



Universidad Nacional de La Plata
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas

Trabajo de Diploma de la Licenciatura en Física

Estudio de incertezas en análisis globales de QCD

Autor:
Manuel Epele

Director: Dr. Rodolfo Sassot

23 de Marzo, 2012

Resumen

Se presenta un estudio sistemático de la propagación de incertezas en un análisis global de QCD de probabilidades de fragmentación de quarks y gluones en hadrones. Específicamente, se ha realizado un estudio de las funciones de fragmentación de piones utilizando la aproximación Hessiana modificada en análisis globales al orden siguiente al dominante (NLO). En primera instancia, se intenta estimar el nivel de aplicabilidad del método evaluando la precisión de la aproximación a segundo orden de la función χ^2 , alrededor de su valor mínimo, en términos de los parámetros que describen el procesos fragmentación de cada sabor y la hipótesis de independencia de los mismos. Una vez conocido el rango de variabilidad de los parámetros y su correlación, se ha buscado determinar las incertezas en las probabilidades de fragmentación, se ha estudiado el comportamiento de las bandas de error y el error porcentual en función de z y Q^2 para distintos sabores y se ha contrastado los resultados obtenidos con otra técnica basada en el uso de multiplicadores de Lagrange.

Índice general

1. Introducción general: QCD y partones	7
1.1. Dispersión de leptones y modelo de partones	8
1.2. Fórmulas básicas del modelo de partones simple	14
1.3. Cromodinámica Cuántica y ecuaciones de evolución	16
1.4. Hadronización	19
1.5. Procesos relevantes	22
1.5.1. Aniquilación electrón - positrón inclusiva	22
1.5.2. Dispersión profundamente inelástica semi-inclusiva	23
1.5.3. Dispersión hadrón - hadrón	23
2. Análisis globales en QCD	25
2.1. Extracciones de funciones de fragmentación	25
2.2. Datos experimentales seleccionados	27
2.3. Método Hessiano	31
2.4. Estimación de incertezas	33
2.5. Multiplicadores de Lagrange	34
3. Resultados: incertezas en las distribuciones	35
3.1. Explorando el espacio de parámetros	35
3.1.1. Correlaciones	35
3.1.2. Comportamiento cuadrático	38
3.2. Incertezas	41
3.2.1. Comportamiento en función de z	41
3.2.2. Comportamiento respecto de los sabores	42
3.2.3. Comportamiento con Q^2	43
4. Conclusiones	47
Bibliografía	51

Capítulo 1

Introducción general: QCD y partones

A principios del siglo 20, la materia del universo se creía compuesta de átomos constituidos de núcleos y electrones. Los núcleos a su vez estaban compuestos de protones y neutrones que se mantenían unidos mediante la interacción fuerte, mediada por los piones (descubiertos en experimentos de rayos cósmicos). Desde entonces, con la construcción de los aceleradores de partículas, varios cientos de nuevas partículas, estables e inestables, fueron producidas e identificadas en experimentos de dispersión de nucleones, piones, fotones y electrones. Actualmente la clasificación más general se realiza a través de sus interacciones. En este esquema, la primera división es entre los bosones mediadores de las interacciones débiles (bosones W y Z) y electromagnéticas (fotones) y los constituyentes básicos de la materia. Así encontramos los leptones que sólo interactúan débil y/o electromagnéticamente (todos ellos fermiones) y los hadrones que además son capaces de interactuar fuertemente. Los hadrones se dividen en dos grupos: los bariones (fermiones, como el protón) y los mesones (bosones, como los piones).

El número de especies de hadrones es enorme, mientras que el número de especies de leptones y bosones de gauge es limitado. Además no existe evidencia experimental que sugiera que éstos últimos poseen estructura interna, mostrándose como partículas puntuales. Por el contrario los hadrones se observan más bien como objetos extendidos. Ésto condujo a pensar en la existencia de partículas más fundamentales de spin $1/2$ (llamadas quarks), constituyentes de los hadrones, que permitieran realizar una clasificación natural de los mismos. Según este modelo, todos los hadrones pueden clasificarse de manera consistente si los bariones se piensan como constituidos por 3 quarks (qqq) y los mesones por pares quark - antiquark ($q\bar{q}$).

A pesar de haber tenido un éxito rotundo por la simplicidad a la que se

redujo la clasificación de los hadrones, el modelo de quarks se encontraba con dificultades a la hora de describir algunos estados bariónicos. Tal es el caso de la resonancia pión - nucleón, llamada Δ^{++} , que tiene spin 3/2. En base a su carga, este barión está formado por tres quark u. Pero para conformar un estado de spin total 3/2, los spines individuales de los tres quarks deben apuntar en la misma dirección. Ésto violaría el principio de exclusión de Pauli a menos que se admitiera que los quarks poseen un grado de libertad oculto (denominado *color*) que los distinga entre sí. Por supuesto, se necesitan al menos tres colores para distinguir a los quarks que forman la Δ^{++} .

1.1. Dispersión de leptones y modelo de partones

Históricamente las experiencias de dispersión han sido las que ocuparon el lugar más importante dentro de la física en la búsqueda de develar la estructura fundamental de la materia. La dispersión de partículas α y β en átomos condujeron a Rutherford a sugerir un modelo atómico constituido por un núcleo masivo localizado, con carga positiva Ze , alrededor del cual orbitan Z electrones. Los cálculos de Rutherford mostraron que la distribución angular de la dispersión de partículas α estaba de acuerdo con su propuesta, tirando por tierra el modelo avanzado por Thomson (descubridor del electrón en 1897) de electrones embebidos en una distribución continua de carga positiva. Así la existencia del núcleo y el posterior aislamiento en laboratorio del protón, puso a éste junto con los electrones y neutrones en el lugar de los constituyentes fundamentales de la materia ordinaria.

Hacia mediados de la década de 1960 se realizaron en SLAC (Stanford Linear Accelerator Center, California, EE.UU.) experimentos de dispersión en los que se utilizaron electrones altamente energéticos, de la misma forma que la partículas α en el descubrimiento del núcleo. Estos experimentos permitieron explorar la estructura interna del protón.

La sección eficaz de procesos de dispersión exclusivos (en los que todos los productos de la dispersión se identifican inequívocamente) $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ se puede escribir como:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} \frac{|A|^2}{2E_1 2E_2} \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \quad (1.1)$$

donde \mathbf{v}_i , E_i y p_i son la velocidad, la energía y el tetraimpulso de la i -ésima partícula, y donde la física del proceso está contenida en la amplitud escalar invariante de Lorentz $|A|^2[1][2]$.

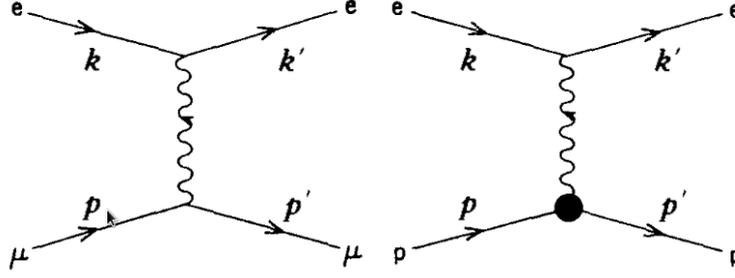


Figura 1.1: Izquierda: diagrama de Feynmann del proceso de dispersión electrón - muón. Derecha: diagrama de Feynman del proceso de dispersión electrón - protón.

La forma explícita de la amplitud invariante depende pura y exclusivamente del proceso particular de dispersión. Por ejemplo, a orden más bajo (en la constante de acoplamiento electromagnética), la dispersión elástica electrón - muón resulta

$$|A|^2 = \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} \left| \bar{u}(k', s_3) \gamma^\mu u(k, s_1) \frac{e^2}{q^2} \bar{u}(p', s_4) \gamma_\mu u(p, s_2) \right| \quad (1.2)$$

donde reconocemos las corrientes de transición $j_{(e)}^\nu = \bar{u}(k', s_3) \gamma^\nu u(k, s_1)$ y $j_{(\mu)}^\nu = \bar{u}(p', s_4) \gamma^\nu u(p, s_2)$ que describen al electrón y el muón respectivamente, y el propagador fotónico $-g^{\mu\nu} e^2 / q^2$ (con $q = k - k'$). Cabe notar que, en estos cálculos, no se está prestando atención en los estados de polarización inicial y final de spin de cada partícula, por eso es que se sumó sobre los posibles estados de spin finales y se promedió sobre los estados de spin iniciales.

En el sistema de laboratorio (muón inicialmente en reposo)

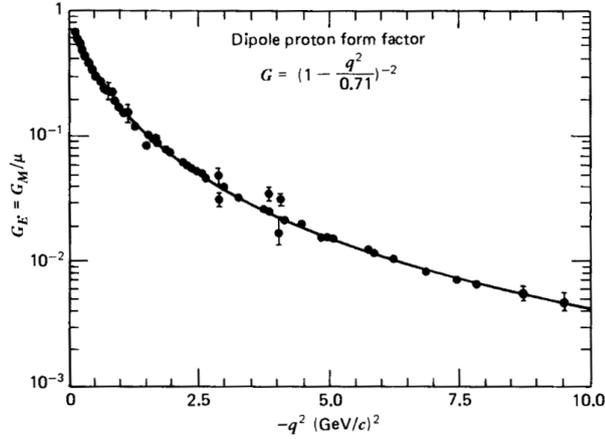
$$p = (M, 0) \quad k = (E, \mathbf{k}) \quad k' = (E', \mathbf{k}') \quad (1.3)$$

y despreciando términos proporcionales a m^2 y M^2 (con m y M las masas del electrón y el muón respectivamente), la sección eficaz de dispersión electrón - muón, cuando el estado final del muón no es detectado, resulta

$$\frac{d^2\sigma}{dE'_e d\Omega_e} = \frac{4\alpha^2 (E')^2}{Q^4} \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right) \quad (1.4)$$

Aquí hemos definido las cantidades

$$q^2 = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} = -Q^2 \quad (1.5)$$

Figura 1.2: Factores de forma del protón en función de q^2 .

$$E - E' = \nu \quad (1.6)$$

Podríamos pensar que para calcular la sección eficaz de dispersión elástica electrón - protón (que también interactúan intercambiando un fotón) simplemente debemos reemplazar la masa del muón por la del protón. Pero no es tan simple como esto pues existe una diferencia muy importante: el protón es una partícula extendida y por lo tanto no puede ser descrito por la misma corriente que describe un muón puntual. Sin embargo, los estados $u(p)$ y $\bar{u}(p')$ del protón, antes y después de que ocurra la dispersión, evolucionan de acuerdo a la ecuación de Dirac. Por lo tanto, si la corriente de protón es distinta, debemos reemplazar las matrices γ^μ por algo más general, con las características Lorentz de estas matrices, que nos permita construir un tetravector. Estos es

$$J^\mu = \bar{u}(p') [F_1(q^2)\gamma^\mu + \frac{\kappa F_2(q^2)}{2M} i\sigma^{\mu\nu} q_\nu] u(p) \quad (1.7)$$

donde los coeficientes F_1 y F_2 son dos factores de forma independientes que describen la estructura del protón, y κ es el momento magnético anómalo del protón. En general, los factores F_i se reemplazan por las combinaciones lineales

$$G_E(q^2) = F_1 - \frac{\kappa Q^2}{4M^2} F_2 \quad (1.8)$$

$$G_M(q^2) = F_1 + \kappa F_2 \quad (1.9)$$

llamados factores de forma eléctrico y magnético, que permiten escribir la sección eficaz de dispersión elástica electrón - protón como

$$\frac{d^2\sigma}{dEd\Omega} = \frac{4\alpha^2(E')^2}{Q^4} \left\{ \frac{G_E^2 + (Q^2/4M^2)G_M^2}{1 + Q^2/4M^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2M^2} \frac{Q^2 G_M^2}{2M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right) \quad (1.10)$$

Las expresiones de los factores de forma no pueden deducirse directamente de la teoría. Sin embargo, pueden medirse y los datos experimentales indican que G_E y G_M decrecen a medida que Q^2 aumenta, Fig.(1.2).

Los factores de forma indican claramente que el protón no es una partícula puntual. Su estructura interna puede ser explorada si se posee una mejor resolución espacial. Ésto se consigue incrementando q^2 (menor longitud de onda), es decir, haciendo que los electrones pierdan una gran cantidad de energía en la dispersión. Ahora bien, para q^2 suficientemente grande, puede ocurrir que el protón blanco se fragmente (ver Fig.(1.3)) y entonces la dispersión se vuelva inelástica (de hecho los factores de forma indican que la probabilidad de que ocurra dispersión elástica se reduce con q^2).

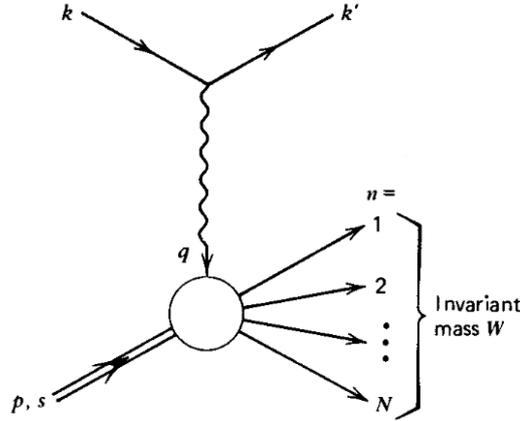


Figura 1.3: Diagrama $ep \rightarrow e'X$ al orden más bajo en la constante de acoplamiento fuerte α_s .

