gamma^{(0)\prime}_{D6}\right)\hat{\Gamma}^{\mu}\hat{\nabla}_{\mu}\Theta+\\&+\bar{\Theta}\left(1-\Gamma^{(0)\prime}_{D6}\right)e^{-2R\Gamma_{(10)}}\left(\hat{g}^{\mu\sigma}[\left(1+\Gamma_{(10)}X\right)^{-1}]^{\nu}_{\sigma}\hat{\Gamma}_{\nu}\hat{W}\hat{\Gamma}_{\mu}-\hat{\Delta}^{(2)}\right)\Theta\}\end{aligned}\tag{5.128}$$

Puede demostrarse que esta expresión es válida en general [8] teniendo en cuenta los términos del campo H y $\Delta^{(1)}$, los cuales no se han escrito en (5.128) debido a que son nulos en nuestro caso. Tengamos en cuenta que, a pesar de haber redefinido el campo dilatón, $\Delta^{(1)}$ sigue siendo nulo ya que X es constante en el problema de interés de este trabajo.

La idea de reescribir (5.67) de la forma (5.128) es poder expresar la acción fermiónica en términos de una métrica que incorpore la acción del campo de gauge $\mathcal{F}$ en la geometría. De esta manera, se obtiene una expresión encabezada por un término canónico de Dirac (*i.e* de la forma $\Gamma^{\mu}\nabla_{\mu}$) y posibles términos de masa. La similitud de esta expresión con la acción canónica de campos fermiónicos es lo que la hace la manera más elegante de estudiar el problema.

Cálculo del término de masa

Consideremos el término de la forma:

$$\hat{g}^{\mu\sigma}[\left(1+\Gamma_{(10)}X\right)^{-1}]^{\nu}_{\sigma}\hat{\Gamma}_{\nu}\hat{W}\hat{\Gamma}_{\mu}\tag{5.129}$$

Para ello notemos que:

$$\left(1+\Gamma_{(10)}X\right)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2\alpha_0} & -\frac{\cot\alpha_0}{\sin\alpha_0}\Gamma_{(10)} & 0 \\ -\frac{\cot\alpha_0}{\sin\alpha_0}\Gamma_{(10)} & \frac{1}{\sin^2\alpha_0} & 0 \\ 0 & 0 & I_5 \end{pmatrix} \tag{5.130}$$

donde estas componentes son las correspondientes al espacio tangente, *i.e.* métrica plana.

Estudiaremos primero los términos que poseen $\mu=0$:

$$\begin{aligned} \hat{g}^{00}[\left(1+\Gamma_{(10)}X\right)^{-1}]^{\nu}_{0}\hat{\Gamma}_{\nu}\hat{W}\hat{\Gamma}_0 &= \hat{g}^{00}[\left(1+\Gamma_{(10)}X\right)^{-1}]^{\underline{\nu}}_{\underline{\sigma}}\hat{e}^{\underline{\sigma}}_{0}\hat{e}^{\nu}_{\underline{\nu}}\hat{e}^{\underline{\rho}}_{\nu}\hat{e}^{\underline{\tau}}_{0}\Gamma_{\underline{\rho}}\hat{W}\Gamma_{\underline{\tau}} \\ &= \eta^{\underline{00}}\hat{e}^{0}_{\underline{\xi}}\hat{e}^{0}_{\underline{\omega}}[\left(1+\Gamma_{(10)}X\right)^{-1}]^{\underline{\nu}}_{\underline{\sigma}}\hat{e}^{\underline{\sigma}}_{0}\hat{e}^{\nu}_{\underline{\nu}}\hat{e}^{\underline{\rho}}_{\nu}\hat{e}^{\underline{\tau}}_{0}\Gamma_{\underline{\rho}}\hat{W}\Gamma_{\underline{\tau}} \end{aligned} \tag{5.131}$$

El haciendo uso de (A.20), (A.21) y (5.130) tenemos que el término con $\underline{\nu}=0$ es de la forma:

$$\begin{aligned} \eta^{\underline{00}}\hat{e}^{0}_{\underline{0}}\hat{e}^{0}_{\underline{0}}\frac{1}{\sin^2\alpha_0}\hat{e}^{\underline{0}}_{0}\hat{e}^{0}_{\underline{0}}\hat{e}^{\underline{0}}_{0}\hat{e}^{\underline{0}}_{0}\Gamma_{\underline{0}}\hat{W}\Gamma_{\underline{0}} &= \frac{1}{\sin^2\alpha_0}\Gamma^{\underline{0}}\hat{W}\Gamma_{\underline{0}} \\ &= -\frac{\hat{W}}{\sin^2\alpha_0} \end{aligned} \tag{5.132}$$

donde hemos hecho uso de (5.113) para comprobar que $\{\Gamma^{\underline{0}},\hat{W}\}=0$.

Haciendo lo mismo para el término con $\underline{\nu}=1$ en (5.131) obtenemos:

$$\begin{aligned} \eta^{\underline{00}}\hat{e}^{0}_{\underline{0}}\hat{e}^{0}_{\underline{0}}[\left(1+\Gamma_{(10)}X\right)^{-1}]^{\underline{1}}_{\underline{0}}\hat{e}^{\underline{0}}_{0}\hat{e}^{1}_{\underline{1}}\hat{e}^{\underline{1}}_{1}\hat{e}^{\underline{0}}_{0}\Gamma_{\underline{1}}\hat{W}\Gamma_{\underline{0}} &= -\frac{\cot\alpha_0}{\sin\alpha_o}\Gamma_{(10)}\Gamma^{\underline{1}}\hat{W}\Gamma_{\underline{0}} \\ &= -\frac{\cot\alpha_0}{\sin\alpha_o}\Gamma_{(10)}\Gamma^{\underline{01}}\hat{W} \end{aligned} \tag{5.133}$$

Se puede ver que los términos con $\mu=1$ resultan en las mismas expresiones. Por lo tanto, si $\mu=0,1$, podemos escribir los correspondientes términos de (5.129) de la forma:

$$-\frac{2}{\sin\alpha_0}\left(\frac{1}{\sin\alpha_0}+\cot\alpha_0\Gamma^{\underline{01}}\Gamma_{(10)}\right)\hat{W}=-\frac{2}{\sin\alpha_0}e^{2R\Gamma_{(10)}}\hat{W} \tag{5.134}$$

Para $\sigma,\nu\in\tilde{T}^{1,1}$ tengamos en cuenta que:

$$\begin{aligned} [\left(1+\Gamma_{(10)}X\right)^{-1}]^{\nu}_{\sigma} &= [\left(1+\Gamma_{(10)}X\right)^{-1}]^{\underline{\nu}}_{\underline{\sigma}}\hat{e}^{\underline{\sigma}}_{\sigma}\hat{e}^{\nu}_{\underline{\nu}} \\ &= \delta^{\underline{\nu}}_{\underline{\sigma}}\hat{e}^{\underline{\sigma}}_{\sigma}\hat{e}^{\nu}_{\underline{\nu}} \\ &= \hat{e}^{\underline{\sigma}}_{\sigma}\hat{e}^{\nu}_{\underline{\sigma}}=\delta^{\nu}_{\sigma} \end{aligned} \tag{5.135}$$

