

Universidad Nacional de La Plata
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas

Trabajo de Diploma de la Licenciatura en Física

Director: Daniel A. Gómez Dumm

MESONES EN UN MODELO QUIRAL DE
QUARKS CON INTERACCIONES NO
LOCALES

Juan Pablo CARLOMAGNO

<juanpablocarlomagno@gmail.com>

La Plata, Marzo 2011

Resumen

Presentamos un análisis original de un modelo quiral de tres sabores de quarks con interacciones no locales covariantes, que incluye renormalización de las funciones de onda. El modelo incluye un término que tiene en cuenta la anomalía axial, dando lugar a la mezcla de sabores, mientras que el carácter no local de las interacciones es implementado a través de factores de forma covariantes. En este marco obtenemos las ecuaciones del gap para los campos escalares y pseudoescalares en la aproximación de campo medio, y calculamos los condensados quirales. Asimismo, se derivan expresiones analíticas para masas de los mesones pseudoescalares livianos, los correspondientes ángulos de mezcla y las constantes de decaimiento débil. Finalmente, a partir de estos resultados proponemos una estrategia para determinar en forma numérica los parámetros fundamentales de la teoría.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	2
2. EL MODELO DE NJL	5
2.1. Algunos aspectos básicos de QCD	5
2.1.1. Teorías efectivas de QCD	6
2.2. Modelo NJL con simetría $U(1)$	7
2.2.1. Simetría Quiral	7
2.2.2. Generación Dinámica de masa fermiónica	8
2.2.3. Bosón NG pseudoescalar	10
2.3. NJL con simetría $SU(3)$	11
2.3.1. Simetrías de QCD	11
2.3.2. La anomalía axial	12
2.3.3. Interacciones efectivas	13
2.4. Interacciones no locales	13
2.5. Renormalización de la función de onda	15
2.6. Bosonización	16
3. MODELO NO LOCAL EN $SU(3)$	17
3.1. Acción Efectiva	17
3.2. Aproximación de Campo Medio	19
3.2.1. Condensados quirales	21
3.3. Fluctuaciones Cuadráticas	22
3.4. Constante de decaimiento débil	26
4. RESUMEN	30
5. PERSPECTIVAS	31

INTRODUCCIÓN

La dinámica de quarks se encuentra descrita por la Cromodinámica Cuántica (QCD), que formalmente es una teoría de campos de gauge no abeliana [1]. De acuerdo con esta teoría, los hadrones y las interacciones entre éstos pueden describirse en términos de grados de libertad de quarks y gluones. En interacciones donde el momento transferido es relativamente grande, tales como dispersiones profundamente inelásticas, la propiedad de libertad asintótica presente en QCD permite obtener predicciones a partir del Lagrangiano fundamental de la teoría, considerando a las interacciones como perturbaciones de un Lagrangiano de quarks no interactuantes [2]. Sin embargo, en el régimen de bajas energías ($E \lesssim 1 \text{ GeV}$), o equivalentemente largas distancias, la constante de acoplamiento fuerte se vuelve grande y la teoría es no perturbativa. En este régimen los quarks se encuentran confinados en hadrones, y la simetría quiral, presente en el Lagrangiano en el límite en que los quarks tienen masa nula, se encuentra espontáneamente rota.

El estudio de las propiedades de los hadrones, como sus masas o constantes de acoplamiento, requiere en general tratar con QCD en el régimen no perturbativo. No existe aún un método *standard* para llevar a cabo este tratamiento en forma analítica, y por ello una forma de abordar el problema es resolver las ecuaciones de la dinámica en forma numérica en un espacio-tiempo discreto. Esto es lo que se conoce como *Lattice QCD* [3]. Alternativamente, puede enfrentarse el problema a través de la construcción de modelos efectivos para las interacciones hadrónicas. Esto es, modelos que presentan Lagrangianos simplificados comparados con el de QCD pero mantienen propiedades básicas de la teoría fundamental. Algunas de estas propiedades son:

Estructura no perturbativa del vacío: A diferencia de QED, el estado de vacío de QCD presenta una estructura física compleja, que incluye condensados de quarks y gluones.

Simetría quiral: como se ha mencionado, el Lagrangiano de QCD presenta simetría quiral en el límite en que las masas de los quarks pueden considerarse nulas. Considerando tres sabores de quarks, la existencia de bosones pseudo-escalares livianos (π , K , η) puede ser asociada, de acuerdo con el teorema de Nambu-Goldstone (NG), a la ruptura dinámica de la simetría quiral $SU(3)_L \otimes SU(3)_R \rightarrow SU(3)_V$.

Anomalía de la simetría axial $U(1)_A$: la observación de decaimientos como $\pi \rightarrow \gamma\gamma$ y $\eta \rightarrow 3\pi$ indican que la simetría $U(1)_A$, conservada a nivel clásico en el Lagrangiano de QCD para quarks sin masa, debe estar rota a nivel cuántico.

Descripción de hadrones en términos de quarks constituyentes: los mesones y los bariones pueden ser descritos como sistemas compuestos por quarks u, d y s , y organizados de acuerdo con representaciones irreducibles del grupo $SU(3)$.

De los modelos efectivos para las interacciones hadrónicas, el que ha recibido mayor atención es el propuesto por Nambu y Jona-Lasinio (NJL) en 1961 [4]. En su versión original este modelo intentaba describir las interacciones entre nucleones utilizando a éstos como grados de libertad fundamentales. Posteriormente el modelo fue reformulado utilizando como grados de libertad a los quarks livianos, y proponiendo interacciones entre éstos a través de acoplamientos locales de cuatro quarks (términos de dimensión 6). De este modo, la teoría resulta ser no renormalizable. Para regularizar las divergencias ultravioletas, en consonancia con la idea subyacente de libertad asintótica, usualmente se propone suprimir la interacción entre quarks cuando el momento transferido supera un cierto valor o *cut off* [5]. Esta prescripción conlleva algunos inconvenientes, entre ellos el hecho de que las predicciones resultan fuertemente dependientes del valor de este cut off. Otro de los principales problemas de este tipo de modelos es que no dan cuenta del confinamiento de los quarks en estados singulete de color.

En este trabajo estudiamos una extensión del modelo de NJL con tres sabores que involucra varios aspectos. Uno de ellos es la inclusión de interacciones *no locales* de 4 y 6 puntos entre los quarks. Se proponen interacciones *covariantes*, para asegurar la invariancia Lorentz de la teoría. El carácter no local se implementa a través de factores de forma (en nuestro caso se considerarán factores de forma separables en el espacio de momentos) cuyo comportamiento a altas energías permite regularizar la teoría en el límite ultravioleta. De este modo, la acción efectiva es finita a todo orden en la expansión en loops [6] y no existe una dependencia de la parametrización

tan acentuada como en el NJL. Como beneficios adicionales se obtienen una correcta descripción de los procesos anómalos (problemáticos para el modelo NJL) [7], y se presenta la posibilidad de describir el confinamiento vinculándolo a la no existencia de polos reales en los propagadores de quarks. La presencia de las interacciones no locales trae además como consecuencia que las masas efectivas de los quarks sean dependientes del momento, tal como se observa en cálculos de Lattice QCD. En lo que hace a las simetrías de la teoría, el modelo presenta en el límite quiral una simetría $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$, rota explícitamente por los términos de masa de los quarks al igual que en el Lagrangiano de QCD. La interacción de 6 puntos, conocida como “término de ’t Hooft”, rompe explícitamente la simetría $U_1(A)$ simulando la anomalía axial, y provoca la mezcla entre sabores de quarks. Finalmente, se incorpora al Lagrangiano un término que induce una “renormalización” de la función de onda (WFR) de los quarks. Esto es, conduce a propagadores de quarks cuyos residuos en los polos son funciones del momento. Este comportamiento concuerda también con los cálculos llevados a cabo en Lattice QCD. Dado este marco teórico, procedemos en este trabajo a estudiar la acción efectiva en términos de grados de libertad mesónicos, determinando las ecuaciones que permiten calcular las masas de los mesones escalares y pseudoescalares, los ángulos de mezcla correspondientes y las constantes de decaimiento para el sector pseudoescalar.

El trabajo está organizado de la siguiente forma: en el capítulo 2 se discuten las características generales del modelo NJL y su extensión no local con simetría $SU(3)_C$, con la incorporación de la WFR. En el capítulo 3 se presenta en detalle el modelo no local a estudiar, y se obtienen los resultados analíticos para los condensados quirales y las masas y constantes de decaimientos mesónicas en la aproximación de campo medio. En el capítulo 4 se incluye un resumen del trabajo realizado, y finalmente en el capítulo 5 se presenta la estrategia a seguir para determinar numéricamente los parámetros fundamentales de la teoría y sus perspectivas futuras.

EL MODELO DE NJL

Como se ha mencionado, originalmente el modelo fue introducido como una teoría para las interacciones entre nucleones. Reemplazaremos los campos nucleónicos por campos de quarks q , introduciendo una interacción de cuatro puntos. Para el caso de un único quark no masivo, la ruptura dinámica de la simetría quiral causada por esta interacción conduce a un condensado $\bar{q}q$ con valor de expectación de vacío no nulo, y a la presencia de un bosón de NG de masa cero (pión) y una partícula quiral asociada (σ). En este modelo, sólo los quarks son los grados de libertad mientras que las partículas π y σ son estados ligados $q - \bar{q}$.

Para el caso de tres sabores de quarks, en el formalismo de integrales de camino es posible llevar a cabo una bosonización del modelo mediante la introducción de campos auxiliares $\pi^a \sim \bar{q}\gamma_5\lambda^a q$ y $\sigma^a \sim \bar{q}\lambda^a q$, donde λ^a son las matrices de Gell-Mann. De este modo es posible escribir la función de partición como una integral sobre los campos mesónicos π^a y σ^a , y analizar las propiedades de estos mesones.