La corriente J^μ es inapropiada para describir esta clase de eventos pues está claro que el estado no puede describirse con un único espinor de Dirac \bar{u} . La verdadera corriente debe tener una estructura aún más compleja por lo que resulta conveniente escribir la amplitud invariante como

$$|A|^2 = L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \quad (1.11)$$

donde

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}\{(\gamma^\lambda k'_\lambda + m)\gamma^\mu(\gamma^\lambda k_\lambda + m)\gamma^\nu\} \quad (1.12)$$

es el tensor leptónico, que describe la parte leptónica del diagrama, y

$$W^{\mu\nu} = W_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \frac{1}{M^2} W_2 \left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right) \quad (1.13)$$

es el tensor hadrónico que esconde toda nuestra ignorancia acerca de la forma de la verdadera corriente. Las coeficientes W_i son escalares de Lorentz, llamadas funciones de estructura, que dependen de los tetraimpulsos en el vértice hadrónico (elegimos como variables independientes q^2 y ν). Finalmente la sección eficaz diferencial de la dispersión inelástica electrón - protón, en el sistema de laboratorio, resulta

$$\frac{d^2\sigma}{dEd\Omega} = \frac{4\alpha^2(E')^2}{Q^4} \left\{ W_1 \cos^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (1.14)$$

Debemos remarcar que a diferencia de la dispersión elástica aquí tenemos dos variables independientes. Si el protón fuese puntual

$$2MW_1(\nu, Q^2) \rightarrow \frac{Q^2}{2M\nu} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2M\nu}\right) \quad (1.15)$$

$$\nu W_1(\nu, Q^2) \rightarrow \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2M\nu}\right) \quad (1.16)$$

que son funciones sólo de la variable $\omega = 2M\nu/Q^2$. Comparando las ecuaciones (1.10) y (1.14), las funciones adimensionales $2MW_1(\nu, Q^2)$ y $\nu W_1(\nu, Q^2)$ deberían tender a cero con Q^2 , sin embargo los datos experimentales (ver Fig.(1.4)) muestran algo curioso: a ω fijo y $Q^2 \geq 1\text{GeV}^2$ se observa que

$$MW_1(\nu, Q^2) \rightarrow F_1(\omega) \quad (1.17)$$

$$\nu W_2(\nu, Q^2) \rightarrow F_2(\omega) \quad (1.18)$$

y además

$$\omega F_2(\omega) \approx 2F_1(\omega) \quad (1.19)$$

Este fenómeno se denomina *Bjorken scaling* y surgiría naturalmente si la dispersión inelástica electrón - protón se debiera a la dispersión elástica

incoherente sobre constituyentes puntuales no interactuantes entre sí dentro del protón (llamados partones por R. Feynman). Si verdaderamente la dispersión ocurre de esta manera y el partón blanco transporta una fracción x del momento del protón

$$\nu W_2(\nu, Q^2) = \sum_i \int dx e_i^2 f_i(x) \delta(x - 1/\omega) \quad (1.20)$$

donde la suma se realiza sobre las distintas especies de partones de carga e_i . La función $f_i(x)$ es la probabilidad de encontrar un partón de la especie i con fracción de momento entre x y $x + dx$ dentro del protón. Entonces, podemos escribir que para Q^2 grande

$$MW_1(\nu, Q^2) \rightarrow F_1(x) = \frac{1}{2x} F_2(x) \quad (1.21)$$

$$\nu W_2(\nu, Q^2) \rightarrow F_2(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) \quad (1.22)$$

donde $x = 1/\omega = Q^2/2M\nu$. Estas expresiones se sustentan en la idea de que los partones se comportan como partículas puntuales libres (invocando las mismas ideas empleadas en el estudio de la dispersión electrón - muón). En este análisis, la sección eficaz diferencial de la dispersión inelástica electrón - protón exclusivas, en el límite de Q^2 y ν grandes, también llamado de *dispersión profundamente inelástica* (en inglés, deep inelastic scattering), es simplemente la suma incoherente sobre todas las contribuciones de los par-

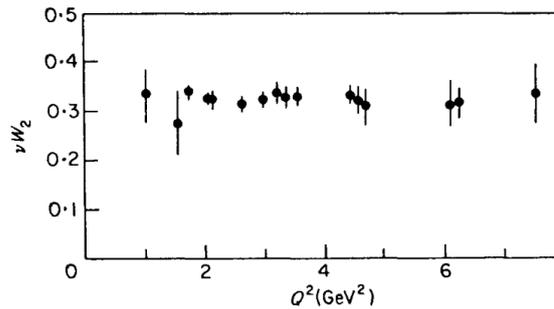


Figura 1.4: Función de estructura νW_2 determinada en la dispersión electrón - protón en función de Q^2 para $\omega = 4$. Los datos fueron obtenidos en el experimento SLAC.

tones

$$\left(\frac{d\sigma}{dudt}\right)_{ep \rightarrow eX} = \sum_i \int_0^1 dx f_i(x) \left(\frac{d\sigma}{dudt}\right)_{eq_i \rightarrow eq_i} \quad (1.23)$$

donde hicimos un cambio de las variables E', θ, ϕ a las variables de Mandelstam $s = (p + q)^2$, $t = (p - p')^2$ y $u = (p - k')^2$. Y de donde se tiene en forma inmediata que

$$2xF_1(x) = F_2(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) \quad (1.24)$$

que es la ecuación maestra del modelo de partones de spin 1/2 (Bjorken and Paschos 1964; Callan and Gross 1969).

1.2. Fórmulas básicas del modelo de partones simple

Sabiendo que el Bjorken scaling nos dice que los constituyentes del protón existen, las ecuaciones (1.22) a (1.24) resultan las herramientas que nos permiten extraer información adicional[2]. En el caso del protón

$$\frac{1}{x} F_2^{ep}(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^p(x) + \bar{u}^p(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d^p(x) + \bar{d}^p(x) + s^p(x) + \bar{s}^p(x)] \quad (1.25)$$

donde utilizamos la notación $f_u = u$, etc. para los quarks y $f_{\bar{u}} = \bar{u}$, etc. para los antiquarks. Por otro lado, para la estructura inelástica del neutrón

$$\frac{1}{x} F_2^{en}(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^n + \bar{u}^n] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d^n + \bar{d}^n + s^n + \bar{s}^n] \quad (1.26)$$

Como el protón y el neutrón son miembros de un doblete de isospin (fuerte), los contenidos de quarks de ambas partículas deben estar relacionados. Es decir, como en el protón hay tantos quarks u como d en el neutrón, y siguiendo,

$$u^p(x) = d^n(x) = u(x) \quad (1.27)$$

$$d^p(x) = d^n(x) = d(x) \quad (1.28)$$

$$s^p(x) = s^n(x) = s(x) \quad (1.29)$$

1.2. FÓRMULAS BÁSICAS DEL MODELO DE PARTONES SIMPLE 15

Otros vínculos entre las funciones de estructura de quarks f_i resultan del hecho de que los números cuánticos del protón son exactamente aquellos que se obtienen de la combinación uud de quarks de valencia. En el modelo de partones, describimos al protón como constituido por tres quarks de valencia $u_v u_v d_v$ acompañados por muchos pares quarks-antiquarks $u_s \bar{u}_s, d_s \bar{d}_s, s_s \bar{s}_s$ (despreciando las contribuciones de los sabores de quarks más pesados). Estos últimos constituyen el mar de quarks

$$u_s(x) = \bar{u}_s(x) = d_s(s) = \bar{d}_s(s) = s_s(x) = \bar{s}_s(s) = S(s) \quad (1.30)$$

$$u(x) = u_v(s) + u_s(x) \quad (1.31)$$

$$d(x) = d_v(s) = d_s(x) \quad (1.32)$$

Así obtenemos

$$\frac{1}{x} F_2^{ep}(x) = \frac{1}{9} [4u_v(x) + d_v(x)] + \frac{4}{3} S(x) \quad (1.33)$$

Sumando sobre todas las contribuciones de partones, debemos recuperar los números cuánticos del protón. Esto nos conduce a reglas de suma como las siguientes:

$$\int_0^1 [u(x) - \bar{u}(x)] dx = 2 \quad (1.34)$$

$$\int_0^1 [d(x) - \bar{d}(x)] dx = 1 \quad (1.35)$$

$$\int_0^1 [s(x) - \bar{s}(x)] dx = 0 \quad (1.36)$$

Pero esto no es todo: la conservación del momento nos conduce a que

$$\int_0^1 [u(x) + \bar{u}(x) + d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)] dx = 1 - \epsilon \quad (1.37)$$

donde ϵ es la fracción de impulso que se llevan los partones eléctricamente neutros. Esto puede describirse como

$$\int_0^1 \left[\frac{9}{2} F_2^{ep}(x) - \frac{3}{4} F_2^{en}(x) \right] dx = 1 - \epsilon \quad (1.38)$$

Utilizando los datos de la dispersión de electrones podemos ver que aproximadamente la mitad del momento es transportada por partones neutros, que no interactúan ni eléctrica ni débilmente, llamados gluones.

1.3. Cromodinámica Cuántica y ecuaciones de evolución

En la práctica, tanto las funciones de estructura como las distribuciones de momento partónicas poseen una dependencia explícita en Q^2 . Ésta refleja la existencia de interacciones entre partones y conduce a la necesidad de modificar la idea de que el fenómeno del Bjorken scaling ocurre en forma exacta.

Como mencionamos antes, una manera natural de explicar el Bjorken scaling es admitir la existencia de constituyentes puntuales y libres dentro de los hadrones. En otras palabras, el scaling a Q^2 grande implica que los partones se muestran como libres cuando se los observa con una gran resolución espacial. Entonces, la dinámica de un sistema de partones interactuantes debe contemplar la posibilidad de que las interacciones se vuelvan débiles cuanto más cerca se encuentren los partones entre sí.

La búsqueda de una teoría para describir la dinámica de partones se inició poco después del desarrollo del modelo de partones libres. Todas las teorías de campos cuánticos de gauge fueron exploradas como posibles candidatos, aunque sólo las teorías de gauge no abelianas exhiben el comportamiento de las interacciones deseado, llamado *libertad asintótica*[3].

Por supuesto, estas teorías requieren la existencia de una simetría extra en los sistemas de partones, a la que están unívocamente asociadas. Fritzsch y Gell-Mann propusieron identificar esta simetría con la carga de color de los quarks, necesaria para explicar, por ejemplo, por qué las partículas Δ^{++} y Δ^- pueden describirse como un sistema de tres quarks de la misma especie sin violar el principio de exclusión de Pauli. La dinámica de partones formulada como una teoría de gauge, sustentada en esta identificación, se denominó Cromodinámica Cuántica (QCD).

Los campos de gauge no abelianos de QCD que median las interacciones son los gluones. A diferencia de los fotones (mediadores de la interacción electromagnética), los gluones transportan carga de color y, por este motivo, son capaces de interactuar entre ellos. Esta propiedad es el ingrediente fundamental para que la teoría cuente con libertad asintótica.

Los hadrones se presentan como estados sin carga de color, a pesar de que los quarks transportan esta propiedad. Se debe asumir entonces que los únicos estados con físicamente observables son aquellos con carga de color nula, lo que implica necesariamente que los quarks no pueden observarse como estados aislados. Así, QCD explica, junto con la libertad asintótica, por qué los quarks se encuentran confinados en el interior de los hadrones.

Gracias a la libertad asintótica de QCD, podemos utilizar la teoría de per-

1.3. CROMODINÁMICA CUÁNTICA Y ECUACIONES DE EVOLUCIÓN 17

turbaciones para estudiar reacciones a cortas distancias. Esta forma de abordar QCD, conocida como QCD perturbativa, se aplicó para estudiar la dispersión profundamente inelástica electrón - nucleón y recuperar el fenómeno de Bjorken scaling, aunque éste es violado si se tienen en cuenta correcciones de orden superior.

Si bien QCD posee décadas de desarrollo, aún no es posible calcular a partir de primeros principios, es decir, a partir de los quarks, los gluones y sus interacciones de gauge, todos los aspectos relevantes de la estructura de los hadrones. Por ejemplo, no sabemos como vincular el comportamiento de partones cercanos débilmente interactuantes con las propiedades a grandes distancias que no pueden tratarse en forma perturbativa.

En particular, las funciones de estructura contienen información del comportamiento a corta y larga distancia. Afortunadamente, gracias al teorema de factorización (que puede probarse a todo orden en QCD), podemos separar las contribuciones que provienen de las parte perturbativa de la no perturbativa de la teoría. En otras palabras, cualquier sección eficaz de dispersión leptón - nucleón factorizable, puede expresarse como la convolución entre la densidad $q_{f|N}$ de partones f en el nucleón N a una dada escala de energía, con la sección eficaz de dispersión leptón - partón que puede calcularse perturbativamente. Claro está, la parte no perturbativa sólo puede extraerse de los datos experimentales.