Teniendo en cuenta esto último, notemos que:

$$\begin{aligned} \hat{g}^{\mu\nu}\hat{\Gamma}_{\nu}\hat{W}\hat{\Gamma}_{\mu} &= \eta^{\underline{\mu\nu}}\hat{e}^{\nu}_{\underline{\nu}}\hat{e}^{\mu}_{\underline{\mu}}\hat{e}^{\underline{\nu}}_{\nu}\hat{e}^{\underline{\mu}}_{\mu}\Gamma_{\underline{\nu}}\hat{W}\Gamma_{\underline{\mu}} \\ &= \Gamma^{\underline{\mu}}\hat{W}\Gamma_{\underline{\mu}} \end{aligned} \tag{5.136}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\Gamma^{\underline{\mu}} = \Gamma^{\underline{a}}, \underline{a} = 0, 1, 5, 6, 8, 9 \tag{5.137}$$

es fácil ver que, si $\mu = 2, 3, 4, 5, 6$:

$$\Gamma^{\underline{\mu}}\Gamma^{\underline{49}}\Gamma_{(10)}\Gamma_{\underline{\mu}} = -3\Gamma^{\underline{49}}\Gamma_{(10)} \tag{5.138}$$

$$\Gamma^{\underline{\mu}}\Gamma^{\underline{57}}\Gamma_{(10)}\Gamma_{\underline{\mu}} = -\Gamma^{\underline{57}}\Gamma_{(10)} \tag{5.139}$$

$$\Gamma^{\underline{\mu}}\Gamma^{\underline{68}}\Gamma_{(10)}\Gamma_{\underline{\mu}} = -\Gamma^{\underline{68}}\Gamma_{(10)} \tag{5.140}$$

$$\Gamma^{\underline{\mu}}\Gamma^{\underline{0123}}\Gamma_{\mu} = 5\Gamma^{\underline{0123}} \tag{5.141}$$

Tenemos entonces que, si denotamos i, j a las direcciones en $\tilde{T}^{1,1}$:

$$\hat{g}^{ij}[\big(1 + \Gamma_{(10)}X\big)^{-1}]_j^k\hat{\Gamma}_k\hat{W}\hat{\Gamma}_i = -3W^{49} - W^{57} + W^{68} - 5W_4 \tag{5.142}$$

donde hemos definido:

$$W^{ab} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{R^3}}\Gamma^{\underline{ab}}, \quad W_4 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{R^3}}\Gamma^{\underline{0123}} \tag{5.143}$$

Reuniendo (5.134) y (5.142) obtenemos el resultado final:

$$\hat{g}^{\mu\sigma}[\big(1 + \Gamma_{(10)}X\big)^{-1}]_\sigma^\nu\hat{\Gamma}_\nu\hat{W}\hat{\Gamma}_\mu = -\frac{2}{\sin\alpha_0}e^{2R\Gamma_{(10)}}\hat{W} - 3W^{49} - W^{57} + W^{68} - 5W_4 \tag{5.144}$$

Por otro lado, tenemos que $\hat{\Delta}^{(2)} = -3(W^{49} + W^{57} - W^{68}) - W_4$, por lo que:

$$\hat{g}^{\mu\sigma}[\big(1 + \Gamma_{(10)}X\big)^{-1}]_\sigma^\nu\hat{\Gamma}_\nu\hat{W}\hat{\Gamma}_\mu - \hat{\Delta}^{(2)} = -\frac{2}{\sin\alpha_0}e^{2R\Gamma_{(10)}}\hat{W} + 2(W^{57} - W^{68}) - 4W_4 \tag{5.145}$$

Podemos realizar el cálculo explícito de esta última expresión en términos de la representación propuesta en el Apéndice. De esta manera es fácil ver que:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{\underline{49}}\Gamma_{(10)} = -i\sigma_3 \otimes I \otimes \Gamma_7^{\underline{6}}, \quad \Gamma^{\underline{57}}\Gamma_{(10)} = -\sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \Gamma_7^{\underline{24}},\\
&\Gamma^{\underline{68}}\Gamma_{(10)} = -\sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \Gamma_7^{\underline{35}}, \quad \Gamma^{\underline{01}}\Gamma_{(10)} = -\sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \Gamma_7^{\underline{01}},\\
&\Gamma^{\underline{0123}} = i\sigma_3 \otimes I \otimes \Gamma_7^{\underline{01}}.
\end{aligned} \tag{5.146}$$

Con todo esto se puede ver que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W} &= e^{-2R\Gamma_{(10)}}\left(-\frac{2}{\sin\alpha_0}e^{2R\Gamma_{(10)}}\hat{W} + 2(W^{57} - W^{68}) - 4W_4\right)\\
&= \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & \tilde{w} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.147}$$

donde los bloques son de 16×16 y podemos construirlos en términos de bloques de 8×8 que involucran sólo a las matrices de Dirac en 7 dimensiones:

$$\begin{aligned}
w_{11} &= w_{22} = \frac{2i}{\sin\alpha_0}\left(\Gamma_7^{\underline{6}} - 3\Gamma_7^{\underline{01}}\right) - 2\cot\alpha_0\Gamma^{\underline{01}}\left(\Gamma_7^{\underline{24}} - 3\Gamma_7^{\underline{35}}\right) \\
w_{21} &= -w_{12} = 4\cot\alpha_0 I_8 \\
\tilde{w}_{11} &= \tilde{w}_{22} = -w_{11}, \qquad \tilde{w}_{12} = -\tilde{w}_{21} = -w_{12}
\end{aligned} \tag{5.148}$$

Finalmente, la acción (5.128) se puede escribir de la forma:

$$S_F = \frac{T_{D6}}{2}\int d^7\sigma e^{-\hat{\Phi}}\sqrt{-\det\hat{g}}\bar{\Theta}\left(1 - \Gamma_{D6}^{(0)\prime}\right)\left[\hat{\Gamma}^\mu\hat{\nabla}_\mu + \mathcal{W}\right]\Theta \tag{5.149}$$

donde la forma explícita de $\hat{\Gamma}^\mu\hat{\nabla}$ se encuentra en el Apéndice.

Es interesante notar que, en el caso de fijar $\alpha_0 = \pi/2$ la geometría deformada queda identificada simplemente con la geometría inducida en el volumen de mundo (*i.e.* $\hat{g} \to g$). Notemos que este caso corresponde simplemente a una configuración clásica con campo de gauge nulo (recordemos que $\mathcal{F}_{0r} \sim \cos\alpha_0$) por lo que la equivalencia entre $\hat{g}$ y g es natural debido a la definición de la geomtría defromada. Finalmente, recordando la definición de los espacios $T^{1,1}$ (ver nota al pie de página en la sección 1 del capítulo 3), y dado que $\cos\pi/4 = \sin\pi/4$, el espacio compacto de la geometría inducida deja de ser un $T^{1,1}$ deformado y pasa a ser un $T^{1,1}$ convencional.