2.1. Algunos aspectos básicos de QCD

El Lagrangiano clásico de QCD, que presenta una simetría de gauge de color SU(3), se escribe como [1]

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^a\mathcal{F}_a^{\mu\nu} + \bar{q}(\gamma^\mu D_\mu - m_q)q \quad , \quad (2.1)$$

donde q representa el campo de quarks con tres colores y N_f sabores $q = (u, d, s, \dots)$, y m_q es la matriz de masa de los quarks en el espacio de sabor, $m_q = \text{diag}(m_u, m_d, m_s, \dots)$. Las masas m_f no son directamente medibles debido al confinamiento, y deben ser inferidas a partir de los observables hadrónicos. $D_\mu (\equiv \partial_\mu - ig\lambda^a A_\mu^a)$, derivada covariante,

incluye los campos de gauge de color A_μ^a ($a = 1, \dots, 8$) y la constante de acoplamiento fuerte g . Las matrices λ^a son generadoras del grupo de color $SU(3)_C$, y satisfacen

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c \quad , \quad \text{Tr}(\lambda^a\lambda^b) = 2\delta^{ab} \quad (2.2)$$

siendo f^{abc} las constantes de estructura de $SU(3)_C$. Finalmente, el tensor de campo gluónico se define como

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.3)$$

Podemos reescribir la ecuación (2.1) como

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{quiral} - (m_u\bar{u}u + m_d\bar{d}d) + \mathcal{L}_{sct} \quad , \quad (2.4)$$

donde \mathcal{L}_{sct} hace referencia al lagrangiano asociado a los quarks pesados, y la parte quiral está dada por

$$\mathcal{L}_{quiral} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^a\mathcal{F}_a^{\mu\nu} + \bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi \quad , \quad (2.5)$$

con ψ representando los campos de los quarks livianos u y d .

Este lagrangiano \mathcal{L}_{quiral} es covariante, y resulta invariante bajo las transformaciones globales unitarias $U_V(1)$ y $SU_V(2)$, que corresponden a la conservación del isospin y del número bariónico. También resulta invariante ante las transformaciones axiales, $U(1)_A$ y $SU(2)_A$, que difieren de las anteriores por la presencia de la matriz γ_5 . Las transformaciones axiales modifican la paridad del estado, de modo que por cada multiplete de isospin debe existir otro multiplete semejante de paridad opuesta. Como esto no se observa en la naturaleza, se induce que las simetrías $U(1)_A$ y $SU(2)_A$ no deben manifestarse directamente. Como se ha mencionado, la simetría $SU(2)_A$ está rota dinámicamente, y se manifiesta a través de la existencia de modos de Goldstone, mientras que la simetría $U(1)_A$ está rota a nivel cuántico por la presencia de una anomalía. En el caso de quarks no masivos aparecen entonces tres modos de Goldstone de masa nula, que se asocian con los piones. Los términos de masa en la ecuación (2.4) provocan una ruptura explícita de la simetría $SU(2)_A$, lo que conduce a una masa no nula de los piones, como se observa experimentalmente. En cualquier caso, dado que m_u y m_d son pequeñas frente a la escala de confinamiento, el límite de quarks no masivos resulta una buena aproximación y en consecuencia la masa de los piones resulta mucho menor que la de los nucleones.

2.1.1. Teorías efectivas de QCD

Si sólo nos interesa la dinámica de algunos grados de libertad del sistema, intentamos obtener una teoría efectiva que sólo incluya estos grados de libertad, eliminando

los irrelevantes. En muchos casos, esto puede ser hecho en una forma aproximada. Para QCD a bajas energías se intenta construir un Lagrangiano basado en ciertas propiedades básicas, como se ha mencionado en la Introducción. Por ejemplo, de acuerdo con el modelo de quarks los hadrones pueden ser acomodados en multipletes, así es posible imaginar una teoría que no contenga explícitamente a los campos de gauge o gluones. También deberá preservarse la simetría quiral global que posee el Lagrangiano de QCD (2.1) y deberá tener lugar la ruptura dinámica de esta simetría. Además, la teoría deberá poder escribirse en términos de los grados de libertad correspondientes a bajas energías, es decir cuando la escala de energía es menor que alguna escala de corte ($\lesssim 1\text{GeV}$). Por ejemplo, a muy bajas energías los grados de libertad fundamentales deberán ser los pseudobosones de Goldstone (piones) y sus partículas quirales asociadas.

Así, el Lagrangiano de la teoría efectiva buscada se escribirá en general como

$$\mathcal{L}_{eff}(x) = \sum_n c_n \mathcal{O}_n(x) \left(\frac{1}{\Lambda} \right)^{\dim \mathcal{O}_n^{-4}}, \quad (2.6)$$

donde c_n son constantes de acoplamiento adimensionales y \mathcal{O}_n son operadores locales, invariantes frente a transformaciones quirales, que contienen los campos de quarks, únicos grados de libertad del modelo. La teoría será válida por debajo de la escala Λ y dependerá del número de términos que uno tome en la expansión. Una vez que uno corta la serie, determina el número de constantes de acoplamiento a través de un conjunto de observables físicos, y así la teoría puede ser usada para calcular otras cantidades.

2.2. Modelo NJL con simetría U(1)

2.2.1. Simetría Quiral

Consideremos quarks no masivos representados por un campo de Dirac $\psi(x)$. Se les puede asociar una corriente conservada vectorial

$$V_\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) . \quad (2.7)$$

Supongamos que estos fermiones interactúan mediante un acoplamiento local, de modo que el Lagrangiano viene dado por

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\partial^\mu\psi(x) - GV_\mu(x)V^\mu(x) , \quad (2.8)$$

donde G es una constante de acoplamiento con dimensiones de (longitud)². Este modelo es no renormalizable. Para su regularización se introduce un cut off Λ en el espacio de momentos, o, equivalentemente, una constante de acoplamiento adimensional que permite establecer las regiones de acoplamiento débil y fuerte¹,

$$g^2 = G\Lambda^2 \quad (2.9)$$

Los fermiones sin masa poseen helicidad definida², lo que permite introducir los siguientes campos

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}\psi \quad \text{y} \quad \psi_R = \frac{1 + \gamma_5}{2}\psi \quad , \quad (2.10)$$

con esta definición el Lagrangiano libre se separa en una parte con helicidad levógira y otra dextrógira, y posee entonces una simetría quiral global $U(1)_L \otimes U(1)_R$:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R \quad , \quad (2.11)$$

Las corrientes conservadas resultan ser

$$J_L^\mu = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L \quad \text{y} \quad J_R^\mu = \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R \quad , \quad (2.12)$$

y pueden ser escritas en término de la corrientes axial y vectorial

$$J_{L,R}^\mu = \frac{1}{2}(V^\mu(x) \mp A^\mu(x)) \quad . \quad (2.13)$$

La invariancia bajo $U(1)_L \otimes U(1)_R$ resulta equivalente a la invariancia bajo el grupo de simetrías $U(1)_V \otimes U(1)_A$. Si se incorpora un término de masa al Lagrangiano se rompe explícitamente la simetría axial, mientras que la vectorial permanece intacta.

2.2.2. Generación Dinámica de masa fermiónica

Partiendo del Lagrangiano (2.8), estudiaremos las propiedades de un fermión no masivo en el caso de un acoplamiento fuerte, en la aproximación de campo medio (MFA). La interacción en la ecuación (2.8) contiene términos directos y de intercambio, aunque en MFA sólo los directos serán relevantes,

$$\mathcal{L}_{int} = G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2] \quad (2.14)$$

A nivel de campo medio tiene lugar la generación de una masa dinámica para los quarks. Esto se encuentra esquematizado en la figura (2.1). Aquí el loop fermiónico

¹débil para $\frac{g^2}{4\pi} \ll 1$ y fuerte para $\frac{g^2}{4\pi} \gtrsim 1$

²Dextrógira o levógira, dependiendo de la alineación del spin con el momento.

se interpreta como una linealización de la interacción en la ecuación (2.14), obtenida reemplazando $(\bar{\psi}\Gamma\psi)^2$ por $2\bar{\psi}\Gamma\psi\langle\bar{\psi}\Gamma\psi\rangle$, donde $\langle \ \rangle$ representa el valor de expectación de vacío y Γ es $\mathbf{1}$ o $i\gamma_5$.

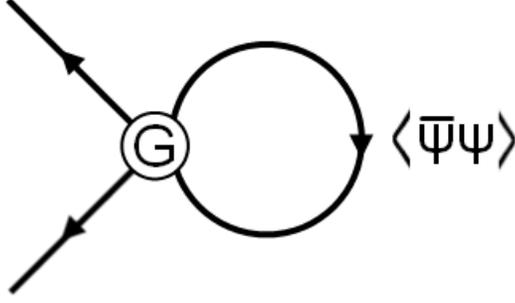


Figura 2.1: Generación de masa fermiónica en la aproximación de Hartree.

Debido a que el vacío conserva paridad y resulta invariante de Lorentz, sólo será no nulo el condensado $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$. De este modo se tendrá una masa fermiónica dinámica $m = -2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ generada por la interacción escalar fuerte del fermión con el vacío de Dirac.

Formalmente, en MFA el condensado $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ viene dado por

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = -i \text{Tr } S_F(0) \quad , \quad (2.15)$$

donde S_F es el propagador de Dirac, definido como

$$S_F(x - y) = -i\langle T[\psi(x)\bar{\psi}(y)] \rangle \quad . \quad (2.16)$$

En la ecuación (2.15) $S_F(0)$ representa el loop cerrado de la figura (2.1), con la línea fermiónica comenzando y terminando en el mismo punto del espacio-tiempo debido a la interacción local de cuatro puntos. La integral en $S_F(0)$ (en el espacio de momentos) es regularizada por medio del cut off Λ , de modo que, integrando en la componente p_0 , se tiene³

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = 2 \int_{|\vec{p}|\leq\Lambda_3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} = -\frac{m}{\pi^2} \int_0^{\Lambda_3} dp \frac{\vec{p}^2}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \quad . \quad (2.17)$$

De aquí vemos que el condensado representa la densidad escalar de la parte llena del mar de Dirac correspondiente a energía negativa. Y la masa dinámica describe la interacción de un fermión con esta parte del mar de Dirac, es decir sólo la que involucra momentos $|\vec{p}| \leq \Lambda$. De combinar la expresión para la masa dinámica y la ecuación (2.17) se ve

³Notar que el cut off se ha introducido en forma no covariante, integrándose la componente p_0 entre $-\infty$ y ∞ . Ésta regularización no covariante es utilizada usualmente en el NJL.

que existe una solución no trivial para m cuando la constante de acoplamiento supera el valor crítico π^2/Λ^2 .

El condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ es el parámetro de orden de la simetría quiral, de modo que se distinguen dos posibles fases: la de Nambu-Goldstone cuando la simetría está dinámicamente rota y $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$, y la de Wigner-Weyl cuando los fermiones resultan no masivos y $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 0$.

2.2.3. Bosón NG pseudoescalar

La ruptura espontánea de una simetría global genera un bosón de NG. En particular, la ruptura $U(1)_L \otimes U(1)_R \rightarrow U(1)_V$ genera un bosón escalar neutro fermión-antifermión, el pión. Para ver como aparece el pión no masivo en este modelo, tengamos en cuenta la ecuación de Bethe-Salpeter⁴ (BS) en el canal pseudoescalar fermión-antifermión para obtener la matriz T a un dado momento q (ver figura 2.2)

$$T_P(q^2) = K_P + K_P J_P(q^2) K_P + \dots = \frac{K_P}{1 - K_P J_P(q^2)} \quad (2.18)$$

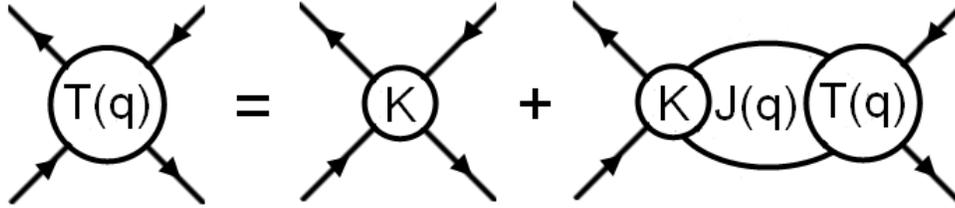


Figura 2.2: Esquema de la ecuación BS que determina la matriz T .

La interacción en este canal está regida por el acoplamiento $G(\bar{\psi}\nu\gamma_5\psi)^2$, de la ecuación (2.14). El núcleo de la interacción es entonces $K_P = 2G$, y la integral de loop J_P viene dada por

$$J_P(q^2) = \nu \text{Tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[\nu\gamma_5 \frac{1}{\not{p} + \frac{\not{q}}{2} - m + i\epsilon} \nu\gamma_5 \frac{1}{\not{p} - \frac{\not{q}}{2} - m + i\epsilon} \right]. \quad (2.19)$$

La masa m_P del pión esta determinada por los polos de la matriz T , es decir

$$1 - K_P J_P(m_P^2) = 0 \quad (2.20)$$

⁴Describe los estados ligados de un sistema cuántico de dos cuerpos en un formalismo covariante.

Evaluando la ecuación (2.19) en $q^2 = 0$ y tomando traza, se tiene

$$J_P(0) = 4i \text{Tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{i}{m} \text{tr} S_F(0) . \quad (2.21)$$

Comparando con la ecuación (2.15), vemos que

$$K_P J_P(0) = -\frac{2G}{m} \langle \bar{\psi} \psi \rangle = 1 , \quad (2.22)$$

con lo cual $m_P = 0$ es solución. Esto es lo que se esperaba, siendo el pión el bosón de NG que aparece como consecuencia de la ruptura espontánea de la simetría global $U(1)_A$.

2.3. NJL con simetría SU(3)

Describiremos ahora el modelo de NJL para tres sabores de quarks. El hecho de que la masa del quark s sea $m_s \sim 120$ MeV no permite catalogarlo como pesado, y es natural añadirlo los quarks u y d extendiendo el modelo a un Lagrangiano con simetría de sabor SU(3) [8]. La introducción de este nuevo grado de libertad implica lidiar con la mezcla de sabores y la anomalía axial⁵.

2.3.1. Simetrías de QCD

Como se ha mencionado, el modelo de NJL se conecta con QCD a través de sus simetrías, en particular, la invariancia ante transformaciones quirales en el límite en que los quarks tienen masa nula (límite quiral).

En el límite quiral [ver ec. (2.5)], QCD resulta invariante bajo el grupo de simetría $SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A$. Las transformaciones $SU(3)_R$ y $SU(3)_L$ modifican los campos dextrógiros y levógiros (2.10), mientras que las $U(1)_V$ y $U(1)_A$ generan las transformaciones de fase. Teniendo en cuenta la anomalía asociada a la simetría $U(1)_A$, en este límite tenemos nueve corrientes vectoriales y ocho axiales conservadas

$$\begin{aligned} V_\mu^i &= \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\lambda^i}{2} \psi & i = 0, 1, \dots, 8 \\ A_\mu^i &= \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\lambda^i}{2} \psi & i = 1, \dots, 8 \end{aligned} \quad (2.23)$$

⁵Una anomalía es la ruptura de una simetría de un lagrangiano clásico al incluir efectos cuánticos [9]

Al introducir las masas de los quarks se rompe explícitamente esta simetría, obteniéndose

$$\begin{aligned}\partial^\mu V_\mu^i &= i\bar{\psi} \left[m_c, \frac{\lambda^i}{2} \right] \psi \\ \partial^\mu A_\mu^i &= i\bar{\psi} \left\{ m_c, \frac{\lambda^i}{2} \right\} \gamma_5 \psi ,\end{aligned}\tag{2.24}$$

donde $m_c = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$.

El lagrangiano de QCD (2.1) es invariante bajo transformaciones locales del grupo de gauge de color $SU(3)_C$. Un campo de quarks $\psi_j^{(\alpha)}$, y uno de gluones $A_\mu = \lambda^a A_\mu^a$, con $\alpha = u, d, s$ (sabor) y $j = 1, 2, 3$ (color) se transforman como

$$\begin{aligned}\psi^{(\alpha)'} &= U(\vec{\epsilon})\psi^{(\alpha)} \\ A'_\mu &= U(\vec{\epsilon})A_\mu U^{-1}(\vec{\epsilon}) + \frac{i}{g}\partial_\mu U(\vec{\epsilon})U^{-1}(\vec{\epsilon}) ,\end{aligned}\tag{2.25}$$

donde $U(\vec{\epsilon}) = \exp(-i\epsilon^a \lambda^a)$ y $\vec{\epsilon} = \epsilon_a(x)$ es un vector que depende de las coordenadas espacio-temporales. La dinámica de los campos viene dada por

$$\begin{aligned}(i\not{D} - m^{(\alpha)})\psi^{(\alpha)'} &= 0 \\ D^\mu F_{\mu\nu}^a &= g \sum_\alpha \bar{\psi}^{(\alpha)} \lambda_a \gamma_\nu \psi^{(\alpha)} ,\end{aligned}\tag{2.26}$$

donde D^μ es la derivada covariante introducida en la sección 2.1.

El grupo de $SU(3)$ tiene infinitas representaciones irreducibles, que pueden caracterizarse en términos de su dimensionalidad. Los quarks, antiquarks y gluones se organizan en las representaciones **3**, **3*** y **8**, respectivamente [10].

2.3.2. La anomalía axial

Si se tuvieran nueve corrientes axiales rotas espontáneamente, el noneto de mesones pseudoescalares aparecería como 9 pseudobosones de NG. Sin embargo, debido a la anomalía axial las corrientes conservadas son ocho, y la masa del mesón η' resulta comparable a la del nucleón (958 MeV).

En efecto, si consideramos la corriente axial del singulete de $SU(3)$ $J_{\mu 5} = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi$, puede verse que su tetradivergencia resulta proporcional a campos eléctricos y magnéticos de color,

$$\partial^\mu J_{\mu 5} = \frac{g^2 N_f}{8\pi^2} \frac{1}{8} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F_a^{\mu\nu} F_{\lambda\sigma}^a .\tag{2.27}$$

La presencia de una masa fermiónica introduce además una ruptura explícita de la simetría $U(1)_A$, añadiéndose un término $2i\bar{\psi} m \gamma_5 \psi$ en el lado derecho de esta ecuación.

2.3.3. Interacciones efectivas

El modelo de NJL en SU(3) considera a los quarks u , d y s como los grados de libertad del sistema. Los grados de libertad gluónicos son tenidos en cuenta a través de una interacción efectiva local entre quarks, la cual se construye en base a las simetrías de QCD.

El lagrangiano se define como

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m_c)\psi + \mathcal{L}_{int}^{(4)} + \mathcal{L}_{int}^{(6)} \quad , \quad (2.28)$$

con la matriz de masas dada por $m_c = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$. El lagrangiano de interacción tiene un término de interacción local de cuatro puntos y uno de seis, a través del cual se introduce la ruptura $U(1)_A$.

La interacción debe satisfacer la simetría quiral $SU(3)_R \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_V$, y las simetrías discretas C, P y T. La forma más sencilla para la interacción de cuatro puntos es

$$\mathcal{L}_{int}^{(4)} = \frac{G}{2} \sum_{i=0}^8 [(\bar{\psi}\lambda^i\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\lambda^i\psi)^2] \quad , \quad (2.29)$$

mientras que el término de interacción de seis puntos (término de 't Hooft) tiene la forma

$$\mathcal{L}_{int}^{(6)} = \frac{H}{2} A_{abc} (\bar{\psi}\lambda^a\psi) [(\bar{\psi}\lambda^b\psi)(\bar{\psi}\lambda^c\psi) - 3(\bar{\psi}i\gamma_5\lambda^b\psi)(\bar{\psi}i\gamma_5\lambda^c\psi)] \quad , \quad (2.30)$$

donde H es una constante de acoplamiento de dimensiones de (energía)⁻⁵. La suma es sobre los índices de sabor y las constantes A_{abc} , totalmente simétricas, están definidas como

$$A_{abc} = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnl} (\lambda_a)_{im} (\lambda_b)_{jn} (\lambda_c)_{kl} \quad (2.31)$$

2.4. Interacciones no locales

En secciones anteriores hemos descrito un sistema de quarks interactuando a través de vértices con cuatro o seis puntos que son invariantes quirales y locales. La naturaleza local de dichas interacciones permite simplificar los cálculos, pero también trae consecuencias no deseadas, como se ha mencionado en la introducción.

Un paso adelante hacia una teoría efectiva más acorde con QCD es sugerido por la representación de instantones del vacío de QCD [11]. Aquí la interacción se interpreta mediante un vértice efectivo, no local y separable. La naturaleza separable de la interacción permite simplificaciones en los cálculos y a la vez la no localidad provee

al modelo de una regularización natural, a través de la presencia de factores de forma suaves (como funciones gaussianas o lorentzianas) que aseguran la convergencia de las integrales ultravioletas.