En una visión más intuitiva de la libertad asintótica, podemos imaginar que incrementando Q^2 , es decir, explorando más de cerca la estructura interna de un hadrón se pueden resolver quarks y gluones dentro de quarks, pares quark - antiquark dentro de gluones y pares de gluones dentro de gluones[5]. De esta imagen, se deduce que el número efectivo de partones que transportan parte del momento del hadrón al que pertenecen depende de Q^2 y surge también la necesidad de introducir el mar de quarks. Cuantitativamente, introducimos las funciones de "separación" $P_{ij}(z)$ que miden la variación, con Q^2 , de la probabilidad de encontrar un partón i dentro de un partón j con fracción de momento $z = x_i/x_j$. Entonces, las ecuaciones que determinan la dependencia con Q^2 de las densidades de partones q_i son las siguientes:

$$\frac{dq_i(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[q_i(y, Q^2) P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) + g(y, Q^2) P_{qg} \left(\frac{x}{y} \right) \right] \quad (1.39)$$

$$\frac{dg(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[\sum_i q_i(y, Q^2) P_{gq} \left(\frac{x}{y} \right) + g(y, Q^2) P_{gg} \left(\frac{x}{y} \right) \right] \quad (1.40)$$

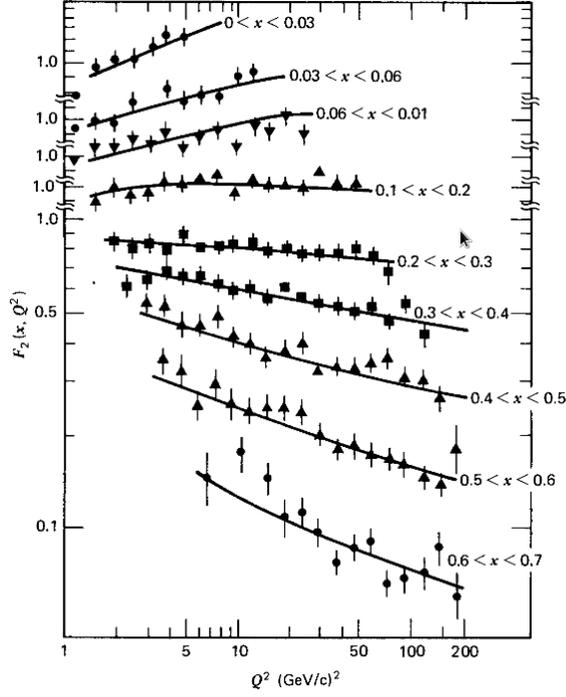


Figura 1.5: Desviación respecto del Bjorken scaling. A mayor Q^2 , la función de estructura $F_2(x, Q^2)$ crece para valores pequeños de x y decrece para grandes valores de x . Los datos pertenecen al experimento CDHS del CERN.

donde α_s es la constante de acoplamiento de QCD, y donde hemos distinguido con $g(x, Q^2)$ a la densidad de gluones. Estas ecuaciones integrodiferenciales son conocidas como las *ecuaciones de Altarelli - Parisi*.

Las funciones $P_{ij}(z)$ son dada por QCD en forma explícita:

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right] \quad (1.41)$$

$$P_{gq}(z) = \frac{1}{2} [z^2 + (1-z)^2] \quad (1.42)$$

$$P_{gq}(z) = \frac{4}{3} \left[\frac{1+(1-z)^2}{z} \right] \quad (1.43)$$

$$P_{gg}(z) = 6 \left[\frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) + \left(\frac{11}{12} - \frac{f}{18} \right) \delta(1-z) \right] \quad (1.44)$$

Las notación $(1-z)_+^{-1}$ indica que las expresiones deben entenderse en el sentido de las distribuciones.

Las ecuaciones de evolución son de gran utilidad para las aplicaciones fenomenológicas de QCD puesto que permiten conectar distintas escalas de energía. De esta manera, alcanzar con conocer las funciones de estructura conocidas para algún valor de referencia $q(x, Q_0^2)$ y evolucionar a la escala de energía de los experimentos para poder contrastar las predicciones teóricas los resultados de las mediciones.

1.4. Hadronización

Se puede obtener aún más información acerca de la estructura de los hadrones si se avanza un poco más allá de las dispersiones profundamente inelásticas inclusivas y se consideran procesos semi-inclusivos. En estos procesos uno de los estados hadrónicos finales es medido en el experimento

$$\ell + h \rightarrow \ell' + h' + X \quad (1.45)$$

Para estudiar las fórmulas básicas de QCD aplicada a procesos semi-inclusivos resulta útil introducir algunos conceptos previos que se relacionan con las dispersiones profundamente inelásticas[5]. Consideremos un fotón con momento q dispersado por un partón de momento p . Si este partón, en el estado, final se encuentra en el interior de un hadrón con momento P , introducimos las variables

$$x = \frac{Q^2}{2Pq} \quad \tilde{x} = \frac{Q^2}{2pq} \quad (1.46)$$

Definimos también la fracción ξ del momento del hadrón transportada por el partón dispersado. Usando QCD, la sección eficaz de dispersión profundamente inelástica fotón - hadrón se escribe como

$$\sigma_H(x, Q^2) = \sum_j \int d\tilde{x} \int d\xi \delta(x - \tilde{x}\xi) \sigma_p^j(\tilde{x}, Q^2) [\xi f_j^H(\xi, Q^2)] \quad (1.47)$$

$$= \sum_j \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \sigma_p^j\left(\frac{x}{\xi}, Q^2\right) [\xi f_j^H(\xi, Q^2)] \quad (1.48)$$

donde σ_p^j es la sección eficaz fotón - partón y f_j^H es la distribución de partones del tipo j en el hadrón. La sumas se realizan sobre todos los tipos de partones (quarks y gluones).

A primer orden en la libertad asintótica

$$\sigma_p^j(\tilde{x}, Q^2) = \begin{cases} e_j^2 \delta(1 - \tilde{x}) & j = q, \bar{q} \\ 0 & j = g \end{cases} \quad (1.49)$$

y

$$\xi f_j^H(\xi, Q^2) = \xi q_j(\xi, Q^2) \text{ or } \xi \bar{q}_j(\xi, Q^2), \quad (1.50)$$

con la dependencia en Q^2 que describen por las ecuaciones de (1.39) y (1.40).

Con todo esto en juego, obtenemos el resultado estándar

$$\sigma_H(x, Q^2) = \sum_j e_j^2 [xq_j(x, Q^2) + x\bar{q}_j(x, Q^2)] \quad (1.51)$$

En la descripción de procesos semi-inclusivos, además de las distribuciones de partones, hace falta introducir nuevas cantidades llamadas *funciones de fragmentación*. Estas funciones miden la probabilidad de que un partón polariza el vacío revistiéndose de otros partones para generar un estado hadrónico final. Para ser un poco más precisos consideremos los procesos de aniquilación e^+e^- con un hadrón detectado en el estado final

$$e^+ + e^- \rightarrow h(P) + X \quad (1.52)$$

Análogamente a lo explicado hasta aquí, las variables relevantes para estudiar las fragmentaciones son

$$z = \frac{2Pq}{Q^2} \qquad \tilde{z} = \frac{2pq}{Q^2} \quad (1.53)$$

y la fracción ξ que ahora mide la fracción de momento del partón transportada por el hadrón en el estado final.

La sección eficaz de este proceso puede escribirse de acuerdo a QCD como sigue

$$\sigma_h(z, Q^2) = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^2} \sum_j \int d\tilde{z} \int d\xi \delta(z - \tilde{z}\xi) \tilde{\sigma}_p^j(\tilde{z}, Q^2) [\xi D_j^h(\xi, Q^2)] \quad (1.54)$$

$$= \frac{4\pi\alpha^2}{Q^2} \sum_j \int_z^1 \frac{d\xi}{\xi} \tilde{\sigma}_p^j\left(\frac{z}{\xi}, Q^2\right) [\xi D_j^h(\xi, Q^2)] \quad (1.55)$$

donde $\tilde{\sigma}_p^j$ es la sección eficaz de producción de partones del tipo j y $D_j^h(\xi, Q^2)$ es la función de fragmentación que mide la probabilidad de que un partón j decaiga dentro de un hadrón h , transportando una fracción de impulso ξ del momento del partón. En el modelo de partones simple (PM), primer orden en QCD, $\tilde{\sigma}_p^j(\tilde{z}) = \sigma_p^j(\tilde{z})$ y las funciones de fragmentación son independientes de Q^2 . Consecuentemente,

$$\sigma_h(z)|_{PM} = \sum_j e_j^2 [zD_{q_j}^h(z) + zD_{\bar{q}_j}^h(z)] \quad (1.56)$$

Al introducir las correcciones de QCD de orden más allá del orden árbol, las funciones de fragmentación adquieren dependencia de Q^2 , descrita por las ecuaciones de evolución

$$\frac{dD_q^h}{dt}(z, t) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_z^1 \frac{dy}{y} \left[D_q^h(y, t) P_{qq} \left(\frac{z}{y} \right) + 2f D_g^h(y, t) P_{gq} \left(\frac{z}{y} \right) \right] \quad (1.57)$$

$$\frac{dD_g^h}{dt}(z, t) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_z^1 \frac{dy}{y} \left[D_q^h(y, t) P_{qg} \left(\frac{z}{y} \right) + D_g^h(y, t) P_{gg} \left(\frac{z}{y} \right) \right] \quad (1.58)$$

donde $t = \ln(Q^2/\mu^2)$ y las funciones P_{ij} son, a orden principal (LO), iguales a las que aparecen en las ecuaciones de Altarelli - Parisi para las distribuciones de partones. Es importante remarcar que cuando se incluyen correcciones de orden superior (NLO), esta afirmación deja de ser cierta. Al igual que en el caso de las densidades de partones, para resolver estas ecuaciones se necesita conocer las funciones de fragmentación para algún valor de Q_0^2 . Esta información necesariamente debe extraerse de los datos experimentales. En general, se procede proponiendo una forma funcional en z , para un valor particular de Q^2 que define *la escala inicial* y luego se evoluciona, utilizando las ecuaciones de Altarelli - Parisi, a la escala de energía del experimento. Las funciones de fragmentación evolucionadas se utilizan para calcular valores de observables físicos (secciones de eficaces) que pueden compararse con las medidas experimentales para determinar los parámetros desconocidos que definen a las funciones de fragmentación a la escala inicial.

Las conservación del momento del partón q en el proceso de hadronización se resume en la regla de suma

$$\sum_h \int_0^1 dz z D_q^h(z, Q^2) \quad (1.59)$$

es decir, cada parton tiene probabilidad 1 de fragmentarse en algún hadrón h .

El rango de aplicabilidad de las funciones de fragmentación se ve comprometido en el límite de $z \rightarrow 0$ a causa de que en las correcciones, a segundo orden en la constante de acoplamiento fuerte, de las funciones de “separación” P_{ij} poseen divergencias del tipo $\ln z^2/z$, en este límite. Este comportamiento se vuelve dominante a z pequeño y conduce a que las funciones de fragmentación, a lo largo de la evolución en Q^2 , se vuelvan negativas para $z \ll 1$.

1.5. Procesos relevantes

1.5.1. Aniquilación electrón - positrón inclusiva

Los procesos de aniquilación electrón - positrón inclusivos (SIA) consisten en las reacciones

$$e^+ + e^- \rightarrow (\gamma, Z) \rightarrow H \quad (1.60)$$

con H un hadrón específico. La sección eficaz, a la energía \sqrt{s} , integrada sobre el ángulo de producción puede escribirse como [6],[7]:

$$\frac{1}{\sigma_{\text{tot}}} \frac{d\sigma^H}{dz} = \frac{\sigma_0}{\sum_q \tilde{e}_q^2} [2F_1^H(z, Q^2) + F_L^H(z, Q^2)] \quad (1.61)$$

donde hemos introducido la función de estructura longitudinal

$$F_L = F_2(1 + 4M^2z/Q^2) - 2zF_1, \quad (1.62)$$

σ_{tot} es la sección eficaz total de la aniquilación electrón - positrón con hadrones en el estado final (incluyendo las corrección $\mathcal{O}(\alpha_s)$) y, donde $\sigma_0 = 4\pi\alpha^2(Q^2)/s$. Las sumas sobre q se realizan sobre todos los sabores de quarks que participan en la hadronización (\tilde{e}_q^2 es la carga electrodébil correspondiente).

Al orden considerado, las funciones de estructura están relacionadas con las funciones de fragmentación según

$$2F_1^H(z, Q^2) = \sum_q \tilde{e}_q^2 \left\{ [D_q^H(z, Q^2) + D_{\bar{q}}^H(z, Q^2)] + \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} [C_q^1 \otimes (D_q^H + D_{\bar{q}}^H) + C_g^1 \otimes D_g^H](z, Q^2) \right\} \quad (1.63)$$

$$F_L^H(z, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \sum_q \tilde{e}_q^2 [C_q^L \otimes (D_q^H + D_{\bar{q}}^H) + C_g^L \otimes D_g^H](z, Q^2) \quad (1.64)$$

donde \otimes indica una convolución ordinaria. Los coeficientes $C_{q,g}^{1,L}$ son calculados a orden $\mathcal{O}(\alpha_s)$ en QCD perturbativa ([7],[8]).

La ventaja de incluir este proceso en el análisis global, es que las funciones de fragmentación que se obtienen son sensibles a los sabores individuales de quarks o antiquarks, pudiéndose entonces distinguir las contribuciones del mar de la de los quarks de valencia.

1.5.2. Dispersión profundamente inelástica semi-inclusiva

La sección eficaz de producción de hadrones mediante procesos de dispersión profundamente inelásticos semi-inclusivos (SIDIS), $eN \rightarrow e'HX$, depende tanto de las distribuciones de partones del nucleón N como de las funciones de fragmentación para el hadrón H .

$$\frac{d\sigma^H}{dx dy dz_H} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^2} \left[\frac{1 + (1-y)^2}{y} 2F_1^H(x, z_H, Q^2) + \frac{2(1-y)}{y} F_L^H(x, z_H, Q^2) \right] \quad (1.65)$$

donde x es la fracción de impulso antes mencionada e $y = p \cdot q / p \cdot k$ otra variable cinemática usualmente utilizada en la descripción de procesos de dispersión profundamente inelástica (con k , p y l los momentos del electrón, nucleón y el fotón intermediario, respectivamente). $z_H = p_H \cdot p_N / p_N \cdot q$ es la variable cinemática definida para la descripción de procesos SIDIS (donde se ha utilizado una notación obvia para identificar los momentos de los hadrones participantes) y $Q^2 = -q^2$. Estrictamente hablando, la ecuación (1.65) y z_H se aplica únicamente al proceso de producción de hadrones.