Reducción dimensional

La expresión (5.149) describe la acción de un espinor de 32 componentes, es decir un fermión en un espacio de 10 dimensiones. Este espinor puede pensarse como dos espinores en la representación **16** de $SO(1,6)$ con quiralidad definida. Definimos las conjugaciones de Dirac y de Majorana de la siguiente manera

$$\bar{\Theta}_D = \Theta^\dagger\beta, \qquad \bar{\Theta}_M = \Theta^T\hat{C} \tag{5.150}$$

donde C es el operador de conjugación de carga en 10 dimensiones y β es una matriz tal que $\beta\Gamma_m\beta^{-1} = -\Gamma_m^\dagger$. En 10 dimensiones se puede imponer la condición de Majorana [10] que implica que el conjugado de Dirac es igual al conjugado de Majorana, por lo que puede expresarse como:

$$\Theta^\dagger\beta = \Theta^T C \Rightarrow \Theta^* = (\beta^{-1})^T C^T\Theta \tag{5.151}$$

Se puede ver que $\beta = \Gamma^{\underline{0}}$.

Dada la representación conveniente de las matrices de Dirac en la que estamos trabajando, es fácil ver que:

$$\hat{C} = \sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes C \tag{5.152}$$

con C el operador de conjugación de carga en 7 dimensiones (ver Apéndice). Teniendo en cuenta que $\Gamma^{\underline{0}} = (\Gamma^{\underline{0}})^\dagger$ y que en nuestra representación (ver apéndice) $\Gamma^{\underline{0}}$ es real, podemos reescribir (5.151) de la siguiente manera:

$$\Theta^* = \hat{B}\Theta \tag{5.153}$$

donde definimos $\hat{B} = -\Gamma^{\underline{0}}\hat{C}$ y hemos hecho uso de que en 7 dimensiones el operador de conjugación de carga es simétrico y real [10]. Ahora bien,notemos que la representacion de las matrices de Dirac de $SO(1,9)$ como $SO(1,6) \times SO(3) \simeq SO(1,6) \times SU(2)$ (ver Apéndice) es la más natural para realizar la reducción dimensional. De hecho, deja en evidencia la posibilidad de expresar al espinor de diez dimensiones como cuatro espinores Ψ^i en 7 dimensiones, cuyo índice i indica que se mezclan entre ellos por la acción de las matrices de $SO(3)$. La reducción dimensional consiste entonces en escribir a los espinores de la representación **16** de SO(1,9) en t'erminos de la representación (**8**,**2**) de $SO(1,6) \times SO(3)$. Notemos que los espinores de la representación **8** de $SO(1,6)$ son de 8 componentes complejas. Vemos aquí que la condición de Majorana simpléctica (o de realidad simpléctica) (A.16) que cumplen los espinores en 7 dimensiones se desprende de la descomposición $\mathbf{16} \to (\mathbf{8}, \mathbf{2})$ y de la condición de Majorana en 10 dimensiones. De hecho, el carácter simpléctico actúa sobre los índices de la representación **2** de $SU(2)$ [10].

En términos de (5.152) podemos expresar $\hat{B}$ de la siguiente manera

$$\hat{B} = i\sigma_2 \otimes I \otimes B \tag{5.154}$$

Consideremos un espinor genérico de 2 de $SU(2)$. Claramente siempre puede expresarse en términos de los autoestados del operador de spín σ_3, los cuales denotaremos η_{α_i} con $\alpha_i = \pm 1$ y cumplen que

$$\sigma_1 \eta_{\alpha_i} = \eta_{-\alpha_i}, \quad \sigma_2 \eta_{\alpha_i} = i\alpha_i \eta_{-\alpha_i}, \quad \sigma_3 \eta_{\alpha_i} = \alpha_i \eta_{\alpha_i} \tag{5.155}$$

Teniendo en cuenta esto último, podemos reescribir el espinor en 10 dimensiones de la forma:

$$\Theta = \sum_{\alpha_i} \eta_{\alpha_1} \otimes \eta\alpha_2 \otimes \Psi^{\alpha_1\alpha_2} \tag{5.156}$$

donde $\Psi^{\alpha_1\alpha_2}$ son 4 espinores de **8** de $SO(1,6)$ y concentran toda la posible dependencia funcional de las coordenadas. Aplicando la condición de Majorana (5.151) y haciendo uso de (5.154) y de (5.156) obtenemos la siguiente condición:

$$(\Psi^{\alpha_1\alpha_2})^* = \alpha_1 B \Psi^{-\alpha_1\alpha_2} \tag{5.157}$$

Definiendo $\Psi^1 = \Psi^{11}$, $\Psi^2 = \Psi^{1-1}$, $\Psi^3 = \Psi^{-11}$ y $\Psi^4 = \Psi^{-1-1}$, la última condición se traduce en:

$$\begin{array}{ll} (\Psi^1)^* = B\Psi^3, & (\Psi^2)^* = B\Psi^4 \\ (\Psi^3)^* = -B\Psi^1 & (\Psi^4)^* = -B\Psi^2 \end{array} \tag{5.158}$$

Notemos que en realidad se reducen a dos condiciones independientes si hacemos uso de que en 7 dimensiones $BB^* = -I$.

Encontramos entonces que de los cuatro espinores provenientes de la descomposición $\mathbf{16} \rightarrow (\mathbf{8}, \mathbf{2})$ s'olo dos son independientes. Elegimos entonces ψ^1 y ψ^2 como los espinores independientes y, aprovechando que $\mathcal{W}$ en (5.149) es diagonal por bloques podemos reescribir la acción como:

$$\begin{aligned} S_F =& T_{D6} \sum_i \int d\sigma^7 e^{-\hat{\Phi}} \sqrt{-\det \hat{g}} \bar{\Psi}^i \left(1 - \Gamma_{D6}^{(0)\prime}\right) \left[\hat{\Gamma}^\mu \hat{\nabla}_\mu + \mathcal{W}_1\right] \Psi^i \\ &+ T_{D6} \sum_i \int d\sigma^7 e^{-\hat{\Phi}} \sqrt{-\det \hat{g}} \Big[\bar{\Psi}^1 \left(1 - \Gamma_{D6}^{(0)\prime}\right) \mathcal{W}_2 \Psi^2 - \bar{\Psi}^2 \left(1 - \Gamma_{D6}^{(0)\prime}\right) \mathcal{W}_2 \Psi^1\Big] \end{aligned} \tag{5.159}$$

donde todas las matrices de Dirac pertenecen ahora a la representación de $SO(1,6)$. Notemos que la parte de $SU(2)$ del proyector $\Gamma_{D6}^{(0)\prime}$ no es más que una identidad, por lo que introducir la reducción dimensional en este operador es trivial.

Hemos obtenido entonces una teoría en 7 dimensiones, ya que tanto los campos bosónicos como los fermiónicos dependen de las coordenadas del volumen de mundo y todas las estructuras involucradas en las correspondientes acciones se derivan de la geometría inducida en la D6-brana.