Alternativamente, una interacción efectiva no local entre quarks puede generarse considerando el intercambio de un gluón. La acción efectiva en este esquema viene dada por

$$S = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') \bar{\psi}(p) [\not{p} - m] \psi(p') + S_{int} . \quad (2.32)$$

El término de interacción es en este caso

$$S_{int} = -\frac{g^2}{2} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'_2}{(2\pi)^4} j_\mu^a(p_1, p'_1) D_{ab}^{\mu\nu} j_\nu^b(p_2, p'_2) \quad (2.33)$$

donde g es la constante de acoplamiento quark-gluón y la matriz $D_{ab}^{\mu\nu}$ representa un propagador efectivo de gluón. Los factores j_μ^a representan corrientes (no locales) de quarks del octete de color. Por medio de transformaciones de Fierz [12, 13], éstas pueden ser expresadas introduciendo los operadores Γ_a que distinguen las interacciones en los canales escalar ($\Gamma_a = \lambda_a$) y pseudoescalar ($\Gamma_a = \gamma_5 \lambda_a$):

$$j_\mu^a(p, p') = g(p, p') \bar{\psi}(p) \Gamma_a \psi(p') . \quad (2.34)$$

Los modelos basados en interacciones de intercambio de un gluón suponen que los efectos no perturbativos pueden ser tenidos en cuenta modificando el propagador del gluón. Usualmente éste se modifica de manera que ajuste fenomenológicamente. El propagador efectivo del gluón provee así una forma natural de introducir la no localidad en la interacción quark-quark. Se tiene

$$D_{ab}^{\mu\nu}(p_1, p'_1, p_2, p'_2) = g_{\mu\nu} \delta^{ab} D(p_1, p'_1, p_2, p'_2) , \quad (2.35)$$

pudiendo reemplazarse las dos funciones desconocidas $g(p, p')$ y $D(p_1, p'_1, p_2, p'_2)$ por un núcleo de interacción de cuatro puntos,

$$K(p_1, p'_1, p_2, p'_2) = g(p_1, p'_1) D(p_1, p'_1, p_2, p'_2) g(p_2, p'_2) \quad (2.36)$$

Ahora bien, para dar una descripción adecuada de las correlaciones hadrónicas de dos partículas en un sistema de muchos quarks introducimos los momentos $P = p_1 - p_2$ y $p = (p_1 + p_2)/2$, y elegimos una forma separable para el núcleo de interacción (2.3)

$$K(p, P, p', P') = -K_0 g(p) g(p') \delta^{(4)}(P - P') , \quad (2.37)$$

donde K_0 es una constante que resulta ser proporcional a la constante de acoplamiento G y $g(p)$ es un factor de forma a determinar. Las deltas de Dirac aseguran la conservación del cuadrimomento total.

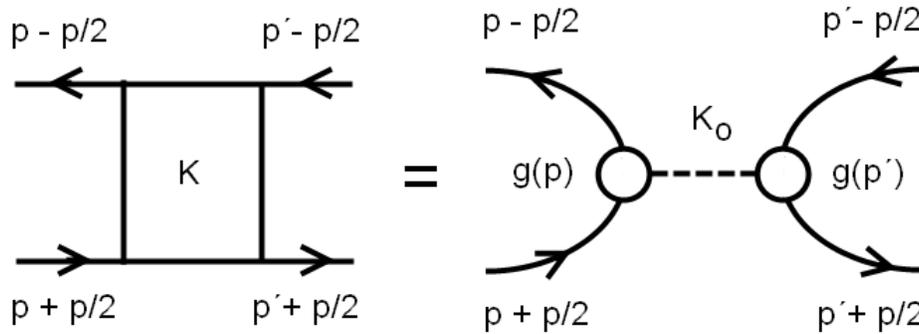


Figura 2.3: Núcleo de interacción de cuatro puntos.

Debido al carácter no local de la interacción, los quarks adquieren masas dinámicas (o autoenergías) que dependen de su momento q a través de los factores de forma según $\Sigma(q) = m + [\Sigma(0) - m]g(p)$. En el espacio de Minkowski, para que un quark exista en forma aislada se debe cumplir que $\Sigma^2(q) = q^2$ para valores reales de q . Dada la dependencia en q de la autoenergía, esta ecuación no necesariamente presenta soluciones reales. En particular, dependiendo del factor de forma, puede ocurrir que el propagador del quark no tenga polos reales a partir de un valor crítico de $\Sigma(0)$, y es posible interpretar esto como una situación de confinamiento.

2.5. Renormalización de la función de onda

En muchas aplicaciones de Lattice QCD es necesaria la renormalización. Un simple ejemplo es la obtención de las masas de los quarks, que son parámetros fundamentales en el modelo standard. La masa desnuda del quark recibe correcciones logarítmicamente divergentes, y por lo tanto no está definida sin una regularización y renormalización adecuada. Por esto, resulta importante realizar un detallado estudio de la incorporación de este tipo de correcciones en los modelos efectivos y analizar las predicciones para diferentes observables hadrónicos.

La renormalización de un operador de campo $\phi(x)$ puede relacionarse directamente con el residuo *on-shell* de la función de Green en el espacio de momentos. Esto es conveniente porque es preferible tratar con las funciones de Green antes que con los operadores de campo. En general, el campo desnudo $\phi(x)_b$ está relacionado con el estado físico $\phi(x)_p$ a través de la renormalización de función de onda [14],

$$\phi(x)_b = Z^{\frac{1}{2}}\phi(x)_p \quad , \quad (2.38)$$

donde Z es una constante de renormalización que implica una conexión entre funciones

de Green

$$G_p^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = Z^{-\frac{n}{2}} G_b^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (2.39)$$

Notar que hemos introducido las constantes de renormalización como constantes multiplicativas, esto no es estrictamente necesario y en ciertos casos no resulta conveniente [15].

2.6. Bosonización

Bosonizar una teoría fermiónica implica transformar el lagrangiano original en uno equivalente que dependa solamente de grados de libertad bosónicos. Para el modelo de NJL en 4 dimensiones esta construcción sólo puede hacerse en forma aproximada, y la acción efectiva obtenida sólo representa la dinámica del modelo original en el régimen de bajas energías.

Consideremos un lagrangiano con un término de interacción como el de la ecuación (2.14),

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\rlap{/}\partial - m_0)\psi + \mathcal{L}_{int} . \quad (2.40)$$

La correspondiente función generatriz es una integral funcional sobre los campos fermiónicos [16],

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}(x) + \text{términos fuente de quarks}) \right] \quad (2.41)$$

siendo \mathcal{N} un factor de normalización.

Los términos fuente de quarks en la exponencial, necesarios para obtener las funciones de Green, no son relevantes para este cálculo. Nuestro objetivo es integrar sobre los grados de libertad fermiónicos. Para esto introducimos campos auxiliares escalares σ y pseudoescalares π , y un parámetro de masa μ . Con esto, la función de partición puede ser escrita como

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}(x) - \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) \right] \right\} \quad (2.42)$$

Integrando ahora sobre los campos fermiónicos, definimos un lagrangiano efectivo que depende sólo de los campos bosónicos:

$$\mathcal{L}_{eff} = -i \text{Tr} \ln(D_0 + M) - \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) , \quad (2.43)$$

donde $D_0 = i\rlap{/}\partial - m_0$ y $M = -\mu\sqrt{2G}(\sigma + i\gamma_5\pi)$. Con este lagrangiano podemos calcular, por ejemplo, las ecuaciones del gap en la aproximación de campo medio simplemente tomando las derivadas funcionales respecto de los campos σ y π .

MODELO NO LOCAL EN SU(3)

En este capítulo se considerará una extensión no local del modelo de NJL con simetría SU(3) de sabor, incluyendo un término de renormalización por función de onda. Se desarrollará el formalismo necesario para calcular las masas dinámicas de los quarks, las masas de los mesones pseudoescalares más livianos y sus correspondientes constantes de decaimiento.

3.1. Acción Efectiva

Partimos de la acción Euclídea del modelo quiral no local de quarks para los sabores u , d y s ,

$$S_E = \int d^4x \left[\bar{\psi}(x)(-i\rlap{\not{D}} + m_c)\psi(x) - \frac{G}{2} \{j_a^s(x)j_a^s(x) + j_a^p(x)j_a^p(x) + j^r(x)j^r(x)\} - \frac{H}{4} A_{abc} \{j_a^s(x)j_b^s(x)j_c^s(x) - 3j_a^s(x)j_b^p(x)j_c^p(x)\} \right], \quad (3.1)$$

donde hemos llamado

$$\begin{aligned} j_a^s(x) &= \int d^4z g(z) \bar{\psi}\left(x + \frac{z}{2}\right) \lambda_a \psi\left(x - \frac{z}{2}\right) \\ j_a^p(x) &= \int d^4z g(z) \bar{\psi}\left(x + \frac{z}{2}\right) i\lambda_a \gamma_5 \psi\left(x - \frac{z}{2}\right) \\ j^r(x) &= \int d^4z f(z) \bar{\psi}\left(x + \frac{z}{2}\right) \frac{\overleftrightarrow{\not{D}}}{2\alpha} \psi\left(x - \frac{z}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Aquí $\psi(x)$ representa el campo de quarks, que incluye índices de color y sabor. Como se ha definido previamente, la matriz de masas es $m_c = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$. Las A_{abc} son las constantes de estructuras simétricas de SU(3) definidas en (2.31), G y H son constantes de acoplamiento y α es un parámetro de masa que se incluye para controlar

el peso relativo entre los términos de interacción de cuatro fermiones. Comparando con el modelo NJL en SU(3), ec. (2.28), se ha incluido un nuevo acoplamiento, también invariante bajo transformaciones quirales, que contiene la llamada *corriente de momento* $j^r(x)$. Por último, las funciones $f(z)$ y $g(z)$ son factores de forma covariantes que caracterizan y dan el carácter no local a las interacciones. La invarianza de Lorentz implica que las transformadas de estas funciones sólo puedan depender de p^2 . Notar que la no localidad se ha introducido en forma semejante a los modelos que incluyen una interacción efectiva basada en el intercambio de un gluón.