Las funciones de estructura F_1^H y F_L^H están relacionadas con las funciones de fragmentación según

$$2F_1^H(z, Q^2) = \sum_{q, \bar{q}} \tilde{e}_q^2 \left\{ q(x, Q^2) D_q^H(z, Q^2) + \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} [q \otimes C_{qq}^1 \otimes D_q^H + q \otimes C_{gq}^1 \otimes D_g^H + g \otimes C_{qq}^1 \otimes D_q^H](x, z_H, Q^2) \right\} \quad (1.66)$$

$$F_L^H(z, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \sum_{q, \bar{q}} \tilde{e}_q^2 [q \otimes C_{qq}^L \otimes D_q^H + q \otimes C_{gq}^L \otimes D_g^H + g \otimes C_{qq}^L \otimes D_q^H](x, z_H, Q^2) \quad (1.67)$$

La importancia de incluir datos experimentales de procesos SIDIS en el análisis global, emerge del hecho de que estas fragmentaciones son sensibles a los sabores individuales de quarks y antiquarks. Mientras que esta información resulta inaccesible cuando sólo se tienen en cuenta datos experimentales de procesos SIA.

1.5.3. Dispersión hadrón - hadrón

La producción inclusiva de un hadrón H en procesos de dispersión protón - protón a gran momento transversal p_T también puede estudiarse como una

aplicación de QCD perturbativa. La sección eficaz diferencial puede escribirse en forma factorizada como

$$E_H \frac{d^3\sigma}{dp_H^3} = \sum_{abc} f_a \otimes f_b \otimes d\hat{\sigma}_{ab}^c \otimes D_c^H \quad (1.68)$$

donde la suma se lleva a cabo sobre todas las contribuciones a canales partónicos $a+b \rightarrow c+X$, con $d\hat{\sigma}_{ab}^c$ la sección eficaz partónica asociada. $d\hat{\sigma}_{ab}^c$ puede ser desarrollada en potencias de la constante de interacción fuerte α_s . f_i denota la función de distribución de partones correspondiente. Gracias a la estructura factorizada de la ecuación (1.68), es posible separar las contribuciones a cortas y a largas distancias.

Las correcciones de órdenes en QCD perturbativa resultan particularmente importantes y, en general, para poder llegar a calcular predicciones teóricas robusta de la sección eficaz (1.68), siendo así que análisis, considerando simplemente el orden principal, resulta poco preciso.

Considerar datos experimentales de procesos de dispersión de hadrones en el análisis global mejora la sensibilidad en el calculo de funciones de fragmentación gluónicas gracias a la preponderancia de procesos $gg \rightarrow gX$ de producción de hadrones para valores de p_T más bien bajos. Los datos separados de producción de hadrones cargados provee información adicional que resulta útil de la separación en sabores de quarks distintos.

Capítulo 2

Análisis globales en QCD

En los últimos 20 años se ha adquirido una gran precisión y sofisticación en los métodos de extracción de las funciones de densidad de partones (PDF) y funciones de fragmentación (FF). Estas funciones son fundamentales en cualquier estudio fenomenológico de procesos de dispersión fuerte en los que participan hadrones tanto en el estado inicial como final. Conocerlas permite realizar un análisis crítico de la Cromodinámica Cuántica (QCD), cuantificar las incertezas del Modelo Estándar e investigar acerca de evidencia de nueva física en los nuevos aceleradores de altas energías (como el LHC). Al mismo tiempo, las FF y las PDF proveen información fundamental para el entendimiento de los procesos de hadronización y la estructuras de los hadrones.

Estas funciones no son provistas por la teoría sino que deben extraerse de los datos experimentales y la única manera no arbitraria de realizar esta tarea es a través del análisis global de QCD. Esto es, tratar todas las muestras experimentales disponibles (y confiables) simultáneamente.

2.1. Extracciones de funciones de fragmentación

Tradicionalmente, las extracciones de funciones de fragmentación estaban basadas exclusivamente en los datos provenientes de procesos SIA y eligiendo la forma funcional más simple $N_i z^{\alpha_i} (1-z)^{\beta_i}$ para parametrizar las funciones D_i^h a una escala inicial μ_0 para la evolución en Q^2 ([10],[11],[12],[13]). Estos datos experimentales sólo nos permiten extraer información sobre funciones $D_{q+\bar{q}}^{\pi^+\pi^-}$ haciéndose imposible distinguir las fragmentaciones favorecidas (en las que participan quarks de valencia) de las desfavorecidas (en las que participan quarks del mar) sin asumir cosas de antemano. Ésta es una limitación

sería que no permite aprovechar la riqueza completa de los datos experimentales recientes de producción de piones cargados en procesos SIDIS y colisiones protón - protón.

La situación ideal en una análisis global sería extraer de los datos experimentales las funciones de fragmentación de quarks y antiquarks para cada uno de los distintos sabores, así como también las de gluones. Para lograr este objetivo y, además, acomodar la información proveniente de los procesos de dispersión leptón - nucleón y hadrón - hadrón, se optó por una forma funcional (en la escala inicial de evolución μ_0) más flexible para las distribuciones [14]

$$D_i^h(z, \mu_0) = \frac{N_i z^{\alpha_i} (1-z)^{\beta_i} (1+\gamma_i(1-z)^{\delta_i})}{B[2+\alpha_i, \beta_i+1] + \gamma_i B[2+\alpha_i, \beta_i+\delta_i+1]} \quad (2.1)$$

donde $B[a, b]$ representa la función beta de Euler y N_i es la normalización que pesa la contribución de D_i^h en (1.59). En el análisis global realizado en este trabajo, la escala inicial de la evolución en Q^2 se fijó en $\mu_0 = 1 \text{ GeV}$.

Para reducir el número de parámetros libres en el ajuste, se suelen suponer algunas relaciones, motivadas en simetrías físicas, entre las funciones de fragmentación de partones individuales. Es posible verificar que al relajar estos vínculos no se obtiene una mejora significativa del ajuste [14]. Para los procesos $\{u, \bar{u}, d, \bar{d}\} \rightarrow \pi^+$ se impuso la simetría de isospin sobre las funciones de fragmentación del mar

$$D_{\bar{u}}^{\pi^+} = D_d^{\pi^+} \quad (2.2)$$

permitiendo, por otro lado, que existe alguna leve diferencia en la normalización en el caso de las sumas $q + \bar{q}$:

$$D_{u+\bar{u}}^{\pi^+} = N D_{d+\bar{d}}^{\pi^+} \quad (2.3)$$

Para los quarks strange, se supuso que

$$D_s^{\pi^+} = D_{\bar{s}}^{\pi^+} = N' D_{\bar{u}}^{\pi^+} \quad (2.4)$$

Los quarks pesados, como los livianos, son tratados como partones no masivos. Por este motivo, deben incluirse en forma discontinua en la evolución en Q^2 , por encima del umbral $Q = M_c, M_b$ (donde $M_c = 1,43 \text{ GeV}$ y $M_b = 4,3 \text{ GeV}$ indican las masa de los quarks charm y bottom respectivamente). Esta aproximación es suficientemente buena en el análisis realizado en [14], sobre el que se apoya este trabajo. Para las funciones de fragmentación de los

quarks pesados se optó una forma funcional inicial más restrictiva, tomando $\gamma_i = 0$. Además se supuso que

$$D_c^{\pi^+} = D_{\bar{c}}^{\pi^+} \qquad D_b^{\pi^+} = D_{\bar{b}}^{\pi^+} \qquad (2.5)$$

Teniendo en cuenta todas estas relaciones, se cuenta con un total de 16 parámetros y 7 constantes de constantes que normalizan las funciones de fragmentación (más un conjunto de parámetros relacionados con la normalización de los conjuntos de datos experimentales que se introducirán en la siguiente sección) libres en el análisis χ^2 global que describen la hadronización de quarks y gluones dentro de piones cargados positivamente. Las funciones de fragmentación de π^- se obtienen por conjugación de carga ($D_q^{\pi^-} = D_{\bar{q}}^{\pi^+}$), mientras que para piones neutros se supuso que

$$D_i^{\pi^0} = \frac{1}{2}[D_i^{\pi^+} + D_i^{\pi^-}] \qquad (2.6)$$

Para determinar la dependencia de la constante de acoplamiento de la interacción fuerte α_s con la energía, se resolvió numéricamente la ecuación del grupo de renormalización a NLO

$$\frac{d\alpha_s(\mu^2)}{d \ln \mu^2} = -\frac{\beta_0}{4\pi}\alpha_s^2(\mu^2) - \frac{\beta_1}{(4\pi)^2}\alpha_s^3(\mu^2) \qquad (2.7)$$

donde $\beta_0 = 11 - 2n_f/3$, $\beta_1 = 102 - 38n_f/3$ y n_f es el número de sabores activos, que crece a medida que se van cruzando los umbrales $\mu^2 = M_c$ y $\mu^2 = M_b$.

2.2. Datos experimentales seleccionados

Como se mencionó en la introducción de este capítulo, en el análisis global de QCD se tratan simultáneamente distintos conjuntos de datos experimentales. Para este trabajo se tuvieron en cuenta los procesos SIA, SIDIS y datos de dispersión hadrón - hadrón.

En forma más precisa se consideraron datos de producción de piones cargados en procesos SIA provenientes de TPC[19] a $\sqrt{s} = 29 \text{ GeV}$, SLD[20], ALEPH[15], DELPHI[16] y OPAL[17] (ver Fig. 2.1a), todos a $\sqrt{s} = M_Z$. Para restringir aún más a las funciones de fragmentación a lo largo de la escala de evolución, se utilizaron también datos provenientes de TASSO[21] a energías de $\sqrt{s} = 33 \text{ GeV}$ y 44 GeV , aunque estas mediciones poseen incertezas experimentales mayores que las provenientes de los experimentos antes

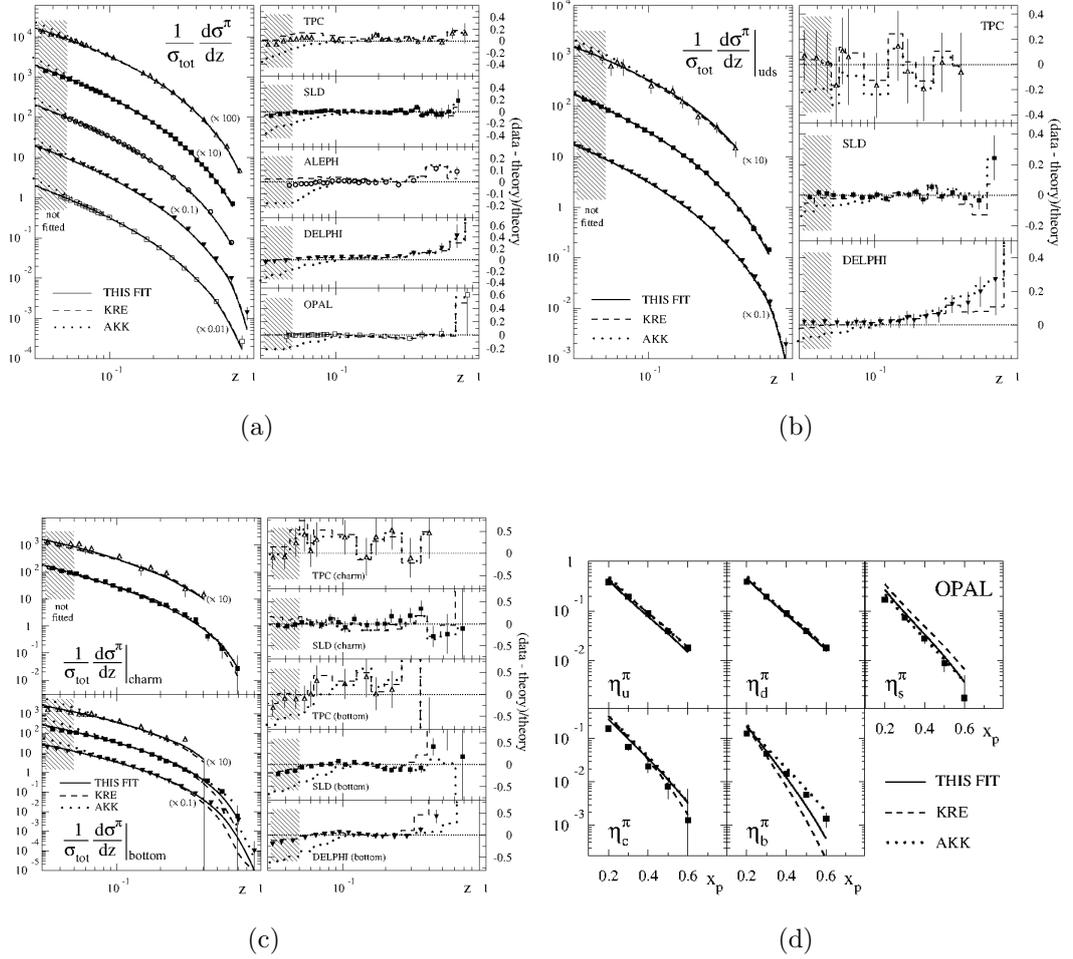


Figura 2.1: **(a)** A la derecha encontramos la comparación de los resultados a NLO de $(1/\sigma_{tot})d\sigma^\pi$ de acuerdo a la ecuación (1.61) junto a los datos de procesos SIA usados en el ajuste[14]. A la izquierda está representado $(dat - predic)/predic$ para los resultados NLO obtenidos en el análisis global[14] para cada uno de los conjuntos de datos experimentales. También se encuentran representadas los resultados obtenidos con las parametrizaciones KRE[10] y AKK[11]. **(b)** Lo mismo que en (a) pero para los conjuntos de datos *tagged* de sabores de quarks liviano. **(c)** Lo mismo que en (a) pero para los conjuntos de datos *tagged* de sabores de quarks charm y bottom. **(d)** Comparación de las probabilidad $\eta_i^H(x_p, s)$ clasificadas por sabor juntos a sus predicciones teóricas. Se incluyen también los resultados obtenidos con las parametrizaciones KRE y AKK.

mencionados. Como las funciones de fragmentación no están bien comportada en el límite de $z \rightarrow 0$, se fijó un corte en $z_{min} = 0,05$ en todos los conjuntos de datos considerados.