5.2.1. Ecuaciones de Movimiento para las fluctuaciones fermiónicas

6. Conclusiones

6.1. Resultados

Se estudiaron las ecuaciones de movimiento clásicas de una D6-brana en $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ que se proyecta en sobre una trayectoria recta en la frontera de AdS_4 dual a un Wilson line en el modelo ABJM. Se obtuvo el embedding estático de la forma:

$$X^m = \{\sigma^0, \sigma^1, x_0, y_0, \alpha_0, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5, \sigma^6\}, \quad \mathcal{F}_{0r} = \frac{R^3}{4k}\cos\alpha_0 \tag{6.1}$$

Luego se obtuvieron los correspondientes lagrangeanos cuadráticos para las fluctuaciones de los campos bosónicos y fermiónicos sobre el embedding estático, los cuales resultaron de la forma:

$$\begin{split}\mathcal{L}_B = -T_{D_6}\frac{R^9}{2^{10}k^2}\sin^3\alpha_0\sin\theta_1\sin\theta_2\Big[\frac{R^3}{8k}r^2\mathcal{G}^{\mu\nu}\partial_\mu\chi\partial_\nu\chi + \frac{R^3}{8k}\mathcal{G}^{\mu\nu}\partial_\mu\xi\partial_\nu\xi + \\ \frac{1}{4}\mathcal{G}^{\mu\rho}\mathcal{G}^{\sigma\nu}f_{\rho\nu}f_{\mu\sigma} - \frac{3}{2\sin^2\alpha_0}\xi^2 - \frac{12k^2}{R^3\sin^3\alpha_0}\xi f_{0r}\Big]\end{split} \tag{6.2}$$

$$\mathcal{L}_F = \frac{T_{D6}}{2}e^{-\hat{\phi}}\sqrt{-\det\hat{g}}\bar{\Theta}\left(1-\Gamma_{D6}^{(0)\prime}\right)\left[\hat{\Gamma}^\mu\hat{\nabla}_\mu + \mathcal{W}\right]\Theta \tag{6.3}$$

donde las definiciones de los operadores que aparecen en estas últimas expresiones se encuentran en las correspondientes secciones del trabajo.

Para el caso bosónico se estudió el comportamiento en $r \to \infty$ de las soluciones correspondientes a los modos 0 (”fluctuación clásica”).

6.2. Cálculos Futuros

Un cálculo que puede desencadenarse de este trabajo es el estudio del espectro completo de autovalores de los lagrangeanos cuadr’aticos bosónico y fermiónico. En base a estos espectros se podr’a calcular el correspondiente determinante con el que construimos la aproximación semiclásica del problema (ver Introducción).

Apéndices

A. Convenciones y estructuras

A.1. Convenciones

Se designan las letras $m, n, \ldots$ para los índices correspondientes al espacio curvo 10-dimensional $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$. La métrica de este espacio se denota G_{mn} y las correspondientes coodenadas estaán escritas de la forma:

$$X^m = \{t, r, x, y, \alpha, \theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2, \chi\} \tag{A.1}$$

Se reserva la notación $\mu, \nu, \ldots$ para los índices correspondientes al volumen de mundo de la D6-brana cuya métrica inducida es $g_{\mu\nu} = P[G]_{\mu\nu}$, y $P[\quad]$ denota el pullback sobre el volumen de mundo.[1] Los índices de las coordenadas del vielbein (espacio tangente) se designan con $\underline{a}, \underline{b}, \ldots$. Las 1-formas del vielbein del espacio tiempo se designan con $E^{\underline{a}}$ mientras que las del volumen de mundo se designan con $e^{\underline{\mu}}$. Las conexiones de la geometría del espacio tiempo se denotan $\{\Omega^{\underline{ab}}\}$ mientras que $\{\omega^{\underline{\mu\nu}}\}$ son el pullback de estas conexiones sobre la geometría inducida en el volumen de mundo.
La métrica deformada se denota con $\hat{g}_{\mu\nu}$, y con $\hat{e}^{\underline{\mu}}$ y $\hat{\omega}^{\underline{\mu\nu}}$ a su vielbein y sus conexiones respectivamente.

A.2. Representación de las matrices de Dirac

Denotamos $\Gamma^{\underline{a}}$ a las matrices de Dirac que cumplen el álgebra de Clifford para un espacio-tiempo plano 10-dimensional, es decir:

[1]Consideremos una variedad $\mathcal{M}$ parametrizada localmente por las coordenadas σ^μ embebida en una variedad $\mathcal{N}$ parametrizada localmente por las coordenadas X^m. Por lo tanto existe un mapeo suave $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ que en este caso está dado por el mismo embedding $X^m(\sigma^\mu)$. Este mapeo induce un **mapeo diferencial** ϕ_* entre los espacios tangentes, $\phi_* : T_p\mathcal{M} \to T_{\phi(p)}\mathcal{N}$. A su vez, el mapeo diferencial induce un mapeo entre los espacios tangentes duales en el sentido inverso, $\phi^* : T^*_{\phi(p)}\mathcal{N} \to T^*_p\mathcal{M}$. A este último mapeo diferencial se lo denomina **pullback** y su acción sobre una 1-forma ω está dada por $\langle \phi^*\omega, V\rangle = \langle \omega, \phi_* V\rangle$. En términos de las componente, es fácil ver que la última relación equivale a:

$$\phi^*\omega_\mu = \omega_m \frac{\partial X^m}{\partial \sigma^\mu}$$

El concepto de pullback puede generalizarse a un mapeo entre tensores $(0, q)$. De esta forma dado un tensor A del tipo $(0.q)$ con componentes $A_{m_1 m_2 \ldots m_q}$ definido en $\mathcal{N}$, el pullback es tensor $P[A]$ definido en la $\mathcal{M}$ cuyas componentes son:

$$P[A]_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q} = A_{m_1 m_2 \ldots m_q} \frac{\partial X^{m_1}}{\partial \sigma^{\mu_1}} \frac{\partial X^{m_2}}{\partial \sigma^{\mu_2}} \cdots \frac{\partial X^{m_q}}{\partial \sigma^{\mu_q}}$$

$$\{\Gamma^{\underline{a}}, \Gamma^{\underline{b}}\} = 2\eta^{\underline{ab}} \tag{A.2}$$

donde $\eta^{\underline{ab}} = diag\,(-1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Las matrices de Dirac de $SO(1, 9)$ son de 32×32 y en el presente trabajo utilizamos una representación en términos de productos $SO(1, 6) \otimes SO(3) \simeq SO(1, 6) \otimes SU(2)$ de la forma:

$$\Gamma^{\underline{a}} = \begin{cases} \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \Gamma_7^{\underline{\mu}} & \text{para} \;\; \underline{a} = \underline{\mu} = 0, 1 \\ \sigma_2 \otimes I_2 \otimes I_8 & \text{para} \;\; \underline{a} = 2 \\ -\sigma_1 \otimes I_2 \otimes I_8 & \text{para} \;\; \underline{a} = 3 \\ \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes I_8 & \text{para} \;\; \underline{a} = 4 \\ \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \Gamma_7^{\underline{\mu}} & \text{para} \;\; \underline{a} = \underline{\mu + 3} = 5, 6, 7, 8, 9 \end{cases} \tag{A.3}$$

donde σ_i son las matrices de Pauli. A su vez, $\Gamma_7^{\underline{\mu}}$ denota las matrices de Dirac de $SO(1, 6)$ las cuales son de 8×8 y pueden escribirse en la siguiente representación:

$$\Gamma_7^{\underline{\mu}} = I_2 \otimes \gamma^{\mu}, \qquad \Gamma_7^{\underline{3+i}} = \sigma_i \otimes \Gamma^5 \tag{A.4}$$

con:

$$\gamma^{\underline{0}} = i\sigma_2 \otimes I_2, \qquad \gamma^{\underline{i}} = \sigma_1 \otimes \sigma_i\,, \tag{A.5}$$