Para trabajar con grados de libertad mesónicos bosonizamos la acción (3.1). Para esto es necesario considerar la función de partición

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-S_E} . \quad (3.3)$$

Introducimos ahora campos mesónicos escalares $\sigma_a(x)$, $\zeta(x)$ y pseudoescalares $\pi_a(x)$, junto con campos auxiliares $S_a(x)$, $P_a(x)$ y $R(x)$ tales que satisfagan

$$f(j_a^s, j_a^p, j^r) = \int \mathcal{D}S_a \mathcal{D}P_a \mathcal{D}R \delta(S_a - j_a^s) \delta(P_a - j_a^p) \delta(R - j^r) f(S_a, P_a, R) . \quad (3.4)$$

Procediendo de la misma forma que en la sección (2.6), se representan las deltas como integrales funcionales y se integra la ecuación (3.3) sobre los campos fermiónicos, para obtener

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\sigma_a \mathcal{D}\pi_a \mathcal{D}\zeta e^{\ln \det A(\sigma_a, \pi_a, \zeta)} \times \\ &\times \int \mathcal{D}S_a \mathcal{D}P_a \mathcal{D}R \exp \left\{ \int d^4x \left[\sigma_a S_a + \pi_a P_a + \zeta R + \frac{G}{2} (S_a S_a + P_a P_a + R R) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{H}{4} A_{abc} (S_a S_b S_c - 3 S_a P_b P_c) \right] \right\} . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Aquí hemos definido un operador A en el espacio de momentos,

$$\begin{aligned} A(p, p') &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') (-\not{p} + m_c) + g \left(\frac{p + p'}{2} \right) [\sigma_a(p' - p) + \nu \gamma_5 \pi_a(p' - p)] \lambda_a + \\ &+ \frac{1}{2\alpha} f \left(\frac{p + p'}{2} \right) (\not{p} + \not{p}') \zeta(p' - p) . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Notar que existe una analogía entre la expresión (3.5) y la (2.43): la primera parte es un término logarítmico que contiene derivadas en el espacio de coordenadas, mientras que el segundo es aquél donde aparecen las interacciones. Para $H = 0$ la exponencial de la segunda línea es cuadrática, y puede resolverse en forma exacta [17] (no es necesario entonces introducir los campos auxiliares). En general este no es el caso, pero puede

emplearse el método de aproximación de fase estacionaria (SPA)¹: en esta aproximación la integral se realiza sobre el camino que minimiza la acción.

De esta forma se definen los campos \tilde{S}_a , \tilde{P}_a y \tilde{R} , que satisfacen dicha condición:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\Phi_a(x)} \int d^4x [\sigma_a S_a + \pi_a P_a + \zeta R + \frac{G}{2}(S_a S_a + P_a P_a + R R) + \\ + \frac{H}{4} A_{abc}(S_a S_b S_c - 3S_a P_b P_c)] \Big|_{\Phi_a = \tilde{\Phi}_a} = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$\Phi_a = S_a, P_a, R$. Variando respecto a los campos que minimizan la acción se obtiene

$$\begin{aligned} \sigma_a(x) + G\tilde{S}_a(x) + \frac{3}{4}HA_{abc}[\tilde{S}_b(x)\tilde{S}_c(x) - \tilde{P}_b(x)\tilde{P}_c(x)] &= 0 \\ \pi_a(x) + G\tilde{P}_a(x) - \frac{3}{2}HA_{abc}\tilde{S}_b(x)\tilde{P}_c(x) &= 0 \\ \zeta(x) + G\tilde{R}(x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

De esta manera la acción efectiva puede ser escrita en términos de los nuevos grados de libertad, esto es,

$$\begin{aligned} S_E = -\ln \det A(\sigma_a, \pi_a, \zeta) - \int d^4x \left[\sigma_a \tilde{S}_a + \pi_a \tilde{P}_a + \zeta \tilde{R} + \frac{G}{2}(\tilde{S}_a \tilde{S}_a + \tilde{P}_a \tilde{P}_a + \tilde{R} \tilde{R}) + \right. \\ \left. + \frac{H}{4} A_{abc}(\tilde{S}_a \tilde{S}_b \tilde{S}_c - 3\tilde{S}_a \tilde{P}_b \tilde{P}_c) \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.2. Aproximación de Campo Medio

En esta aproximación se expanden los campos bosónicos alrededor de sus valores de expectación de vacío. Supondremos en general que los campos escalares $\sigma_a(x)$, $a = 0, 3, 8$, y $\zeta(x)$ tienen valores de campo medio $\bar{\sigma}_a, \bar{\zeta}$ no nulos, mientras que por razones de simetría² $\bar{\sigma}_a = 0$ para $a = 1, 2, 4, 5, 6, 7$, y $\bar{\pi}_a = 0$. En MFA escribimos entonces

$$\begin{aligned} \sigma_a(x) &= \bar{\sigma}_a + \delta\sigma_a(x) \\ \pi_a(x) &= \delta\pi_a(x) \\ \zeta(x) &= \bar{\zeta} + \delta\zeta(x). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Introducimos esta aproximación en la acción (3.9), expandiendo a distintos órdenes en las fluctuaciones de los campos. Como $\bar{\sigma}_a(x)$ y $\bar{\zeta}(x)$ deben ser tales que minimicen la

¹El método de la SPA es un principio básico del análisis asintótico que se aplica a las integrales oscilatorias. La idea principal se basa en la cancelación de sinusoides cuando la fase varía rápidamente.

²El vacío de QCD debe ser invariante ante conjugación de carga y paridad, que son simetrías exactas de la teoría.

acción, el término lineal en las fluctuaciones debe ser nulo. Por otro lado, el orden cero de este desarrollo corresponde a la MFA. Se tiene entonces

$$S_E^{bos} = S^{MFA} + S^{cuad} + \dots \quad (3.11)$$

Si pasamos al espacio de impulsos la expresión (3.10) y la reemplazamos en la (3.6), el operador A puede ser expresado como

$$A(p, p') = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') [\Sigma(p) - Z(p)\not{p}] \quad , \quad (3.12)$$

donde hemos definido

$$\begin{aligned} Z(p) &= 1 - \frac{1}{\alpha} f(p) \bar{\zeta} \\ \Sigma(p) &= m_c + g(p) \lambda_a \bar{\sigma}_a \end{aligned} \quad (3.13)$$

De este modo, se ha obtenido un propagador efectivo de quark, que incluye una masa dinámica $\Sigma(p)$ dependiente del momento, y una WFR $Z(p)$, también dependiente del momento. La dependencia en el momento de estas cantidades viene dada por los factores de forma no locales, y en principio puede ser ajustada de modo tal de reproducir el comportamiento obtenido en Lattice QCD.

Utilizando la identidad $\ln \det A = \text{Tr} \ln A$, suponiendo que los factores de forma son funciones reales y realizando la integral sobre el espacio 4-dimensional, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{S_E^{MFA}}{V^{(4)}} &= -2 \text{Tr}_C \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}_{\text{Dirac}, f} \ln [\Sigma^2(p) + p^2 Z^2(p)] - \\ &- \bar{\sigma}_a \bar{S}_a - \bar{\zeta} \bar{R} - \frac{G}{2} (\bar{S}_a \bar{S}_a + \bar{R} \bar{R}) - \frac{H}{4} A_{abc} \bar{S}_a \bar{S}_b \bar{S}_c \quad . \end{aligned} \quad (3.14)$$

De (3.8) se ve que \tilde{S}_a resulta función de $\sigma_a(x)$, de esta manera se define en la MFA \bar{S}_a como los valores de campo medio de los campos auxiliares.

Para obtener las ecuaciones del gap, debemos minimizar la ecuación (3.14) respecto de los valores medios de los campos escalares en la MFA. Se obtiene así

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_a + G \bar{S}_a + \frac{3}{4} H A_{abc} \bar{S}_b \bar{S}_c &= 0 \\ \bar{\zeta} + G \bar{R} &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Como, debido a la conservación de la carga, sólo son no nulos $\bar{\sigma}_0$, $\bar{\sigma}_3$ y $\bar{\sigma}_8$, es conveniente realizar un cambio de base definiendo valores medios “de sabor”:

$$\text{diag}(\bar{\sigma}_u, \bar{\sigma}_d, \bar{\sigma}_s) = \bar{\sigma}_0 \lambda_0 + \bar{\sigma}_3 \lambda_3 + \bar{\sigma}_8 \lambda_8 \quad (3.16)$$

Con este cambio de base, los \bar{S}_a neutros pueden escribirse como

$$\begin{aligned}\bar{S}_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}(\bar{S}_u + \bar{S}_d + \bar{S}_s) \\ \bar{S}_3 &= \frac{1}{2}(\bar{S}_u - \bar{S}_d) \\ \bar{S}_8 &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{S}_u + \bar{S}_d - 2\bar{S}_s) .\end{aligned}\tag{3.17}$$

Finalmente las ecuaciones del gap quedan escritas como

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_u + G\bar{S}_u + \frac{H}{2}\bar{S}_d\bar{S}_s &= 0 \\ \bar{\sigma}_d + G\bar{S}_d + \frac{H}{2}\bar{S}_s\bar{S}_u &= 0 \\ \bar{\sigma}_s + G\bar{S}_s + \frac{H}{2}\bar{S}_u\bar{S}_d &= 0 \\ \bar{\zeta} + G\bar{R} &= 0 ,\end{aligned}\tag{3.18}$$

con

$$\begin{aligned}\bar{S}_i &= -8N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} g(p) \frac{\Sigma_i(p)}{\Sigma_i^2(p) + Z^2(p)p^2} , \quad i = 1, 2, 3. \\ \bar{R} &= 4N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p^2}{\alpha} f(p) Z(p) \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\Sigma_i^2(p) + Z^2(p)p^2} .\end{aligned}\tag{3.19}$$

donde se ha definido $\Sigma_j(p) = m_j + g(p)\bar{\sigma}_j$. Aquí los subíndices 1, 2, 3 corresponden a u, d, s respectivamente.