Además de las mediciones inclusivas, se incluyen en el análisis resultados discriminados por el sabor del par $q\bar{q}$ creado en el decaimiento del fotón o el bosón Z intermediarios (en inglés, *flavor tagged*). ALEPH, DELPHI y TPC proporcionan datos separados para eventos sumados de quarks livianos (u, d, s) (ver Fig. 2.1b), quarks charm y quarks bottom (ver Fig. 2.1c). Estos datos son de gran valor para la descomposición en sabores, aunque cuenta con la desventaja de no ser medidas directas, sino que la discriminación depende de algún tipo de modelo no perturbativo. Estos datos no pueden ser interpretados o reproducidos a través de la QCD perturbativa y por lo que habitualmente se utilizan conjuntamente simulaciones Monte-Carlo para estimar la composición de sabor de cada conjunto de datos. Para los sabores más pesados surgen algunas complicaciones debido a posibles contaminaciones proveniente de canales de decaimiento débiles. Las predicciones teóricas se calculan sumando en las ecuaciones (1.61 - 1.64) sobre los sabores participantes. Ésto incluye, a orden $\mathcal{O}(\alpha_s)$, a los gluones, es decir, se considera la posibilidad de que el hadrón producido provenga de gluones radiativos. Además de estos datos, OPAL[18] presentó mediciones totalmente separadas en sabor, en términos de la probabilidad $\eta_i^H(x_p, s)$ de que un sabor de quark de sabor $i = q + \bar{q}$ produzca un jet de hadrones H con una fracción de impulso z mayor que x_p . Estos datos son aún más difíciles de interpretar en QCD perturbativa y por este motivo se les asignó hasta un 10 % extra en la incerteza de $\eta_i^H(x_p, s)$ para poder considerarlos en el análisis global (ver Fig. 2.1d).

Para mejor la determinación de las funciones de fragmentación de diferentes sabores y poder separar las fragmentaciones favorecidas de las desfavorecidas, se incluyeron también datos provenientes de SIDIS. Más específicamente, se hizo uso de las mediciones de HERMES[22] de piones cargados (ver Fig. 2.2a). Estos datos además permiten realizar un test de consistencia tanto de la separación en sabores obtenida de los datos “flavor tagged” de SIA como de la escala de evolución de QCD perturbativa, ya que están referidos a escalas de energía mucho más bajas entre $1 \text{ GeV}^2 \lesssim Q^2 \lesssim 10 \text{ GeV}^2 \ll M_Z$. Cabe aclarar que los datos procedentes de SIDIS fueron tomados para z dentro de ciertos bins y distintos valores de Q^2 , mientras que las estimaciones teóricas se calcularon en el centro de cada uno de los bins. La incerteza introducida en esta aproximación fue estimada y sumada en cuadratura a los errores experimentales.

El análisis global también incluye datos provenientes de colisiones hadrón - hadrón producidos en el acelerador RHIC ([23],[24],[25],[26]). Estos datos

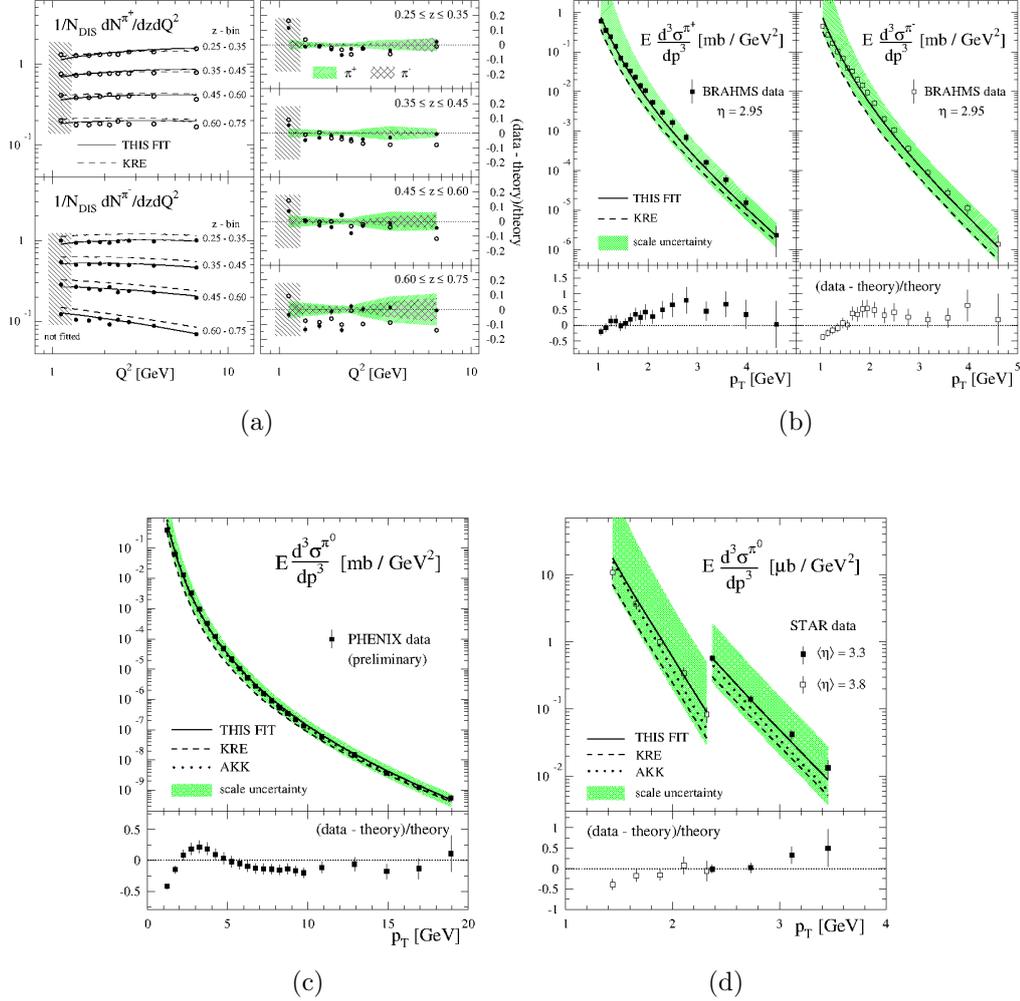


Figura 2.2: **(a)** A la derecha, comparación entre las predicción NLO sobre procesos SIDIS y los datos preliminares de HERMES; también se muestran los resultados obtenidos con la parametrización KRE[10]. A la izquierda, $(\text{dat} - \text{predic})/\text{predic}$ para los resultados NLO. Los círculos claros y oscuros denotan las estimaciones para procesos con estados finales π^+ y π^- , respectivamente. Las bandas sombreadas indican las incertezas teóricas debido al efecto del tamaño de bin finito. **(b)** En el panel superior se comparan los resultados NLO de la producción de piones en procesos *single-inclusive* $pp \rightarrow \pi^\pm X$ a rapidez $|\eta| = 2,95$ con los datos de BRAHMS. Se incluyen las predicciones obtenidas con las parametrización KRE. En el panel inferior encontramos $(\text{dat} - \text{predic})/\text{predic}$ para los resultados NLO. En **(c)** encontramos la misma información que en **(b)** para la producción de piones neutros en procesos *single-inclusive* $pp \rightarrow \pi^0 X$ a rapidez $|\eta| \leq 0,35$ medidos en BRAHMS; en **(d)** se presenta la misma información que en **(b)** pero para los datos de STAR a rapidez $\langle\eta\rangle = 3,3$ y $\langle\eta\rangle = 3,8$.

cubren el espectro de p_T de piones nuestros a rapidez central $|\eta| \leq 0,35$ (experimento PHENIX[23], Fig. 2.2c) y tres a rapidez frontal ($\langle\eta\rangle = 3,3, 3,8$ (experimentos STAR[24][26], Fig. 2.2d) y 4,0 (experimento BRAHMS[25], Fig. 2.2b). El último conjunto de datos mencionado fue excluido del ajuste ya que la incerteza teórica es grande debido a los pequeños valores de p_T explorados.

A todos los datos provenientes del acelerador RHIC, se agregó a las incertezas experimentales un 5% adicional como una manera conservadora de estimar las incertezas teóricas relacionadas con la escala de energía elegida en la ecuación 1.68.

Para aliviar posibles tensiones entre algunos conjuntos de datos experimentales se permitió que estos flotaran dentro de una incerteza en la normalización para cada experimento. Es decir, además de los 16 parámetros que describen a las funciones de fragmentación y sus normalizaciones, se incluyeron un conjunto de parámetros que establece la normalización relativa entre los distintos experimentos. Este procedimiento se aplicó por primera vez en el análisis global realizado en [14].

2.3. Método Hessiano

El análisis global básicamente apunta a: 1) extraer las funciones de fragmentación, es decir, buscar la mejor estimación de los parámetros α_i , 2) predecir valores de observables físicos y 3) calcular las incertezas con que todas estas cantidades son conocidas. Es importante remarcar que este último punto es crucial en la extracción de funciones de fragmentación puesto que si no se cuenta con un cálculo correcto de errores, cualquier interpretación de los resultados de un ajustes o de una predicción de observables basados en las funciones de fragmentación resulta incompleto y posiblemente incorrecto.

Los procesos de extracción se efectúan a partir de la minimización de la función $\chi^2(\{\alpha_i\})$ efectiva que mide la bondad del ajuste de los datos experimentales. Considerando que los parámetros $\{\alpha_i\}$ son independientes entre sí:

$$\chi^2 = \sum_{n=1}^{N_{exp}} \omega_n \chi_n^2 \quad (2.8)$$

$$\chi_n^2 = \sum_{j=1}^{N_{data}^{(n)}} \omega_j \left(\frac{D_j - T_j(\{\alpha_i\})}{\delta D_j} \right)^2 \quad (2.9)$$

donde N_{exp} es el número de conjuntos de datos experimentales considerado, $N_{data}^{(n)}$ es el número total de puntos experimentales en cada uno de ellos y χ_n^2 nos da una medida de la bondad del ajuste en cada uno de estos conjuntos. En cada término se comparan los datos experimentales D_j con sus predicciones teóricas T_j que dependen del valor de los parámetros α_i , pesados por las incertezas estimadas δD_j . El factor especial ω_j puede valer 1 o 0 dependiendo de si se considera o descarta, por razones físicas, un dado conjunto de puntos experimentales.

El primer objetivo se consigue minimizando la función χ^2 (por ejemplo, a través de uso de la librería Minuit de Cern). Pero además se necesita conocer las incertezas con que son determinadas las funciones de fragmentación. Estudiar la propagación de errores a partir las variaciones a segundo orden de χ^2 , como función de los parámetros que describen las fragmentaciones (método Hessiano original o naive), se vuelve procedimiento inadecuado cuando existen correlaciones desconocidas entre ellos. Presentaremos entonces un método alternativo que mejora la fiabilidad de los cálculos.

En el método general[8][9] asumiremos que χ^2 puede ser aproximada por un desarrollo cuadrático en los parámetros α_i alrededor de su valor mínimo $\chi_0^2 = \chi^2(\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0)$:

$$\chi^2 = \chi_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n H_{ij} y_i y_j \quad (2.10)$$

$$H_{ij} = \left. \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_j} \right|_{y_k=0} \quad (2.11)$$

donde $y_i = \alpha_i - \alpha_i^0$ indica los desplazamientos de los parámetros respecto del mejor ajuste y H_{ij} son los elementos de la matriz Hessiana H (real de $n \times n$). Claramente se asume que H es una matriz definida positiva y naturalmente simétrica. Existen entonces un conjunto de n autovectores columna ortonormales \vec{V}_k , de componentes v_{ik} , cada uno con autovalor ϵ_k :

$$\sum_j H_{ij} v_{jk} = \epsilon_k v_{jk} \quad (2.12)$$

$$\sum_j v_{jk'} v_{jk} = \delta_{kk'} \quad (2.13)$$

Estos autovectores proveen un cambio de variables natural definido por:

$$y_i = \sum_k v_{ik} \sqrt{\frac{2}{\epsilon_k}} z_k \quad (2.14)$$

que permite reescribir la ecuación (2.10) de una manera muy conveniente para la estimación de incertezas ya que las nuevas variables z_i son verdaderamente independientes:

$$\Delta\chi^2 = \chi^2 - \chi_0^2 = \sum_j z_j^2 \quad (2.15)$$

Ésta es la fórmula maestra del método Hessiano modificado.

Es importante aclarar que la aplicación del método Hessiano para la estimación de incertezas de funciones de fragmentación de piones, requiere necesariamente rehacer el análisis global presentado en [14], ya que esta técnica es incompatible con la imposición de vínculos rígidos en los cálculos de minimización (por ejemplo, la inclusión de cotas superiores e inferiores en la constante de normalización de los experimentos o restricciones duras para mantener acotadas las funciones de fragmentación y lograr que éstas tiendan suavemente a cero cuando $z \rightarrow 1$). Estos vínculos abruptos fueron reemplazados por penalidades suaves (de crecimiento cuadrático) que evitan que los parámetros del ajuste se escapen de la región de interés o que las funciones de fragmentación adopten comportamientos no deseados.