Es decir que:

$$\gamma^{\underline{\mu}} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} \sigma^{\mu} = (I_2, \vec{\sigma}) \\ \bar{\sigma}^{\mu} = (-I_2, \vec{\sigma}) \end{array} \tag{A.6}$$

A su vez, tenemos que:

$$\gamma^{\underline{5}} = i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\gamma^{\underline{2}}\gamma^{\underline{3}} = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{A.7}$$

Por otro lado, definiendo:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^{\underline{1}} &= \sigma_2 \otimes I_2 \\ \tilde{\gamma}^{\underline{2}} &= -\sigma_1 \otimes I_2 \\ \tilde{\gamma}^{\underline{3}} &= \sigma_3 \otimes \sigma_1 \end{aligned} \tag{A.8}$$

es fácil ver que conforman una representación de las matrices de Dirac en $SO(3)$, (*i.e.* $\{\tilde{\gamma}^{\underline{i}}, \tilde{\gamma}^{\underline{j}}\} = 2\delta^{\underline{ij}}$).

Los índices $\underline{a}$ de las matrices de Dirac se suben o bajan con la métrica $\eta^{\underline{ab}}$.

La asignación de índices que se hizo en (A.3), que en principio puede parecer poco natural, está justificada en que queremos que las matrices de $SO(1, 9)$ que no involucran matrices de $SO(1, 6)$ se asignen a la coordenada tangente del espacio transversal al volumen de mundo, es decir x, y, α, de manera que la reducción dimensional resulte directa (ver sección Fluctuaciones fermiónicas).

Las matrices de Dirac del espacio-tiempo curvo son:

$$\Gamma^m = E^m_{\underline{a}} \Gamma^{\underline{a}} \tag{A.9}$$

donde $E^m_{\underline{a}}$ son los coeficientes del Vielbein. Utilizando la última expresión y el hecho que $G_{mn} = E^{\underline{a}}_m E^{\underline{b}}_n \eta_{\underline{ab}}$, es fácil ver que:

$$\{\Gamma^m, \Gamma^n\} = 2G^{mn} \tag{A.10}$$

Por otro lado, definimos:

$$\Gamma^{\underline{a_1 a_2 \ldots a_n}} = \frac{1}{n!} \Gamma^{[\underline{a_1}} \Gamma^{\underline{a_2}} \ldots \Gamma^{\underline{a_n}]} \tag{A.11}$$

donde el último término representa un producto antisimetrizado el cual se reduce $\Gamma^{\underline{a_1}} \Gamma^{\underline{a_2}} \ldots \Gamma^{\underline{a_n}}$ haciendo uso de la propiedad (A.2) de las matrices de Dirac.

En este contexto definimos:

$$\Gamma_{(10)} = \Gamma^{\underline{012 \ldots 9}} \tag{A.12}$$

y

$$\Gamma^{m_1 m_2 \ldots m_n} = e^{m_1}_{\underline{a_1}} e^{m_2}_{\underline{a_2}} \ldots e^{m_n}_{\underline{a_n}} \Gamma^{\underline{a_1 a_2 \ldots a_n}}. \tag{A.13}$$

Por otro lado, denotamos con Γ^μ al pullback de Γ^m sobre el volumen de mundo y $\Gamma^{\underline{\mu}} = e^{\underline{\mu}}_\mu \Gamma^\mu$, donde $\{e^{\underline{\mu}}\}$ son las 1-formas del vielbein de la métrica inducida. Notemos que, dado que $\{E^{\underline{a}}\}$ con $\alpha \to \alpha_0$ es un covielbein (ver sección Vielbein y Conexiones de este Apéndice), tenemos que:

$$\{\Gamma^{\underline{\mu}}\} = \{\Gamma^{\underline{0}}, \Gamma^{\underline{1}}, \Gamma^{\underline{5}}, \Gamma^{\underline{6}}, \Gamma^{\underline{7}}, \Gamma^{\underline{8}}, \Gamma^{\underline{9}}\} \tag{A.14}$$

Los espinores en 7 dimensiones satisfacen la condición de Majorana simpléctica, la cual puede expresarse en términos de la matriz de conjugación de carga C o en términos del operador $B = -\Gamma^{\underline{0}}_7 C$ que generan la transposición y la conjugación respectivamente:

$$C\Gamma_{\underline{\mu}} C^{-1} = -\Gamma^T_\mu, \quad B\Gamma_{\underline{\mu}} B^{-1} = \Gamma^*_\mu \tag{A.15}$$

y puede expresarse en dos formas equivalentes:

$$\bar{\Psi}^I = -\epsilon^{IJ} \Psi^J_J C, \qquad (\Psi^*)^I = \epsilon^{IJ} B^* \Psi_J \tag{A.16}$$

Se puede ver que $C = \Gamma^{\underline{025}}_7$ y $B = \Gamma^{\underline{25}}_7$.

A.3. Vielbein y Conexiones

En la expresión (3.3) se escribió la métrica del espacio de manera que se haga evidente la conformación del Vielbein. Las 1-formas del espacio tangente entonces son:

$$\begin{aligned}
E^{\underline{0}} &= \frac{R^{\frac{3}{2}}}{2k^{\frac{1}{2}}} r dt & E^{\underline{1}} &= \frac{R^{\frac{3}{2}}}{2k^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{r} dr \\
E^{\underline{2}} &= \frac{R^{\frac{3}{2}}}{2k^{\frac{1}{2}}} r dx & E^{\underline{3}} &= \frac{R^{\frac{3}{2}}}{2k^{\frac{1}{2}}} r dy \\
E^{\underline{4}} &= \frac{R^{\frac{3}{2}}}{2k^{\frac{1}{2}}} d\alpha & E^{\underline{5}} &= \frac{R^{\frac{3}{2}}}{2k^{\frac{1}{2}}} \cos\frac{\alpha}{2} d\theta_1 \\
E^{\underline{6}} &= \frac{R^{\frac{3}{2}}}{2k^{\frac{1}{2}}} \sin\frac{\alpha}{2} d\theta_2 & E^{\underline{7}} &= \frac{R^{\frac{3}{2}}}{2k^{\frac{1}{2}}} \cos\frac{\alpha}{2} \sin\theta_1 d\varphi_1 \\
E^{\underline{8}} &= \frac{R^{\frac{3}{2}}}{2k^{\frac{1}{2}}} \sin\frac{\alpha}{2} \sin\theta_2 d\varphi_2 & E^{\underline{9}} &= \frac{R^{\frac{3}{2}}}{2k^{\frac{1}{2}}} \cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\alpha}{2} \left(\cos\theta_1 d\varphi_1 + \cos\theta_2 d\varphi_2 + d\chi\right)
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Definimos los coeficientes del Vielbein $E_m^{\underline{a}}$ tales que:

$$E^{\underline{a}} = E_m^{\underline{a}} dx^m \tag{A.18}$$

Notemos que el índice $\underline{a}$, correspondiente al espacio tangente, se sube o baja con la métrica plana $\eta_{\underline{ab}}$; mientras que el índice de espacio curvo m se sube o baja con la métrica G_{mn}.