3.2.1. Condensados quirales

Los condensados quirales $\langle \bar{q}q \rangle$ se definen como los valores de expectación del vacío de los estados $\bar{q}q$ y pueden obtenerse por derivación de la función de partición, ecuación (3.3), respecto a la masa desnuda del quark q ,

$$\langle \bar{q}q \rangle = \frac{\partial}{\partial m_q} \ln Z = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S_E} \bar{\psi}_q \psi_q\tag{3.20}$$

Para quarks de masa no nula la expresión que se obtiene por derivación en la MFA resulta cuadráticamente divergente. Usualmente es regularizada restándole el valor del condensado para quarks no interactuantes:

$$\langle \bar{q}q \rangle = -4N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[\frac{\Sigma_q(p)}{\Sigma_q^2(p) + p^2 Z^2(p)} - \frac{m_q}{p^2 + m_q^2} \right] .\tag{3.21}$$

Los condensados quirales son parámetros de orden de la ruptura de la simetría quiral de la teoría.

3.3. Fluctuaciones Cuadráticas

En esta sección nos ocuparemos del término cuadrático de la ecuación (3.11). De aquí se obtendrán los términos de masa de los mesones escalares y pseudoescalares. Para calcular este término desarrollamos el determinante de la ecuación (3.6) a orden cuadrático en las fluctuaciones (3.10).

Para calcular la parte de la acción correspondiente al determinante fermiónico debemos tomar traza sobre los espacios de Dirac, color y sabor al determinante de A . Para operar sobre el espacio de sabor, resulta conveniente realizar un cambio de base $\{\lambda_0 \dots \lambda_8\} \rightarrow \{\lambda_{ij}; i, j = 1, 2, 3\}$, donde las matrices λ_{ij} están definidas por $(\lambda_{ij})^{ab} = \delta_{ia}\delta_{jb}$, y satisfacen

$$\begin{aligned}\lambda_{ij}\lambda_{kl} &= \delta_{jk}\lambda_{il} \\ \text{Tr}(\lambda_{ij}\lambda_{kl}) &= \delta_{il}\delta_{jk} .\end{aligned}\tag{3.22}$$

Tomando traza y reescribiendo el producto de operadores en esta base³ se obtiene la contribución fermiónica de la acción a los distintos órdenes,

$$\begin{aligned}(\ln \det A)^{(0)} &= 2N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln [\Sigma^2(p) + p^2 Z^2(p)] \\ (\ln \det A)^{(1)} &= 4N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} g(p) \sum_{i=1}^3 \frac{\Sigma_i(p)}{\Sigma_i^2(p) + Z^2(p)p^2} \delta\sigma_{ii}(0) - \\ &\quad - 4N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p^2}{\alpha} f(p) Z(p) \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\Sigma_i^2(p) + Z^2(p)p^2} \delta\zeta(0) \\ (\ln \det A)^{(2)} &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} K_{ij}^\sigma(p) \delta\sigma_{ij}(p) \delta\sigma_{ji}(-p) + \\ &\quad + \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} K_{ij}^\pi(p) \delta\pi_{ij}(p) \delta\pi_{ji}(-p) + \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} K^\zeta(p) \delta\zeta(p) \delta\zeta(-p) + \\ &\quad + \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} K_i^{\sigma\zeta}(p) [\delta\sigma_{ii}(p) \delta\zeta(-p) + \delta\zeta(p) \delta\sigma_{ii}(-p)] ,\end{aligned}\tag{3.23}$$

³Para cualquier par de operadores se satisface que $\hat{O} = \lambda_a \hat{O}_a = \lambda_{ij} \hat{O}_{ij}$ y $\sum_a \hat{P}_a \hat{O}_a = \frac{1}{2} \hat{P}_{ij} \hat{O}_{ji}$.

donde hemos llamado

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{(\sigma)}(p) &= -2N_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g^2(q) \frac{1}{\Sigma_i^2(q^+) + Z^2(q^+)q^{+2}} \frac{1}{\Sigma_j^2(q^-) + Z^2(q^-)q^{-2}} \times \\
&\times [\Sigma_i(q^+) \Sigma_j(q^-) \mp q^+ q^- Z(q^+) Z(q^-)] \\
K^\zeta(p) &= \frac{2}{\alpha^2} N_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} q^2 f^2(q) \frac{1}{\Sigma_i^2(q^+) + Z^2(q^+)q^{+2}} \frac{1}{\Sigma_i^2(q^-) + Z^2(q^-)q^{-2}} \times \\
&\times \left[\Sigma_i(q^+) \Sigma_i(q^-) + \left(\frac{q^{+2} q^{-2} - (q^+ q^-)^2}{2q^2} - q^+ q^- \right) Z(q^+) Z(q^-) \right] \\
K_i^{\sigma\zeta}(p) &= -\frac{2}{\alpha} N_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g(q) f(q) \frac{1}{\Sigma_i^2(q^+) + Z^2(q^+)q^{+2}} \frac{1}{\Sigma_i^2(q^-) + Z^2(q^-)q^{-2}} \times \\
&\times [\{q^+ q^- + q^{-2}\} \Sigma_i(q^+) Z(q^-) + \{q^+ q^- + q^{+2}\} \Sigma_i(q^-) Z(q^+)] \quad , \quad (3.24)
\end{aligned}$$

con $q^\pm = q \pm \frac{p}{2}$, y los campos σ y π han sido redefinidos según

$$\phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_a \phi_a)_{ij} \quad . \quad (3.25)$$

Ahora nos ocuparemos de la contribución del término de interacción de la ecuación (3.9) a orden cuadrático en la acción. Para lo cual, luego de realizar el mismo cambio de base que antes, desarrollamos en serie respecto de las fluctuaciones de los campos y las evaluamos en la MFA y SPA. Pasando al espacio de momentos se obtiene

$$\begin{aligned}
S_{int}^{eff} = S_{int}^{eff} \Big|_{MFA} &- \frac{1}{2} (\overline{S}_{ji} \delta\sigma_{ij}(0) + \overline{R} \delta\zeta(0)) + \\
&+ \frac{1}{4} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ [(r^+)^{-1}]_{ij,kl} \delta\sigma_{ij}(p) \delta\sigma_{kl}(-p) + \right. \\
&\left. + [(r^-)^{-1}]_{ij,kl} \delta\pi_{ij}(p) \delta\pi_{kl}(-p) + \frac{1}{G} \delta\zeta(p) \delta\zeta(-p) \right\} \quad . \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Aquí las matrices r^\pm están definidas por $r_{ij,ps}^\pm = G\delta_{jp}\delta_{is} \pm H\epsilon_{ipq}\epsilon_{jst}\overline{S}_{qt}/2$, donde S_{qt} se obtiene de realizar el cambio de base (3.22) sobre la expresión (3.19),

$$\overline{S}_a \lambda_a = \overline{S}_{ij} \lambda_{ij} \quad .$$

Finalmente, sumando las expresiones cuadráticas en (3.23) y (3.26) se obtiene la parte cuadrática de la acción efectiva,

$$S_E^{eff} = S_{cin}^{eff} + S_{pot}^{eff} = S_E^{eff} \Big|_{MFA} + S_{E(2)}^{eff} |^\pi + S_{E(2)}^{eff} |^{\sigma\zeta} \quad , \quad (3.27)$$

donde

$$\begin{aligned}
S_{E(2)}^{eff}|^\pi &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} D_{ij,kl}^\pi(p) \delta\pi_{ij}(p) \delta\pi_{kl}(-p) \\
S_{E(2)}^{eff}|^{\sigma\zeta} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} D_{ij,kl}^\sigma(p) \delta\sigma_{ij}(p) \delta\sigma_{kl}(-p) + \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} D^\zeta(p) \delta\zeta(p) \delta\zeta(-p) + \\
&+ \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} D_{ij}^{\sigma\zeta}(p) [\delta\zeta(p) \delta\sigma_{ij}(-p) + \delta\zeta(-p) \delta\sigma_{ij}(p)] \quad , \quad (3.28)
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
D_{ij,kl}^{(\sigma)}(p) &= 4K_{ij}^{(\sigma)}(p) \delta_{jk} \delta_{il} + [(r^\pm)^{-1}]_{kl,ji} \\
D^\zeta(p) &= 4K^\zeta(p) + \frac{1}{G} \\
D_{ij}^{\sigma\zeta}(p) &= 4K_i^{\sigma\zeta}(p) \delta_{ij} \quad . \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Estamos ahora en condiciones de obtener expresiones analíticas para las masas de los mesones escalares y pseudoescalares. Nos concentraremos de aquí en adelante en estos últimos, dado que revisten mayor interés desde el punto de vista fenomenológico. Para reconocer los campos físicos, escribimos la matriz $\delta\pi$ en su forma usual⁴,

$$\delta\pi_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_8 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_0 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_8 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_0 & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta_8 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_0 \end{pmatrix}_{ij} \quad . \quad (3.30)$$

Consideraremos además el límite de isospin, esto es, $m_u = m_d$. En este límite el Lagrangiano de quarks masivos es invariante frente a la simetría global $SU(2)_V$. En términos de los campos físicos (autoestados de masa), la parte escalar y pseudoescalar de la acción cuadrática (3.28) resultan

$$\begin{aligned}
S^{cuad,\pi} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G_\pi(p) [2\pi^+(p)\pi^-(p) + \pi^0(p)\pi^0(-p)] + \\
&+ G_K(p) [2K^+(p)K^-(p) + 2K^0(p)\bar{K}^0(-p)] + \\
&+ G_\eta(p)\eta(p)\eta(-p) + G_{\eta'}(p)\eta'(p)\eta'(-p) \quad , \quad (3.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{cuad,\sigma\zeta} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G_{a_0}(p) [2a_0^+(p)a_0^-(p) + a_0^0(p)a_0^0(-p)] + \\
&+ G_\kappa(p) [2\kappa^+(p)\kappa^-(p) + 2\kappa^0(p)\bar{\kappa}^0(-p)] + \\
&+ G_\sigma(p)\sigma(p)\sigma(-p) + G_{\sigma'}(p)\sigma'(p)\sigma'(-p) + G_\zeta(p)\zeta(p)\zeta(-p) \quad , \quad (3.32)
\end{aligned}$$

⁴Para el caso escalar basta con reemplazar $\pi \rightarrow a^0$, $K \rightarrow \kappa$ y $\eta \rightarrow \sigma$.