2.4. Estimación de incertezas

Para estudiar las incertezas que introduce el conocimiento aproximado de los parámetros $\{\alpha_i\}$, debemos explorar las variaciones de la función χ^2 en la vecindad de su mínimo. Si los parámetros se desplazan de su mejor valor, la función χ^2 se incrementa en una cantidad $\Delta\chi^2$. Resulta natural definir un parámetro T que delimite la región de interés en la vecindad del mejor ajuste por:

$$\Delta\chi^2 = \sum_j z_j^2 \leq T^2 \quad (2.16)$$

Consideremos un observable físico \mathcal{O} que depende del valor de los parámetros $\{\alpha_i\}$, como puede ser la sección eficaz de un dado proceso. Siendo $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}(\{\alpha_i^0\})$ la mejor estimación de este observable, la variación respecto de este valor en el entorno definido por la ecuación anterior resulta:

$$\delta\mathcal{O} = \sum_k \frac{\partial\mathcal{O}}{\partial z_k} z_k \leq \sqrt{\sum_k \left(\frac{\partial\mathcal{O}}{\partial z_k}\right)^2} T \quad (2.17)$$

En la representación de autovectores de χ^2 es posible construir $2n$ autovectores \mathcal{S}_k^+ y \mathcal{S}_k^- ($k = 1..n$) definidos por:

$$z_j(\mathcal{S}_k^\pm) = \pm T \delta_{jk} \quad (2.18)$$

que representan desplazamientos positivos y negativos a lo largo de cada autovector en T . Vemos así que:

$$\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial z_k} = \frac{\mathcal{O}(\mathcal{S}_k^+) - \mathcal{O}(\mathcal{S}_k^-)}{2T} \quad (2.19)$$

Con este resultado y la ecuación (2.17), estimamos las incertezas en el observable \mathcal{O} como:

$$\Delta \mathcal{O} = \frac{1}{2} \sqrt{(\mathcal{O}(\mathcal{S}_k^+) - \mathcal{O}(\mathcal{S}_k^-))^2} \quad (2.20)$$

2.5. Multiplicadores de Lagrange

Es importante tener en cuenta que la propagación de incertezas en el método Hessiano se dedujo asumiendo que la aproximación a segundo orden de la función χ^2 y la aproximación a primer orden de los observables físicos son adecuadas (ver ecs. (2.10) y (2.19)). Debido a la complicada naturaleza del ajuste global, las desviaciones respecto de este comportamiento se vuelven inevitables, haciendo que se comprometa la precisión en la estimación de errores.

En este sentido, métodos como el de los multiplicadores de Lagrange, que permite calcular las incertezas en forma mucho más directa, son superiores. En particular, esta técnica consiste en minimizar el funcional:

$$\Psi(\{\alpha_i\}, \{\lambda_j\}) = \chi^2 + \sum_j \lambda_j \mathcal{O}_j(\{\alpha_i\}) \quad (2.21)$$

donde λ_j son los multiplicadores de Lagrange asociados a cada observable \mathcal{O}_j , cuyo valor, experimentalmente conocido, actúa como un vínculo en el proceso de ajuste. Si bien este método no depende del cumplimiento de aproximaciones, cuenta con una desventaja: es mucho más demandante en cuanto a recursos de cálculo para el ajuste global. Por el contrario, el método Hessiano ofrece una forma muy simple y sistemática de propagar incertezas para cualquier observable que depende de los parámetros físicos $\{\alpha_i\}$.

Capítulo 3

Resultados: incertezas en las distribuciones

3.1. Explorando el espacio de parámetros

Como se mencionó en las secciones 2.3 y 2.4, el método de la matriz Hessiana permite estudiar el comportamiento de la función χ^2 global cerca de su valor mínimo. Además, esta técnica ofrece la posibilidad de construir un conjunto alternativo de parámetros, asociado a los autovectores de la matriz Hessiana, que pueden utilizarse para estimar las incertezas de observables físicos. Sin embargo, al tratarse de una aproximación, es importante reconocer el rango de validez de la aproximación Hessiana y, por lo tanto, la consistencia de esta técnica para ser utilizada como una herramienta confiable en el estudio de la propagación de incertezas del análisis global. Es importante remarcar que ésta es la primera vez que este método se aplica en QCD perturbativa para estudiar la propagación de errores en funciones de fragmentación.

3.1.1. Correlaciones

Recordemos que el método propone una transformación lineal de los parámetros físicos $\{\alpha_i\}$ a un nuevo conjunto de parámetros $\{z_i\}$ para los que las superficies χ^2 constante resultan ser hipersferas (ver ecs. 2.15). La expresión matemática de la función χ^2 , minimizada en el análisis global, presupone que no existe ninguna correlación entre los parámetros utilizados para describir las fragmentaciones. Sin embargo, la naturaleza compleja del análisis global, en el que se lleva a cabo un cálculo de minimización sobre un espacio de parámetros de gran dimensión y teniendo en cuenta que a esto se

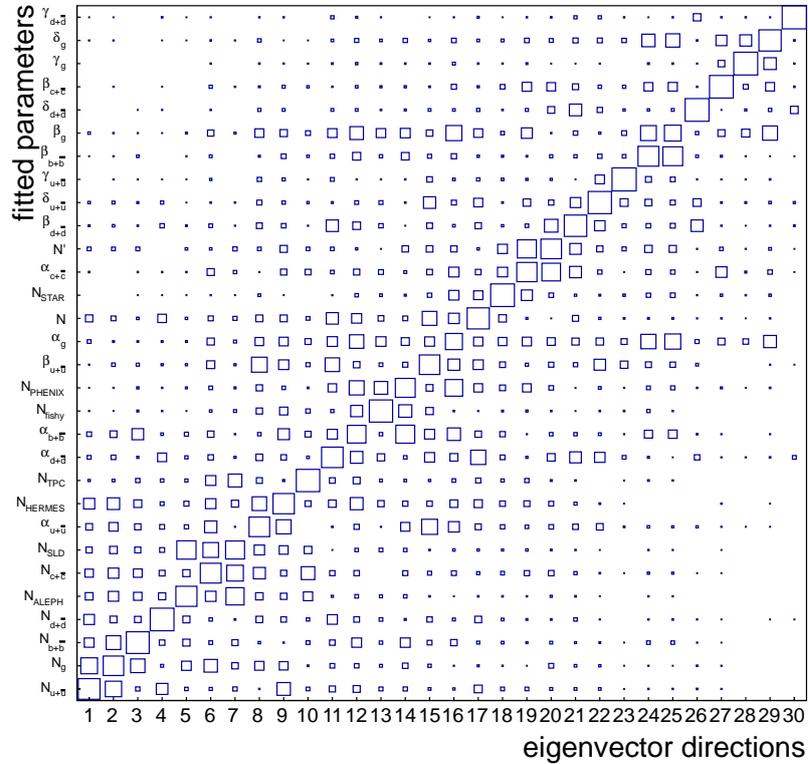


Figura 3.1: Correlaciones entre los parametros físicos $\{\alpha_i\}$ y las direcciones asociadas a los autovectores $\{z_i\}$. Cuanto mayor es el tamaño de la caja, mayor es la correlación.

le agrega el hecho de no contar con una cantidad suficiente de datos experimentales como para separar las contribuciones de los quarks de valencia de las de los del mar, resulta esperable encontrar correlaciones

Una manera indirecta de estudiar el nivel de correlación entre parámetros físicos es explorar la matriz de los coeficientes de la transformación lineal que los vincula a los autovectores z_i , calculada numéricamente en el análisis global. Esta matriz se encuentra representada gráficamente en la figura 3.1: cuanto mayor es el tamaño de la caja ubicada en la posición (i, j) , mayor es la correlación entre el autovector z_i y el parámetro α_j . En el caso en que los parámetros físicos fueran realmente independientes entre sí, se esperaría una correlación uno a uno con los direcciones de mayor crecimiento. La imagen 3.1, muestra que cada parámetro α_i está relacionado con más de un autovector. A pesar de esto, también puede notarse que los coeficientes

de mayor correlación se concentran en una recta a 45° , lo que evidencia un comportamiento cercado al óptimo.

El método Hessiano permite también establecer un orden jerárquico de los parámetros físicos. Los autovectores z_i están ordenados en forma decreciente de acuerdo a sus autovalores. Por lo tanto, la dirección indicada por z_1 es la mejor definida de todas ya que, al movernos a lo largo de ella, la función χ^2 sufre la mayor variación. En contraste, la dirección peor definida es la indicada por el autovector z_{30} , asociado al autovalor más pequeño. Los parámetros vinculados a las direcciones mejor definidas serán los que queden costreñidos más fuertemente por los datos experimentales. En la figura 3.1, es posible notar que éste es el caso de $N_{u+\bar{u}}$, N_g , $N_{b+\bar{b}}$, $N_{\bar{u}}$, N_{ALPEH} y $N_{c+\bar{c}}$. N_{ALPEH} es una de las constantes que se introdujo para normalizar los datos experimentales (ver sección 2.2), mientras que los N_i son las constantes de normalización que pesan la contribución de cada uno de las funciones de fragmentación en la conservación del impulso (ecs. 1.59). Las constantes de normalización de los sabores de quarks son prácticamente independientes entre sí, mientras que N_g parece tener un cierto grado de correlación con $N_{u+\bar{u}}$ y $N_{b+\bar{b}}$. En el centro del gráfico, se puede observar una región con bastante superposición en la que encontramos mezcladas las restantes normalizaciones de los experimentos.

En la región intermedia podemos ver un bloque con bastante superposición donde encontramos los parámetros $\alpha_{q+\bar{q}}$, y α_g que describen el comportamiento de las funciones de fragmentación a valores pequeños de la fracción de impulso z . Estos parámetros están mezclados, en el mismo bloque, con las constantes de normalización de los experimentos N_{SLD} , N_{HERMES} , N_{TPC} , N_{fishy} , N_{PHENIX} y N_{STAR} utilizadas para normalizar los datos experimentales que provienen de distintos experimentos N_{SLD} , N_{HERMES} , N_{TPC} , N_{fishy} , N_{PHENIX} y N_{STAR} , entremezcladas con los parámetros α_i que describen el comportamiento de las funciones de fragmentación a valores pequeños de la fracción de impulso z . Finalmente encontramos los parámetros que fueron costreñidos más débilmente por los datos experimentales. En este conjunto se encuentran mezclados los parámetros $\beta_{q+\bar{q}}$, β_g , que describen el comportamiento de las funciones de fragmentación para $z \rightarrow 1$, y los parámetros $\gamma_{q+\bar{q}}$, γ_g , $\delta_{q+\bar{q}}$ y δ_g que refinan el comportamiento para valores intermedios y grandes de la fracción de impulso z . Esto se debe a que, en el análisis global, una parte importante de la determinación de las funciones de fragmentación de gluones se realiza a través de la dependencia con la escala de energía, vía las ecuaciones de Altarelli - Parisi. De esta manera, resulta probable que las distribuciones de gluones estén relacionadas con las distribuciones más fuertes del análisis global.

De esta manera, la jerarquización de los parámetros revelada por la apro-

ximación Hessiana indica que el comportamiento de la funciones de fragmentación a valores de z pequeños es el mejor determinado en el análisis global. Sin duda, ésto se condice con el hecho de que la mayor cantidad de datos experimentales se encuentra concentrada en esta región de la fracción de momento (ver sección 2.2).

Debido a que la correlación entre los parámetros físicos es no nula, se vuelve necesario realizar un análisis del comportamiento a segundo orden de la función χ^2 en términos de los autovectores, y no de los parámetros originales. Así, se tiene certeza absoluta de que se está estudiando el comportamiento de χ^2 a lo largo de direcciones realmente independientes entre sí.

3.1.2. Comportamiento cuadrático

El método Hessiano supone que una dependencia parabólica de la función χ^2 con el nuevo conjunto de parámetros $\{z_i\}$. Resulta crucial estudiar el rango de validez de la aproximación cuadrática para conocer cuán robustos son los resultados de esta técnica en la estimación de errores de observables físicos. El carácter de la función χ^2 en el entorno del valor mínimo puede estudiarse observando directamente la forma de los perfiles a lo largo de las direcciones indicadas por los autovectores. En la figura 3.2 resulta posible comparar el comportamiento de χ^2 (línea sólida) con el comportamiento parabólico ideal supuesto en el método Hessiano (línea punteada). Cada uno de los perfiles se construyó variando un sólo parámetro z_i a la vez hasta que la variación χ^2 alcanzara un incremento $\Delta\chi^2 = T$. El parámetro de tolerancia T , se elige de manera estándar para que $\Delta\chi^2/\chi^2 = 2\%$. Esta elección surge de la comparación directa entre la estimación de errores y los datos experimentales, verificando que esta variación de la función χ^2 permita reproducir todos los conjuntos de datos experimentales que se asumen libres de errores sistemáticos. En otras palabras, la elección no responde a criterios estadísticos ni matemáticos, sino más bien a una justificación empírica a posteriori. Si se tuviese un conocimiento completo de las fuentes de error (provenientes del modelo teórico y de las correlaciones entre parámetros) y, además, éste estuviera correctamente cuantificado, se podría determinar cuál es el valor ideal del parámetro de tolerancia para el estudio de la propagación de incertezas. En la figura (3.2) puede verse que la aproximación cuadrática funciona razonablemente bien para la mayor parte de las direcciones de los autovectores, y la mayoría de las excepciones están identificadas con los autovalores más pequeños, es decir, con las direcciones peor definidas.