Consideremos un vielbein genérico $\{E^{\underline{a}}, E^{\underline{b}}\}$. Lo denominamos un *covielbein* si cumple que $\{e^{\underline{\mu}}\} = P[E^{\underline{a}}]$ es un vielbein para la métrica inducida en la variedad correspondieente al volumen de mundo y $P[E^{\underline{b}}] = 0$. Dada la estructura simple del pullback sobre el embedding estático que nos concierne en este trabajo, es directo confirmar que el vielbein (A.17) es efectivamente un covielbein. En conclusión, tenemos que el vielbein $\{e^{\underline{\mu}}\}$ correspondiente al volumen de mundo no es más que:

$$\{e^{\underline{\mu}}\} = \begin{cases} \{e^{\underline{a}}\} & \text{para } \underline{a} = 0, 1 \\ \{e^{\underline{a+3}}\} & \text{para } \underline{a} = 2, \ldots, 6 \end{cases} \tag{A.19}$$

donde hay que tener en cuenta que, al hacer esta identificación, también hay que llevar $\alpha \to \alpha_0$.

Debido a la frecuencia con la que se los utiliza en este trabajo, escribiremos explícitamente y en forma matricial a las componentes de $e_\nu^{\underline{\mu}}$ y su inversa $e_{\underline{\nu}}^{\mu}$:

$$e = \frac{R^{3/2}}{2\sqrt{k}} \begin{pmatrix}
\sin\alpha_0 r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\sin\alpha_0}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cos\frac{\alpha_0}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \sin\frac{\alpha_0}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\frac{\alpha_0}{2}\sin\theta_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\frac{\alpha_0}{2}\sin\theta_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\frac{\alpha_0}{2}\sin\frac{\alpha_0}{2}\cos\theta_1 & \cos\frac{\alpha_0}{2}\sin\frac{\alpha_0}{2}\cos\theta_2 & \cos\frac{\alpha_0}{2}\sin\frac{\alpha_0}{2}
\end{pmatrix} \tag{A.20}$$

$$
e^{-1} = \frac{2\sqrt{k}}{R^{3/2}} \begin{pmatrix}
\frac{1}{\sin\alpha_0 r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{r}{\sin\alpha_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sec\frac{\alpha_0}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \csc\frac{\alpha_0}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sec\frac{\alpha_0}{2}\csc\theta_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \csc\frac{\alpha_0}{2}\csc\theta_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\sec\frac{\alpha_0}{2}\cot\theta_1 & -\csc\frac{\alpha_0}{2}\cot\theta_2 & \sec\frac{\alpha_0}{2}\csc\frac{\alpha_0}{2}
\end{pmatrix}
\tag{A.21}
$$

En términos de los coeficientes del Vielbein construimos las conexiones $\Omega^{\underline{ab}}$ cuyas componentes en el espacio-tiempo curvo son de la forma:

$$
\begin{aligned}
\Omega^{\underline{ab}}_m &= E^{\underline{a}}_n \nabla_m E^{n\underline{b}} \\
&= E^{\underline{a}n}\left(\partial_m E^{\underline{b}}_n - \Gamma^p_{nm} E^{\underline{b}}_p\right)
\end{aligned}
\tag{A.22}
$$

donde en la última igualdad se escribió explícitamente la forma de la derivada covariante ∇_m en términos de los símbolos de Christofell $\Gamma^p_{nm} = \frac{1}{2}G^{pq}(\partial_m G_{qn} + \partial_n G_{qm} - \partial_q G_{nm})$ y se hizo uso de que la métrica es covariantemente constante (*i.e.* $\nabla_m G_{pq} = 0$).
Con todo esto, las conexiones no nulas son:

$$
\begin{aligned}
\Omega^{\underline{01}} &= rdt \\
\Omega^{\underline{12}} &= -rdx \\
\Omega^{\underline{13}} &= -rdy \\
\Omega^{\underline{45}} &= \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}d\theta_1 \\
\Omega^{\underline{45}} &= -\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}d\theta_2 \\
\Omega^{\underline{47}} &= \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\theta_1 d\varphi_1 \\
\Omega^{\underline{48}} &= -\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\theta_2 d\varphi_2 \\
\Omega^{\underline{49}} &= -\frac{1}{2}\cos\alpha(\cos\theta_1 d\varphi_1 + \cos\theta_2 d\varphi_2 + d\chi) \\
\Omega^{\underline{57}} &= -\frac{1}{4}(3+\cos\alpha)\cos\theta_1 d\varphi_1 + \frac{1}{4}(1-\cos\alpha)d\varphi_2 + \frac{1}{4}(1-\cos\alpha)d\chi \\
\Omega^{\underline{59}} &= \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\theta_1 d\varphi_1 \\
\Omega^{\underline{68}} &= \frac{1}{4}(1+cos\alpha)\cos\theta_1 d\varphi_1 - \frac{1}{4}(3-cos\alpha)\cos\theta_2 d\varphi_2 + \frac{1}{4}(1+cos\alpha)d\chi \\
\Omega^{\underline{69}} &= \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\theta_2 d\varphi_2 \\
\Omega^{\underline{79}} &= -\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}d\theta_1 \\
\Omega^{\underline{79}} &= -\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}d\theta_2
\end{aligned}
\tag{A.23}
$$

El resto de las conexiones no nulas se pueden obteneer haciendo uso de $\Omega^{\underline{ab}}_m = -\Omega^{\underline{ba}}_m$.

Haciendo uso de estas estructuras calculamos las *conxiones de spin* de la geometría, las cuales se escriben como:

$$\Omega_m = \frac{1}{4}\Gamma_{\underline{ab}}\Omega^{\underline{ab}}_m \tag{A.24}$$

Para el caso del embedding estático, el pullback de las conexiones de spin es trivial. Más explícitamente, tenemos que:

$$\omega_\mu = \frac{\partial X^m}{\partial \sigma^\mu}\Omega_m \tag{A.25}$$

donde ω son las conexiones de spin de la geometría inducida en el volumen de mundo. De esta última expresión, y haciendo uso de que $\frac{\partial X^m}{\partial\sigma^\mu} = \delta^m_\mu$ si $m = 0,1,5,6,7,8,9$, es fácil darse cuenta que nos quedaremos con las conexiones que posean componentes sobre el volumen de mundo, quedando su forma inalterada. En conclusión, tenemos que $\{\omega_\mu\} = \{\Omega_m, m = 0,1,5,6,7,8,9\}$.