donde se ha definido

$$\begin{aligned}
G_{(a_0)^\pi}(p) &= (G \pm \frac{H}{2}\bar{S}_s)^{-1} + 4K_{uu}^{(\pi)}(p) \\
G_{(K)^\pi}(p) &= (G \pm \frac{H}{2}\bar{S}_u)^{-1} + 4K_{us}^{(\pi)}(p) \\
G_{(\eta')^\pi}(p) &= \frac{I_{88}^\pi(p) + I_{00}^\pi(p)}{2} \mp \sqrt{I_{80}^\pi(p)^2 + \left(\frac{I_{88}^\pi(p) - I_{00}^\pi(p)}{2}\right)^2} \\
I_{00}^{(\pi)}(p) &= \frac{4}{3} \left\{ 2K_{uu}^{(\pi)}(p) + K_{ss}^{(\pi)}(p) + \frac{6G \mp H\bar{S}_s \pm 4H\bar{S}_u}{8G^2 - 4H^2\bar{S}_u^2 \mp 4HG\bar{S}_s} \right\} \\
I_{88}^{(\pi)}(p) &= \frac{4}{3} \left\{ 2K_{ss}^{(\pi)}(p) + K_{uu}^{(\pi)}(p) + \frac{6G \mp 2H\bar{S}_s \mp 4H\bar{S}_u}{8G^2 - 4H^2\bar{S}_u^2 \mp 4HG\bar{S}_s} \right\} \\
I_{80}^{(\pi)}(p) &= \frac{4}{3}\sqrt{2} \left\{ K_{uu}^{(\pi)}(p) - K_{ss}^{(\pi)}(p) \pm \frac{H(\bar{S}_s - \bar{S}_u)}{8G^2 - 4H^2\bar{S}_u^2 \mp 4HG\bar{S}_s} \right\} \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Para diagonalizar el sector η_8, η_0 de la acción cuadrática ha sido necesario introducir ángulos de mezcla $\varphi_\eta, \varphi_{\eta'}$ tales que

$$\begin{aligned}
\eta &= \eta_8 \cos \varphi_\eta - \eta_0 \sin \varphi_\eta \\
\eta' &= \eta_8 \sin \varphi'_\eta + \eta_0 \cos \varphi'_\eta . \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Estos ángulos están dados por

$$\tan 2\varphi_{\eta, \eta'} = \frac{-2I_{80}^\pi}{I_{88}^\pi - I_{00}^\pi} \Big|_{p^2 = -m_{\eta, \eta'}^2} . \quad (3.35)$$

Finalmente, los estados físicos para el sector no diagonal de la acción escalar en la ecuación (3.28) se obtienen diagonalizando la matriz

$$\begin{pmatrix}
D^\zeta(p) & \frac{8}{\sqrt{3}}(2K_u^{\sigma\zeta} + K_s^{\sigma\zeta}) & \frac{16}{\sqrt{6}}(K_u^{\sigma\zeta} - K_s^{\sigma\zeta}) \\
\frac{8}{\sqrt{3}}(2K_u^{\sigma\zeta} + K_s^{\sigma\zeta}) & I_{00}^\sigma & I_{80}^\sigma \\
\frac{16}{\sqrt{6}}(K_u^{\sigma\zeta} - K_s^{\sigma\zeta}) & I_{80}^\sigma & I_{88}^\sigma
\end{pmatrix} . \quad (3.36)$$

Así, $G_\zeta(p), G_\sigma(p)$ y $G_{\sigma'}(p)$ son los autovalores de esta matriz, y los campos ζ, σ, σ' se relacionan con los campos $\delta\zeta, \sigma_0, \sigma_8$ mediante la matriz de autovectores.

Una vez obtenidas las expresiones (3.33), las masas de los mesones se obtienen de resolver las ecuaciones

$$G_P(-m_P^2) = 0 , \quad (3.37)$$

con $P = \pi, K, \eta, \eta'$ (el signo menos en el argumento de G_P se debe a que hemos trabajado en el espacio euclídeo). Notar que los espectros de piones y kaones están degenerados, como es de esperar dado que se ha considerado el límite de isospin.

Por último, debemos tener en cuenta que los campos mesónicos $P = \pi, K, \eta, \eta'$ en la acción (3.31) no son todavía los estados físicos dado que no están correctamente normalizados. Para llevar la acción a la forma canónica en el límite $p^2 = m_P^2$ es necesario renormalizar estos campos mediante constantes Z_P adecuadas. Los campos físicos vendrán dados entonces por

$$\tilde{\phi}_P(p) = Z_P^{-1/2} \phi_P(p) , \quad (3.38)$$

donde

$$Z_P^{-1} = \left. \frac{dG_P(p)}{dp^2} \right|_{p^2 = -m_P^2} . \quad (3.39)$$

3.4. Constante de decaimiento débil

Por definición, las constantes de decaimiento débil de los mesones pseudoescalares están dadas por los elementos de matriz de las corrientes axiales A_μ^a entre el vacío y los estados mesónicos renormalizados,

$$if_{ab}p_\mu = \langle 0 | A_\mu^a(0) | \tilde{\phi}_b(p) \rangle \quad \text{con} \quad p^2 = -m_\phi^2 \quad (3.40)$$

Para obtener la expresión de la corriente axial, hay que realizar transformaciones de gauge en la acción efectiva introduciendo un conjunto de campos axiales externos A_μ^a .

En una teoría local, es suficiente reemplazar $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{2} \gamma_5 \lambda_a A_\mu^a$ en la ecuación (3.1), y de este modo la acción resulta invariante frente a transformaciones locales axiales. En nuestro caso, en cambio, se emplean factores de forma no locales, y por lo tanto es necesario realizar un reemplazo adicional en los campos fermiónicos[13]:

$$\begin{aligned} \psi \left(x - \frac{z}{2} \right) &\longrightarrow W_A \left(x, x - \frac{z}{2} \right) \psi \left(x - \frac{z}{2} \right) \\ \psi^\dagger \left(x + \frac{z}{2} \right) &\longrightarrow \psi^\dagger \left(x + \frac{z}{2} \right) W_A \left(x + \frac{z}{2}, x \right) . \end{aligned} \quad (3.41)$$

La función $W_A(x, y)$ está definida por

$$W_A(x, y) = P \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_x^y ds_\mu \gamma_5 \lambda_a A_\mu^a(s) \right\} , \quad (3.42)$$

donde P es el operador orden temporal y s toma valores sobre algún camino que conecte x con y .

Una vez calculada la acción efectiva luego de la inclusión de la corriente axial, los elementos de matriz en la ecuación (3.40) se obtienen a través de la derivada funcional de dicha acción respecto de los campos de gauge y respecto a los campos mesónicos renormalizados,

$$\langle 0|A_\mu^a(0)|\tilde{\phi}_b(p)\rangle = \frac{\delta^2 S^{eff}}{\delta A_\mu^a \delta \phi_b(p)} \Big|_{A_\mu^a = \tilde{\phi}_b = 0} . \quad (3.43)$$

En forma análoga a los cálculos realizados en la sección (3.1), escribimos la acción efectiva como la suma de un determinante fermiónico más una parte de interacción,

$$S^{eff} = -\ln \det D + S_{pot} \quad (3.44)$$

En este caso la presencia de S_{pot} resulta irrelevante, dado que no depende de A_μ^a . Por otro lado, de la ecuación (3.43) vemos que sólo nos importan aquellos términos lineales en A_μ^a , con lo cual expandimos la expresión de W_A a primer orden,

$$W_A(x, y) = 1 + \Gamma(x, y) = 1 + i \int_x^y \frac{1}{2} \gamma_5 \lambda_a A_\mu^a(s) ds_\mu . \quad (3.45)$$

Con el mismo criterio utilizado anteriormente, consideramos ahora la MFA en los campos (3.10) y expandimos el operador D al orden lineal en las fluctuaciones. Se tiene

$$\begin{aligned} D^{lin}(p, p') &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') (-\not{p} + m) + \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma_5 \lambda_a A_\mu^a(p - p') \\ &+ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') \Phi(p, p') + \Delta \Phi(p, p') \\ &+ 16 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} [\bar{\Gamma}(p + p' - 2q, 2q - 2p') \Phi(q, q) \\ &+ \Phi(q, q) \Gamma(2p - 2q, 2q - p' - p)] \\ &+ 16 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4} [\bar{\Gamma}(p + p' - 2q, 2q - 2p' - q') \Delta \Phi(q, q') \\ &+ \Delta \Phi(q, q') \Gamma(2p - 2q - q', 2q - p' - p)] , \end{aligned} \quad (3.46)$$

donde se han definido

$$\begin{aligned} \Phi(q, q') &= g \left(\frac{q + q'}{2} \right) \lambda_a \bar{\sigma}_a + \frac{1}{2\alpha} f \left(\frac{q + q'}{2} \right) (\not{q} + \not{q}') \bar{\zeta} \\ \Delta \Phi(q, q') &= g \left(\frac{q + q'}{2} \right) [\lambda_a \delta \sigma_a(q - q') + v \gamma_5 \lambda_a \delta \pi_a(q - q')] \\ &+ \frac{1}{2\alpha} f \left(\frac{q + q'}{2} \right) (\not{q} + \not{q}') \delta \zeta(q - q') . \end{aligned} \quad (3.47)$$

Al realizar la derivada en (3.43) se obtienen dos contribuciones, que pueden ser representadas mediante los diagramas de la figura (3.4). En la figura la cruz indica la inserción de la corriente axial, mientras que la doble línea representa un mesón pseudoescalar.

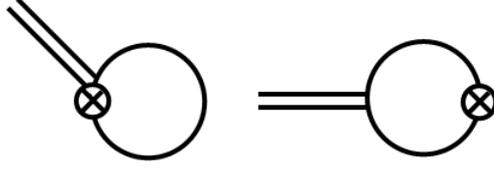


Figura 3.1: Diagramas del proceso de decaimiento. La cruz representa una corriente axial; la doble línea indica un mesón pseudoescalar.