En la figura (??) se graficó, en la dirección de cada uno de los autovectores, el apartamiento de la función χ^2 del comportamiento cuadrático ideal ($z^2 - \Delta\chi^2$). En este gráfico se vuelve evidente que las dirección mejor definidas

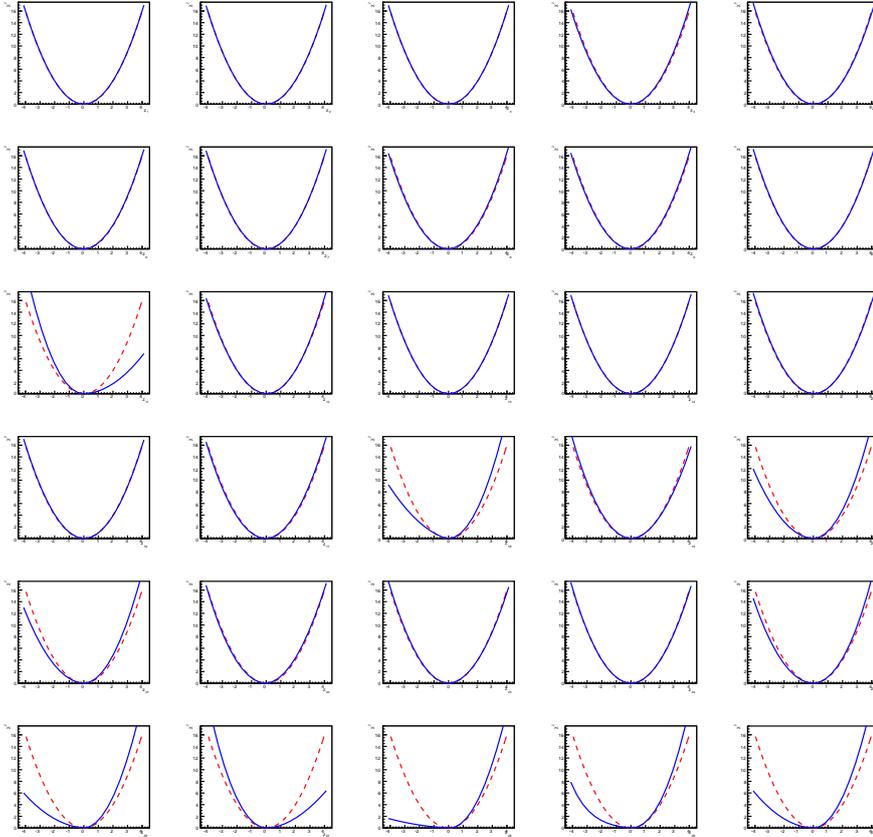


Figura 3.2: Perfiles de la variación $\Delta\chi^2$ respecto del valor mínimo χ_0^2 , a lo largo de cada uno de los autovectores $\{z\}$ de la matriz Hessiana.

son también las que menos se apartan del comportamiento cuadrático. Por otro lado, podemos observar que la aproximación cuadrática razonablemente buena para una tolerancia $T = 1$, aunque, como dijimos, existen argumentos para descartar el tratamiento con variaciones tan pequeñas de la función χ^2 . Los perfiles que más se apartan del comportamiento ideal corresponden a autovectores que general tiene una fuerte correlación con los parámetros físicos que describen el comportamiento de las función de fragmentación a para valores de z grande. En este conjunto están incluidos también las constantes de normalización N y N' que establecen la normalización relativa de las funciones de fragmentación $D_{u+\bar{u}}^{\pi^+}$ y $D_{d+\bar{d}}^{\pi^+}$ y, de los sabores individuales $D_s^{\pi^+}$ y $D_{\bar{u}}^{\pi^+}$, respectivamente.

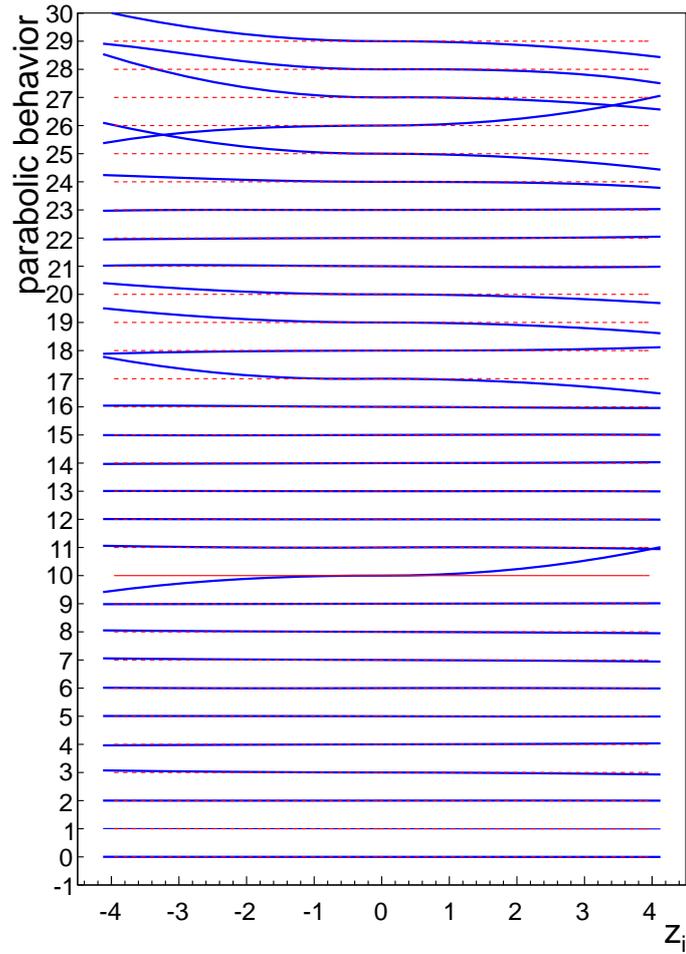


Figura 3.3: Desviaciones (línea sólida) del comportamiento parabólico esperado (línea punteada) para cada una de las $N_{\text{par}} = 30$ direcciones de los autovectores $\{z\}$ de la matriz Hessiana.

3.2. Incertezas

Como se mencionó en la sección 2.3, el análisis global permite determinar los parámetros que definen las funciones de fragmentación a la escala de energía inicial ($\mu_0 = 1 \text{ GeV}$). A otra escala de energía, las funciones se obtendrían vía las ecuaciones de Altarelli - Parisi. Ahora bien, resulta indispensable contar con un conocimiento completo de los errores y, su comportamiento en función de z y Q para cada sabor. Existen distintas técnicas para realizar la propagación de errores de funciones de fragmentación en un análisis global que permiten arribar a distintos resultados posibles, algunos más conservadores que otros. En las figuras 3.4 y 3.5 podemos observar las funciones de fragmentación a un estado final π^+ , de cada sabor, en función de la fracción z , para $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ y $Q^2 = M_Z^2$, junto a las bandas de error calculadas a través del método Hessiano. Están incluidos en el mismo gráfico los límites de las bandas de error calculadas por el método de Multiplicadores de Lagrange. Usando esta técnica, las bandas de error no pueden calcularse en forma directa, sino que sus estimaciones están relacionadas con la máxima variación del momento truncado [14]. En los gráficos se observar que el método de Multiplicadores de Lagrange sobrestima el ancho de las banda de error tanto para $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ como para $Q^2 = M_Z^2$. Si bien en esta escala de energía la diferencia, en términos del ancho de banda, se vuelve imperceptible, alcanza con chequear la discrepancia entre las curvas del error porcentual en función de z . Sin dudas, este es un aspecto negativo del tratamiento de errores usando Multiplicadores de Lagrange, puesto que sobrestimar las incertezas en el análisis global reduce capacidad predictiva de la teoría y limita la posibilidad de testear la calidad de las predicciones de observables fde QCD.

En el recuadro inferior de cada uno de los gráficos (ver fig. 3.4 y 3.5), está representado para cada función de fragmentación el error porcentual estimado usando ambas técnicas. Esta es una forma cuantitativa de ver las diferencias entre los resultados obtenidos a través de cada método y, en la escala de energía $Q^2 = M_Z^2$, nos permite notar que el método de Multiplicadores de Lagrange también sobrestima las incertezas.

3.2.1. Comportamiento en función de z

Un comportamiento característico, que se repite en cada gráfico, tanto para $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ y $Q^2 = M_Z^2$, e incluso para todos los valores intermedios de Q^2 , es el ensanchamiento de las bandas a medida que se reduce la fracción de impulso. Por el contrario, el error relativo tiene el comportamiento inverso: se mantiene casi constante a valores pequeños de z y crece abruptamente para

$z \rightarrow 1$.

Nuevamente, recordemos que la gran mayoría de los datos experimentales utilizados en el análisis global provienen de procesos SIA y, como se mencionó en la sección (2.2), éstos están concentrados para valores de la fracción de impulso más bien cercanos a 0. Por lo tanto, como las funciones de fragmentación son mejor determinadas en las regiones z coincidentes con los experimentos, resulta esperable que el error relativo se mantenga constante y pequeño. Sin embargo, esto no explica por qué las bandas de error estimados son más estrechas para z próximo a 1. Recordemos que las ecuaciones de Altarelli - Parisi son singulares en límite de $z \rightarrow 0$ y que por este motivo se descartaron, en todos los conjuntos de datos, aquellas mediciones correspondientes a $z < 0,05$. Una explicación plausible del ensanchamiento de las bandas de error es que reducir el valor de la fracción de impulso nos vamos adentrando cada vez más en el territorio de la especulación, es decir, en la zona de las extrapolaciones del análisis global y, por lo tanto, resulta razonable encontrar este comportamiento.

3.2.2. Comportamiento respecto de los sabores

A ambas escalas de energía, el error porcentual resulta menor para los sabores u y d respecto de los sabores s , c , b y de los gluones. En este trabajo sólo se estudiaron procesos de fragmentación a estados π^+ , por lo tanto las contribuciones de los sabores s , c , b y de gluones son únicamente radiativas. Entonces resulta razonable esperar suceda de esta manera para los sabores de mar. Sin embargo, las bandas de error de las contribuciones puramente radiativas son más anchas que las de los sabores de valencia sólo para valores pequeños de z (ver Tabla 3.1).

Las bandas de error del sabor u son más estrechas que las del sabor d , en el rango completo de z , tanto para $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ como para $Q^2 = M_Z^2$. La diferencia, menor 35 %, puede tener su origen en los datos de las colisiones protón - protón. Recordemos que el contenido de quarks u en protones es dos veces el de quarks d y por este motivo resultaría razonable pensar que estas mediciones determinadas mejor las funciones de fragmentación de un sabor que las del otro.

Las bandas de error de las funciones de fragmentación gluónicas a estados π^+ llaman la atención por ser más estrechas de lo esperado, incluso comparadas con las de los sabores livianos. El error porcentual, para z pequeño es menor que el determinado para el sabor s (la diferencia es menor al 30 % para $z < 0,5$) y mayor que el sabores u y d (aproximadamente entre 1,1 y 3,9 veces para $z < 0,5$). Es importante remarcar que los parámetros que definen las funciones de fragmentación de gluones están mayormente correlacionados

$Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$			
z	$\Delta D_{s+\bar{s}}^+ / \Delta D_{u+\bar{u}}^+$	$\Delta D_{c+\bar{c}}^+ / \Delta D_{u+\bar{u}}^+$	
0.050	1.720	3.997	
0.102	2.338	3.188	
0.501	1.701	2.573	
0.660	1.012	2.297	
0.829	0.260	1.010	
0.901	0.077	0.357	
$Q^2 = M_Z^2$			
z	$\Delta D_{s+\bar{s}}^+ / \Delta D_{u+\bar{u}}^+$	$\Delta D_{c+\bar{c}}^+ / \Delta D_{u+\bar{u}}^+$	$D_{b+\bar{b}}^+ / \Delta D_{u+\bar{u}}^+$
0.050	1.180	2.098	1.360
0.102	1.534	1.904	0.758
0.501	1.458	2.402	0.425
0.608	1.016	2.116	0.205
0.772	0.329	1.020	0.036
0.901	0.056	0.267	0.004

Cuadro 3.1: Banda de error Δ de los sabores de mar respecto del sabor u , en función de z para $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ y $Q^2 = M_Z^2$. El comportamiento respecto del sabor d resulta prácticamente igual

con las direcciones peor definidas en el análisis Hessiano (ver Figura 3.1). Por lo tanto, los resultados arrojados sobre estas funciones de fragmentación no son totalmente robustas.

3.2.3. Comportamiento con Q^2

En las imágenes 3.4 y 3.5 se puede nota que, a valores constantes de la fracción de impulso, en general, el error relativo se reduce con Q^2 para valores de z pequeño, mientras que para z tendiendo 1 se observa la tendencia contraria. Este comportamiento puede explicarse recurriendo a los conjuntos de datos experimentales. Como mencionamos más arriba, prácticamente la totalidad de los datos para valores de $z \rightarrow 0$ provienen de procesos SIA. Estos conjuntos de datos corresponden en su mayoría a la escala de energía $Q^2 \approx M_Z^2$. El resto del conjunto de datos experimentales se obtiene de procesos SIDIS y en colisiones protón - protón. Estos datos corresponden a valores de Q^2 más bien bajos (entre 1 y 500 GeV^2). Los datos experimentales provenientes de RHIC corresponden a valores promedio $\langle z \rangle \gtrsim 0,5$. Las mediciones provenientes de HERMES, si bien cubren un rango más amplio de valores de

z , la cantidad de datos a Q^2 fijo es muy pequeña. Debido a que las funciones de fragmentación resultan mejor determinadas en las escalas de energía próximas a las de los experimentos, es esperable que para valores pequeños de z el error relativo se reduzca con Q^2 , mientras que para valores grandes de z ocurra lo contrario.