A.4. Métrica deformada

Dada su utilidad en el contexto de los campos fermiónicos, definimos la métrica deformada del sistema como:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - F_{\mu\rho} g^{\rho\tau} F_{\tau\nu} \tag{A.26}$$

En el sistema tratado en este trabajo la forma de $\hat{g}$ es muy simple debido a que el campo de gauge F sólo posee componente eléctrica radial constante y puede verse que:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \mathcal{G}_{\mu\nu} \tag{A.27}$$

donde $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ no es más que la *open string metric* definida en (5.8). Es decir que sólo se diferencia de la métrica inducida por un $\sin^2 \alpha_0$ que multiplica a la parte de AdS_2.
De aquí entonces que el vielbein deformado no es más que:

$$\begin{aligned} \hat{e}^{\underline{0}} = \sin\alpha_0 e^{\underline{0}} \qquad \hat{e}^{\underline{1}} = \sin\alpha_0 e^{\underline{1}} \\ \hat{e}^{i} = e^{\underline{i}}, \quad i \in \tilde{T}^{1,1} \end{aligned} \tag{A.28}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que el vielbein deformado sólo difiere en factores constantes del vielbein inducido, y haciendo uso de la expresión (A.22), es directo ver que:

$$\hat{\omega}^{\underline{\mu\nu}} = \omega^{\underline{\mu\nu}} \tag{A.29}$$

donde $\omega^{\underline{\mu\nu}}$ representa las conexiones sobre la variedad inducida, es decir, el pullback sobre las conexiones del espacio-tiempo.

Términos de conexiones

En términos de (A.23) y de las consideraciones hechas en el Apéndice respecto a las conexiones d ela métrica deformada tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&\hat{\Gamma}^0\hat{\nabla}_0 = \hat{e}^0_{\underline{0}}\left(\Gamma^{\underline{0}}\partial_0 - \frac{r}{2}\Gamma^{\underline{1}}\right)\\
&\hat{\Gamma}^1\hat{\nabla}_1 = \hat{e}^1_{\underline{1}}\Gamma^{\underline{1}}\partial_1\\
&\hat{\Gamma}^2\hat{\nabla}_2 = \hat{e}^2_{\underline{2}}\left(\Gamma^{\underline{2}}\partial_2 - \frac{1}{4}\sin\frac{\alpha_0}{2}\Gamma^{\underline{246}}\right)\\
&\hat{\Gamma}^3\hat{\nabla}_3 = \hat{e}^3_{\underline{3}}\left(\Gamma^{\underline{3}}\partial_3 - \frac{1}{4}\cos\frac{\alpha_0}{2}\Gamma^{\underline{356}}\right)\\
&\hat{\Gamma}^4\hat{\nabla}_4 = \hat{e}^4_{\underline{4}}\left(\Gamma^{\underline{4}}\partial_4 + \frac{1}{8}(3+\cos\alpha_0)\cos\theta_1\Gamma^{\underline{3}} + \frac{1}{8}(1+\cos\alpha_0)\cos\theta_1\Gamma^{\underline{435}} + \frac{1}{4}\sin\frac{\alpha_0}{2}\sin\theta_1\Gamma^{\underline{426}}\right)\\
&\hat{\Gamma}^5\hat{\nabla}_5 = \hat{e}^5_{\underline{5}}\left(\Gamma^{\underline{5}}\partial_5 + \frac{1}{8}(3-\cos\alpha_0)\cos\theta_2\Gamma^{\underline{3}} + \frac{1}{8}(1-\cos\alpha_0)\cos\theta_2\Gamma^{\underline{524}} + \frac{1}{4}\cos\frac{\alpha_0}{2}\sin\theta_2\Gamma^{\underline{536}}\right)\\
&\hat{\Gamma}^6\hat{\nabla}_6 = \hat{e}^6_{\underline{\mu}}\Gamma^{\underline{\mu}}\partial_6 + \frac{1}{8}(1+\cos\alpha_0)\left(-\hat{e}^6_{\underline{4}}\Gamma^{\underline{2}} + \hat{e}^6_{\underline{5}}\Gamma^{\underline{524}} + \hat{e}^6_{\underline{6}}\Gamma^{\underline{624}} + \hat{e}^6_{\underline{435}}\Gamma^{\underline{2}} - \hat{e}^6_{\underline{5}}\Gamma^{\underline{3}} + \hat{e}^6_{\underline{6}}\Gamma^{\underline{635}}\right)
\end{aligned}
\tag{A.30}
$$

Podemos reescribir entonces el primer término de (5.128) de la forma:

$$
\hat{\Gamma}^\mu\hat{\nabla}_\nu = \hat{\Gamma}^\mu\partial_\mu + \mathcal{C} \tag{A.31}
$$

con

$$
\mathcal{C} = \sqrt{\frac{k}{R^3}}\begin{pmatrix}
0 & D & 0 & 0 & 0 & 0 & -R & 0\\
C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R\\
0 & 0 & 0 & D & -R & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & C & 0 & 0 & -R & 0 & 0\\
0 & 0 & R & 0 & 0 & -D & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & R & -C & 0 & 0 & 0\\
R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D\\
0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 & -C & 0
\end{pmatrix} \tag{A.32}
$$

Donde hemos definido las matrices C,D y R tales que:

$$
\begin{aligned}
&C_{11} = -C_{22} = C_{33} = -C_{44} = \frac{i}{2}\tan\frac{\alpha_0}{2},\\
&C_{12} = -C_{21} = \csc\alpha_0\Big[-i\cos\alpha_0 + \cos^3\frac{\alpha_0}{2}\left(\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_2} - \cot\theta_2\right)\Big],\\
&C_{13} = C_{31} = C_{24} = C_{42} = \frac{i}{2}\cos\frac{\alpha_0}{2}\cot\theta_1,\\
&C_{14} = -C_{23} - \frac{1}{4}\Big[4\cot\theta_2\csc\frac{\alpha_0}{2} + (3+\cos\alpha_0)\cot\theta_1\sec\frac{\alpha_0}{2} + 2i\tan\frac{\alpha_0}{2}\Big],\\
&C_{34} = -C_{43} = \csc\alpha_0\Big[-i\cos\alpha_0 + \cos^3\frac{\alpha_0}{2}\left(\cot\theta_2 - \frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_2}\right)\Big],
\end{aligned}
\tag{A.33}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_{11} = -D_{22} = D_{33} = -D_{44} = C_{11}, \\
&D_{12} = -D_{21} = C_{43}, \\
&D_{13} = D_{31} = D_{24} = D_{42} = -C_{13}, \\
&D_{14} = D_{23} = C_{32}, \\
&D_{32} = D_{41} = C_{14}, \\
&D_{34} = -D_{43} = C_{21},
\end{aligned} \tag{A.34}
$$

$$
R = i\frac{r}{4} I_4. \tag{A.35}
$$

A.5. Armónicos esféricos en $T^{1,1}$

En general, un espacio $T^{p,q}$ corresponde a la variedad del coset $SU(2)\times SU(2)/U_H(1)$, donde $U_H(1)$ es el subgrupo de $SU(2)\times SU(2)$ generado por $T_H = pT_3 + q\hat{T}_3$, con $\{T_i, \hat{T}_j, i,j = 1,2,3\}$ los generadores de los $SU(2)$. En nuestro caso, $p = q = 1$. En términos de estas estructuras, las representaciones irreducibles del grupo cociente estarán definidas en términos de los índices ℓ_1 y ℓ_2 correspondientes a $SU(2)\times SU(2)$ y r, con r la correspondiente carga de $U(1)$. Es de esperar entonces que el operador de Cassimir correspondiente al laplaciano del espacio cociente se pueda escribir en términos de los operadores de Cassimir de ambos $SU(2)$ y de $U(1)$. Esto último puede verse de la siguiente manera:

Consideremos una métrica genérica de la forma:

$$
ds^2 = A\left(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\varphi_1^2\right) + B\left(d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\varphi_2^2\right) + C\left(d\chi + \cos\theta_1 d\varphi_1 + \cos\theta_2 d\varphi_2\right)^2 \tag{A.36}
$$

correspondiente a una parametrización de un espacio $T^{1,1}$ deformado (notemos que $A = B$ es el caso de $T^{1,1}$). Por su parte, el operador laplaciano en esta variedad actuando sobre una 0-forma H se escribe como:

$$
\nabla^2 H = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_m\left(\sqrt{g}g^{mn}\partial_n H\right) \tag{A.37}
$$

Definimos ahora los operadores:

$$
\begin{aligned}
&\nabla_i^2 = \frac{1}{\sin\theta_i}\partial_{\theta_i}\left(\sin\theta_i\partial_{\theta_i}\right) + \left(\frac{1}{\sin\theta_i\partial_{\varphi_i}} - \cot\theta_i\partial_\chi\right)^2 \quad , \qquad (i = 1,2) \\
&\nabla_R^2 = \partial_\chi^2
\end{aligned} \tag{A.38}
$$

Es fácil ver que:

$$
\nabla^2 = \frac{1}{A}\nabla_1^2 + \frac{1}{B}\nabla_2^2 + \frac{1}{C}\nabla_R^2 \tag{A.39}
$$

Por otro lado, sabemos que el laplaciano correspondiente a la 3-esfera parametrizada por ángulos (θ, φ, χ) puede escribirse de la forma:

$$\nabla^2_{\mathbb{S}^3} = 4\Big[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\right) + \left(\frac{1}{\sin\theta_i\partial_{\varphi_i}} - \cot\theta_i\partial_\chi\right)^2 + \partial^2_\chi\Big] \tag{A.40}$$

y posee autovalores $\ell(\ell+2)$, con $\ell \in \mathbb{Z}$. De aquí se desprende que:

$$\nabla^2_i = \frac{1}{4}\nabla^2_{\mathbb{S}^3} - \partial^2_\chi \tag{A.41}$$

Por lo tanto sus autofunciones serán un producto de las autofunciones de $\nabla^2_{\mathbb{S}^3}$ y las de ∂^2_χ, las cuales son de la forma $e^{i\frac{r}{2}\chi}$ con $r \in \mathbb{Z}$. Los autovalores del operador ∇^2_i son de la forma:

$$\nabla^2_i = -\frac{\ell_i\left(\ell_i+2\right)}{4} + \frac{r^2}{4} \qquad \ell_i, r \in \mathbb{Z} \tag{A.42}$$

Por lo que el autovalor del laplaciano de $\tilde{T}^{1,1}$ es:

$$\lambda(\ell_1, \ell_2, r) = -\frac{\ell_1\left(\ell_1+2\right)}{4A} - \frac{\ell_2\left(\ell_2+2\right)}{4B} - \Big[\frac{1}{A} + \frac{1}{B} - \frac{1}{C}\Big]\frac{r^2}{4} \tag{A.43}$$

Notemos que haciendo $\jmath_i = \ell_i/2$, tenemos que los autovalores del grupo cociente se escriben efectivamente en términos de los valores de los operadores de Cassimir de los $SU(2)$ y de la correspondiente carga r de $U(1)$.

En particular, nos intereza el caso $A = \cos^2\frac{\alpha_0}{2}$, $B = \sin^2\frac{\alpha_0}{2}$ y $C = \sin^2\frac{\alpha_0}{2}\cos^2\frac{\alpha_0}{2}$. En especial, este caso posee la particularidad de que es independiente del valor de r, de hecho es fácil ver que:

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{C} \tag{A.44}$$

por lo que el último término de (A.43) es nulo. La expresión final para los autovalores resulta:

$$\tilde{\lambda}(\ell_1, \ell_2, \alpha_0) = -\frac{\ell_1\left(\ell_1+2\right)}{4\cos^2\alpha_0} - \frac{\ell_2\left(\ell_2+2\right)}{4\sin^2\alpha_0} \tag{A.45}$$

Por otro lado, definiendo $\lambda(\ell_1, \ell_2, \nu) = -\sin^2\alpha_0\tilde{\lambda}(\ell_1, \ell_2, \alpha_0)$ y $\nu = \sin^2\alpha_0$, podemos escribir:

$$\lambda(\ell_1, \ell_2, \nu) = \ell_1\left(\ell_1+2\right)\nu + \ell_2\left(\ell_2+2\right)(1-\nu) \tag{A.46}$$

Finalmente, definimos los armónicos esféricos para la variedad $\tilde{T}^{1,1}$ como funciones $Y_{\ell_1,\ell_2}(\tilde{T}^{1,1})$ evaluadas en $\tilde{T}^{1,1}$ tales que:

$$\nabla^2_{\tilde{T}^{1,1}}Y_{\ell_1,\ell_2}(\tilde{T}^{1,1}) = \tilde{\lambda}(\ell_1, \ell_2, \alpha_0)Y_{\ell_1,\ell_2}(\tilde{T}^{1,1}) \tag{A.47}$$

Es importante tener en cuenta que la forma explícita de estas funciones depende de más parámetros además de ℓ_1 y ℓ_2, pero no la tendremos en cuenta ya que en este trabajo sólo nos importa la forma de los autovalores.

Bibliografía

[1] J. M. Maldacena, *The large N limit of superconformal field theories and supergravity*, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [hep-th/9711200].

[2] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, *Large N field theories, string theory and gravity*, Phys. Rept. **323** (2000) 183 [hep-th/9905111].

[3] O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis and J. Maldacena, *N=6 superconformal Chern-Simons-matter theories, M2-branes and their gravity duals*, JHEP **0810** (2008) 091 [arXiv:0806.1218 [hep-th]].

[4] Y. Makeenko, *Topics in Cusped/Lightcone Wilson Loops*, (2008) [arXiv:0810.2183 [hep-th]].

[5] J. M. Maldacena, *Wilson loops in large N field theories*, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 4859 [hep-th/9803002].

[6] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*, Cambridge University Press (2004).

[7] P. Benincasa, A. V. Ramallo, *Fermionic impurities in Chern-Simons-matter theories*, (2012) [arXiv:1112.4669 [hep-th]]

[8] L. Martucci, J. Rosseel, D. Van der Bleeken, A. Van Proeyen, *Dirac actions for D-branes on background whit fluxes* (2005) [arXiv:hep-th/0504041]

[9] A. Faraggi, L. A. Pando Zayas, *The Spectrum of Excitations of Holographic Wilson Loops*, (2011) [arXiv:1101.5145 [hep-th]]

[10] C. Lüdeling, *Seben Dimensional Super-Yang-Mills Theory in $\mathcal{N} = 1$ Superfields*, (2011) [arXiv:1102.0285 [hep-th]]