Luego de un largo cálculo, se obtiene que la acción de la ecuación (3.44) puede escribirse como

$$S^{eff} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4t}{(2\pi)^4} \frac{d^4t'}{(2\pi)^4} A_\mu^{ij}(t) \delta\phi^{ji}(t') G_{ij}^\mu(t, t') + \dots \quad , \quad (3.48)$$

donde se ha escrito explícitamente sólo la parte lineal en A_μ^a y ϕ , es decir la parte que contribuye al elemento de matriz estudiado. En esta expresión las funciones G_{ij}^μ vienen dadas por

$$t_\mu G_{ij}^\mu(t, t') = \delta^{(4)}(t + t') F_{ij}(t) \quad , \quad (3.49)$$

donde

$$\begin{aligned} F_{ij}(p) &= 2N_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [g(q^+) + g(q^-) - 2g(q)] \left\{ \frac{\Sigma_i(q)}{\Sigma_i^2(q) + Z^2(q)q^2} + \frac{\Sigma_j(q)}{\Sigma_j^2(q) + Z^2(q)q^2} \right\} - \\ &- 2N_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (\bar{\sigma}_i + \bar{\sigma}_j) [g(q^+) + g(q^-) - 2g(q)] g(q) \times \\ &\times \frac{1}{\Sigma_i^2(q^+) + Z^2(q^+)q^{+2}} \frac{1}{\Sigma_j^2(q^-) + Z^2(q^-)q^{-2}} \{ \Sigma_i(q^+) \Sigma_j(q^-) + Z(q^+) Z(q^-) q^+ q^- \} + \\ &+ 4N_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g(q) \frac{1}{\Sigma_i^2(q^+) + Z^2(q^+)q^{+2}} \frac{1}{\Sigma_j^2(q^-) + Z^2(q^-)q^{-2}} \times \\ &\times [\Sigma_i(q^+) Z(q^-) q^- - \Sigma_j(q^-) Z(q^+) q^+] [Z(q^+) q^+ - Z(q^-) q^-] \quad . \end{aligned} \quad (3.50)$$

De este modo, introduciendo el factor de renormalización (3.39), en el límite de isospin obtenemos las constantes de decaimiento

$$\begin{aligned} f_\pi &= \frac{1}{m_\pi^2} F_{uu}(-m_\pi^2) Z_\pi^{\frac{1}{2}} \\ f_K &= \frac{1}{m_K^2} F_{us}(-m_K^2) Z_k^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.51)$$

para los mesones π y K respectivamente. Para el sector $\eta - \eta'$, donde existe una mezcla entre los estados η_0 y η_8 , pueden definirse dos constantes de decaimiento débil $f_{\eta,a}$ y $f_{\eta',a}$ para cada componente $a = 0, 8$ de la corriente axial definida en (3.40) [18]. Éstas se escriben en términos de los ángulos de mezcla (3.35) como

$$\begin{aligned} f_{\eta,a} &= \frac{1}{m_\eta^2} [f_{a8}(-m_\eta^2) \cos \varphi_\eta - f_{a0}(-m_\eta^2) \sin \varphi_\eta] Z_\eta^{1/2} \quad , \quad a = 0, 8 \\ f_{\eta',a} &= \frac{1}{m_{\eta'}^2} [f_{a8}(-m_{\eta'}^2) \sin \varphi_{\eta'} + f_{a0}(-m_{\eta'}^2) \cos \varphi_{\eta'}] Z_{\eta'}^{1/2} \quad , \quad a = 0, 8 \quad . \end{aligned} \quad (3.52)$$

A su vez, las constantes f_{ab} que aparecen en la expresión anterior pueden ser escritas en términos de la función F_{ij} definida en (3.50), resultando

$$\begin{aligned} f_{00}(p^2) &= \frac{1}{3} [2F_{uu}(p^2) + F_{ss}(p^2)] \\ f_{88}(p^2) &= \frac{1}{3} [F_{uu}(p^2) + 2F_{ss}(p^2)] \\ f_{08}(p^2) &= \frac{\sqrt{2}}{3} [F_{uu}(p^2) - F_{ss}(p^2)] \quad . \end{aligned} \quad (3.53)$$

Los valores de las constantes de decaimiento pueden determinarse empíricamente con buena precisión.

RESUMEN

En este trabajo se analizó un modelo de quarks con simetría quiral $SU(3)$ que incluye interacciones no locales de cuatro y seis fermiones, con la incorporación de un acoplamiento de *corrientes de momento* que conduce a una renormalización de la función de onda en el propagador de quarks. Se consideraron interacciones no locales covariantes y separables en el espacio de momentos. El modelo representa una generalización de los estudiados en la Ref. [17], donde se trabaja con un modelo de este tipo pero con sólo dos sabores de quarks, y la Ref. [19], donde se estudia un modelo similar pero sin incorporar la renormalización de función de onda.

En el marco del modelo mencionado, estudiamos las propiedades de vacío a temperatura y potencial químico nulos, determinando las ecuaciones del gap y los condensados quirales a nivel de campo medio. Se encontró que los quarks adquieren masas dinámicas dependientes del momento, en concordancia con los resultados de Lattice QCD. También en acuerdo con Lattice QCD, se obtuvo que las funciones de onda de los quarks se renormalizan con funciones del momento $Z(p)$. Luego de llevar a cabo una bosonización del modelo fermiónico, se estudiaron propiedades de los mesones escalares y pseudoescalares. Expandiendo la acción efectiva a segundo orden en los campos mesónicos se encontraron las ecuaciones que permiten calcular las masas de los mesones pseudoescalares π , K , η y η' y los ángulos de mezcla para el sistema $\eta - \eta'$. Asimismo, introduciendo una corriente axial externa, se calcularon las constantes de decaimiento débil para el sector de mesones pseudoescalares.

Es importante señalar que, como puede comprobarse en forma relativamente sencilla, los resultados obtenidos se reducen a aquéllos reportados en las Refs. [17] y [19] tomando los límites adecuados. Esto es, tomando $H = 0$ y considerando sólo los quarks u y d en el caso del modelo estudiado en la Ref. [17], y tomando $\alpha \rightarrow \infty$ (o equivalentemente, $Z(p) = 1$) en el caso del modelo analizado en la Ref. [19].

PERSPECTIVAS

El modelo analizado en este trabajo posee seis parámetros libres, que deben ser fijados de algún modo para chequear el poder predictivo de la teoría. Usualmente se determinan estos parámetros mediante igual cantidad de observables físicos cuyos valores sean bien conocidos, esto es, se plantea un sistema de ecuaciones a resolver utilizando rutinas numéricas. Una vez ajustados los parámetros es posible predecir propiedades hadrónicas a ser comparadas con sus valores empíricos. Los parámetros libres del modelo, en el límite de isospin, son las masas de los quarks m_u y m_s ($m_u = m_d$), las constante de acoplamiento G y H y los parámetros de corte Λ_0 y Λ_1 de los factores de forma $g(p)$ y $f(p)$, respectivamente. En realidad, la propia forma funcional de $g(p)$ y $f(p)$ es un *input* del modelo. Sin embargo, como se ha mostrado en la literatura existente en este tipo de teorías, los resultados no dependen fuertemente de los factores de forma utilizados en tanto éstos tengan un buen comportamiento en el límite ultravioleta.

Como perspectiva para continuar este trabajo de investigación, se propone determinar los parámetros libres imponiendo que el modelo reproduzca correctamente los valores empíricos para la masa y la constante de decaimiento débil del pión (m_π y f_π), la masa de los mesones K , la masa de la partícula η' , el valor del condensado $\langle \bar{u}u \rangle$ y, finalmente, se propone exigir la consistencia con cálculos efectuados en Lattice QCD, determinando a partir de sus resultados la forma funcional de los factores de forma y el valor de $Z(0)$ [20, 21]. El sistema así parametrizado permitirá obtener predicciones para otros observables, como el condesado $\langle \bar{s}s \rangle$, la masa del mesón η , los ángulos de mezcla $\varphi_{\eta,\eta'}$, las otras constantes de decaimiento débil y asimismo las propiedades de los mesones del sector escalar. Finalmente, si el modelo ofrece una descripción razonable del sector mesónico, es natural plantear el estudio de esta teoría para sistemas con temperatura y potencial químico finitos, analizando así en este marco el diagrama de fases de las interacciones hadrónicas.

Bibliografía

- [1] F. J. Ynduráin, *The theory of quark and gluon interactions* (Springer-Verlag, Heilderberg, 1999).
- [2] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, (World Scientific, Singapore, 1987).
- [3] C. Rebbi, Phys. Rep. **137**, 63 (1986); J. B. Kogut, Phys. Rep. **67**, 67 (1980).
- [4] Nambu y Jona-Lasinio, *Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity*, Phys. Rev. Vol.124, 246,(1961).
- [5] T. Hatsuda y T. Kunishiro, (1985); V. Bernard, R. L. Jaffe y U. G. Meissner (1988).
- [6] G. Ripka, Nucl. Phys. A **683**, 463 (2001); R. S. Plant y M. C. Birse, Nucl. Phys. A **703**, 717 (2002).
- [7] E. Ruiz Arriola y L. L. Salcedo, Phys. Lett. B **450**, 225 (1999).
- [8] V. Bernard, Phys. Rev. D **34**, 1601 (1986).
- [9] S. B. Treiman, R. Jackiw, B. Zumino y E. Witten, *Current algebra and anomalies* (Princeton University Press, Princeton, 1985).
- [10] John Donoghue, *Dynamics of the Standard Model*, (Cambridge University Press, 1992).
- [11] D. I. Dyakonov y V. Y. Petrov, Sov. Phys. JETP **62**, 204 (1985); Sov. Phys. JETP **62**, 431 (1985); Nucl. Phys. B **245**, 259 (1985); Nucl. Phys. B **272**, 457 (1986); D. I. Dyakonov, V. Y. Petrov y P. V. Pobylitsa, Nucl. Phys. B **306**, 809 (1988).
- [12] M. Buballa, Phys. Rep. 407:205, (2005).

- [13] G. Ripka, *Quarks bound by chiral Fields* (Oxford University Press, Oxford, 1997).
- [14] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **61**, 455 (1973).
- [15] S. Pokorsky. *Gauge Field theory*. (Cambridge Monographs on mathematical physics. Cambridge University Press, 2000).
- [16] D. Ebert y H. Reinhardt, Phys. Lett. B **173** 453 (1986).
- [17] S. Noguera y N.N. Scoccola, Phys. Rev. D **78** 114002 (2008).
- [18] Particle Data Group, K Hagiwara et al., Phys. Rev. D **66**, 010001 (2002).
- [19] A. Scarpettini, D. Gomez Dumm and N. N. Scoccola, Phys. Rev. D **69**, 114018 (2004)
- [20] M. B. Parappilly, P. O. Bowman, U. M. Heller, D. B. Leinweber, A. G. Williams y J. B. Zhang, Phys. Rev. D **73**, 054506 (2006).
- [21] S. Furui y H. Nakajima, Phys Rev. D **73**, 074503 (2006).