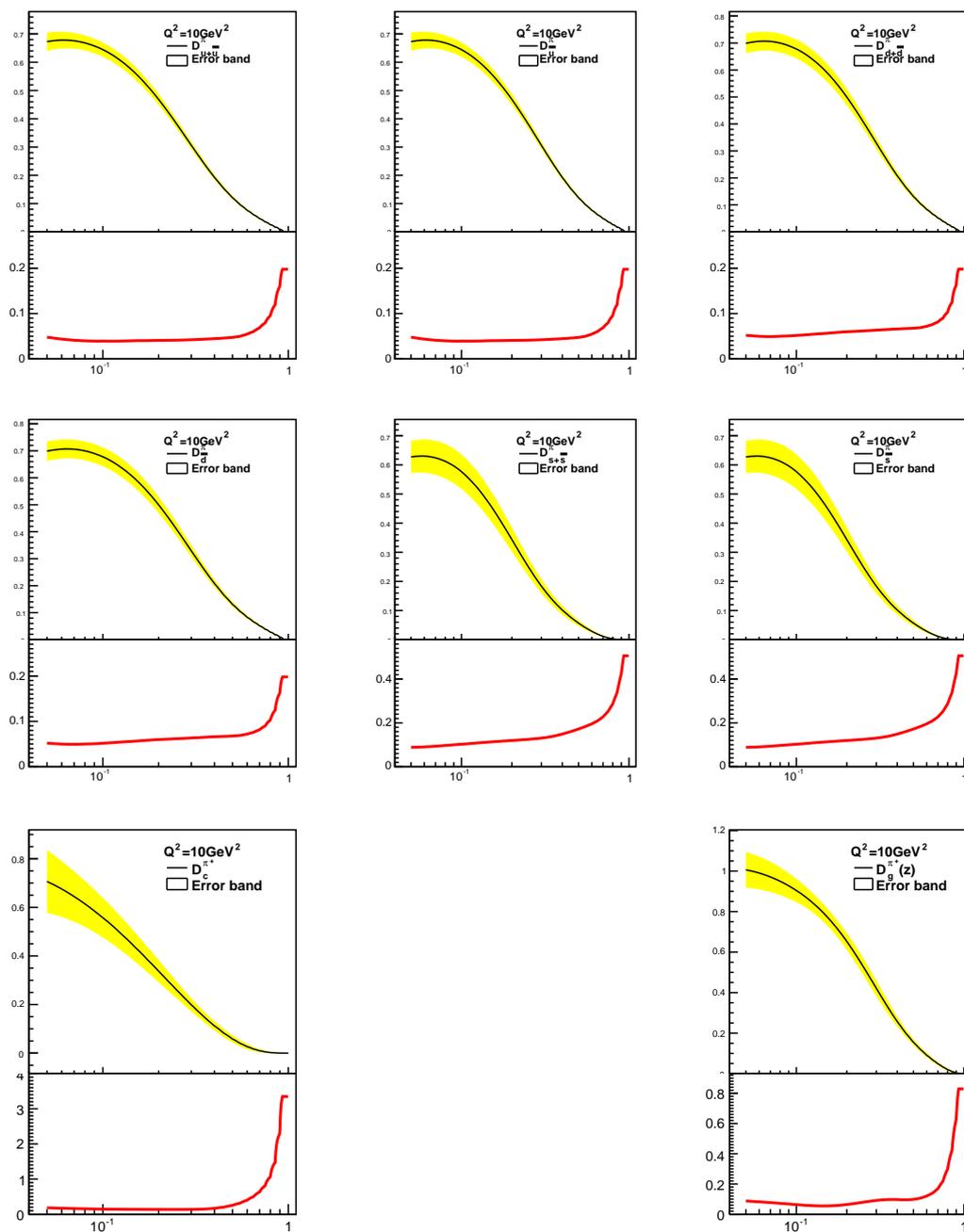


Figura 3.4: Funciones de fragmentación $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$

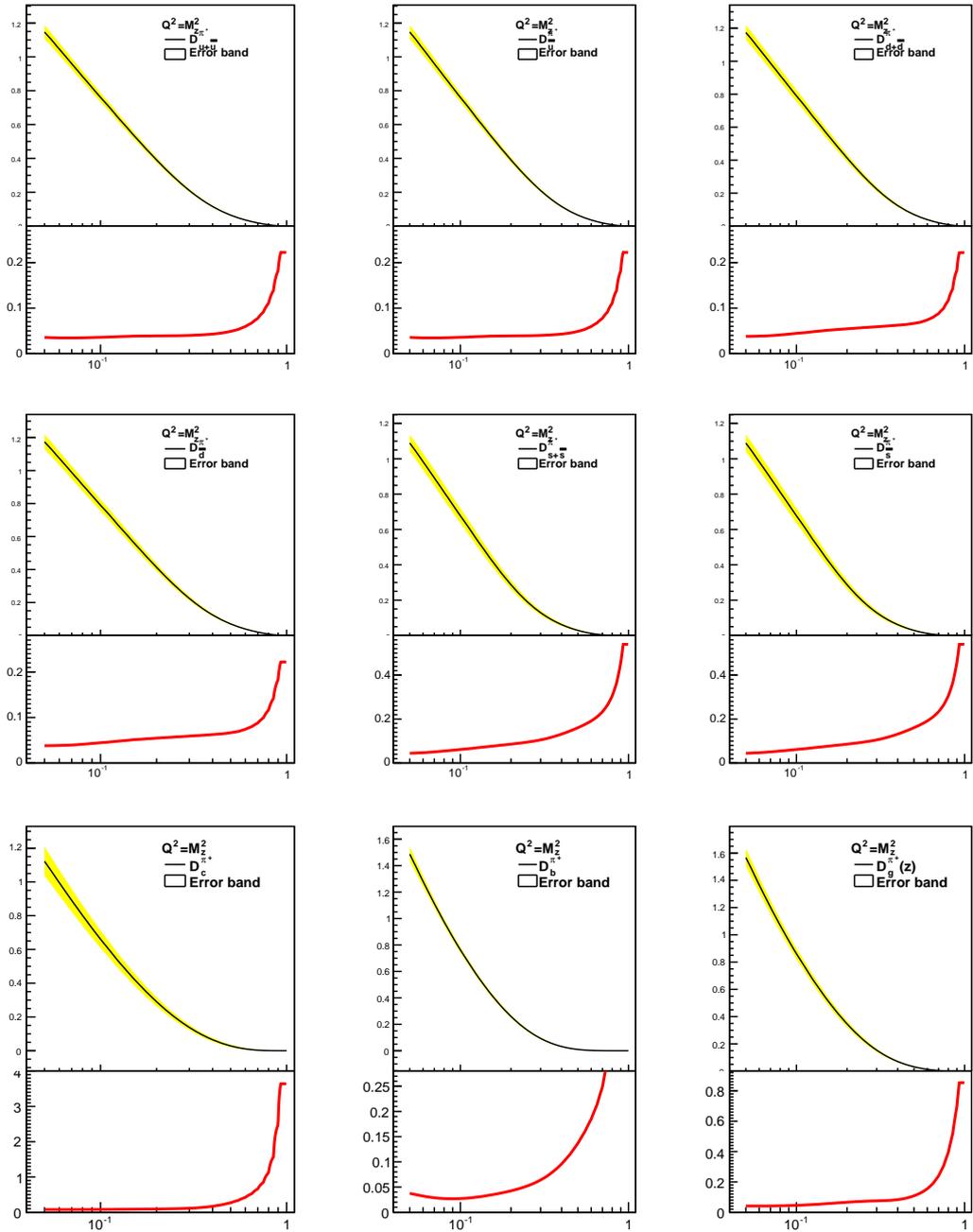


Figura 3.5: Funciones de fragmentación $Q^2 = M_Z^2$

Capítulo 4

Conclusiones

Las funciones de fragmentación constituyen una de las herramientas más importantes para poder realizar una descripción exhaustiva de los procesos de dispersión en los que puede aplicarse QCD perturbativa, siendo un ingrediente necesario en el cálculo completo de observables físicos asociados a procesos con hadrones participantes en el estado final. Estas funciones permiten realizar una descripción cuantitativa de las hadronizaciones de quarks y gluones en cualquier proceso de producción de hadrones. Las funciones de fragmentación no pueden calcularse a partir de primeros principios aplicando teoría de perturbaciones, sino que deben determinarse minimizando la función χ^2 , definida en la sección 2.3. Este procedimiento, llamado análisis global de QCD, permite ajustar los parámetros $\{\alpha_i\}$ que determinan las funciones de fragmentación en función de la fracción de impulsos z para una determinada escala de energía Q_0^2 , llamada inicial. Un punto fundamental del análisis global consiste en la estimación de los errores sistemáticos que se arrastran al cálculo de cualquier observable que dependa de los parámetros ajustados. Se implementó un método sistemático que permitió realizar, de manera casi automática, la propagación de incertezas originadas en el análisis global. El poder de cálculo de esta técnica depende de la precisión con que puede aproximarse la función χ^2 , en el entorno de su valor mínimo, por un desarrollo a segundo orden en los parámetros $\{\alpha_i\}$. El elemento fundamental de esta aproximación es la matriz Hessiana de las derivadas segundas de χ^2 . Diagonalizando numéricamente esta matriz, se construyó un conjunto de nuevos parámetros $\{z_i\}$, asociado a sus autovectores. El método Hessiano supone que la dependencia de χ^2 con cada uno de los parámetros z_i , manteniendo los restantes fijos, es puramente cuadrática. Pudo comprobarse que esta hipótesis es satisfecha en la mayoría de los casos. Se verificó que en general el apartamiento del comportamiento cuadrático se observa cuando hace variar los parámetros z_i asociados a los autovalores más pequeños. Estos parámetros

corresponden a las direcciones más débilmente determinadas en el cálculo numérico de la diagonalización del Hessiano.

Los parámetros $\{z_i\}$ permitieron además estudiar las correlaciones entre los parámetros físicos. En el análisis global, más precisamente en la definición de la función χ^2 , se supuso que los parámetros $\{\alpha_i\}$ eran independientes. Gracias a la aproximación Hessiana modificada se pudo concluir que ésto no es realmente así. Sin embargo, aunque existen correlaciones no nulas entre parámetros físicos, el método permitió observar en forma explícita que el comportamiento real es bastante cercano al ideal. También fue posible establecer una jerarquización de los parámetros $\{\alpha_i\}$. Se observó que los parámetros mejor determinados en el análisis global, es decir, los más fuertemente correlacionados con las direcciones mejor definidas en el cálculo de la diagonalización, son las normalizaciones de las funciones de fragmentación y los parámetros que describen su comportamiento a z pequeño. En el otro extremo, encontramos aquellos que describe las fragmentaciones para $z \rightarrow 1$. Sin dudas ésto está relacionado con que se cuenta con un número reducido de datos experimentales en esta región.

Finalmente se estimaron la bandas de incerteza de las funciones de fragmentación y los errores porcentuales en función de z para $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ y $Q^2 = M_Z^2$. Se observó que en el caso de los sabores de mar, para piones s , c y b , y los gluones, cuyas contribuciones a la fragmentación sólo puede ser radiativas, el error porcentual estimado resultó mayor al correspondiente a los sabores de valencia u y d . En términos del ancho de la bandas de error los resultados dependen del valor de z : a valores de z pequeños las bandas de incerteza de los sabores de valencia son más estrechas que las de los sabores de mar, mientras que para $z \rightarrow 1$ se observó el comportamiento contrario. Ésto no supone ninguna contradicción puesto que la mayoría de los datos utilizados en el análisis global provienen de procesos SIA y se concentran en la región $z \ll 1$, es decir, la determinación de las funciones de fragmentación y de la bandas de incerteza es mucho más robusta allí. Además, se compararon los cálculos de errores para los sabores de valencia entre sí. Se encontró que las bandas de incerteza asociadas al sabor u son más estrechas que las bandas del sabor d . La diferencia, menor al 35 %, muy probablemente esté relacionado con los datos proveniente de colisiones protón - protón utilizados en el análisis global, debido a que el contenido de quarks u de los protones es el doble del contenido de quarks d . Finalmente se observó que bandas de incerteza y errores porcentuales resultaron ser llamativamente pequeños en el caso de las funciones de fragmentación de gluones, aún comparadas con los sabores u , d y s . Sin embargo, también se encontró que la mayoría de los parámetros que describen las fragmentaciones de gluones están correlacionados más fuertemente con las direcciones peor definidas en los cálculos del método Hessiano.

Por este motivo, los resultados obtenidos no son totalmente robustos.

El comportamiento de las banda de incerteza y de los errores relativos en función de z también fue estudiado. Se observó por un lado que las bandas de error tienden a ensancharse para valores de z pequeños y medianos, mientras que el error relativo se mantiene prácticamente constante y crece violentamente para valores de z próximos a 1. La justificación de este comportamiento se encuentra nuevamente en los conjuntos de datos experimentales utilizados. Una explicación plausible del ensanchamiento de las bandas está relacionado con el comportamiento singular de las ecuaciones de Altarelli - Parisi en el límite de $z \rightarrow 0$. Esta característica de las ecuaciones de evolución compromete la aplicabilidad de las función de fragmentación en este rango de valores de z y por este motivo se descartaron todos los datos experimentales de SIA correspondientes a valores de $z < 0,05$. De esta manera puede concluirse que, en el límite de z pequeño, los resultados obtenidos se identifican cada vez más con las extrapolaciones de análisis global.

Otro aspecto estudiado de la propagación de incertezas es el comportamiento de las bandas y de los errores relativos en función de Q^2 . Para valores de $z \ll 1$, el error porcentual tiende a reducirse a medida que se aproxima la escala de energía $Q^2 = M_Z^2$, mientras que para valores de $z \rightarrow 1$ se observó el comportamiento contrario. Debemos remarcar aquí que la dependencia de las funciones de fragmentación con la fracción de impulso z resulta mejor determinada para valores de Q^2 cercanos a los de los experimentos. Como se mencionó más arriba, la mayoría de los datos para valores de $z \rightarrow 0$ provienen de mediciones de procesos SIA y prácticamente todos ellos corresponden a $Q^2 = M_Z^2$, mientras que en la región de valores de z próximos a 1, se cuenta con los datos de colisiones protón - protón correspondientes a escalas de energía menores a $20 GeV$ (las mediciones de procesos SIDIS cubren un espectro de valores de z más amplio para $Q^2 < 10 GeV^2$, lamentablemente la cantidad de datos con que se cuenta es reducida). Por estas razones, se concluyó que el comportamiento con Q^2 de las incertezas determinadas por el método Hessiano, a valores de z fijos, es el esperado.

Los resultados obtenidos con la técnica de la matriz Hessiana fueron contrastados con resultados de la propagación de incertezas obtenidos a partir del uso de Multiplicadores de Lagrange. Este método, a diferencia del utilizado en este trabajo, determina las bandas de error y la incerteza relativa de forma indirecta. Pudo constatarse que el método de Multiplicadores de Lagrange sobrestima la bandas de incerteza: en general el error porcentual determinado con esta técnica resulta ser dos veces más grande que el obtenido a través de método Hessiano mejorado. Este sin dudas es uno de los resultados más relevante de la aproximación Hessiana modificada puesto que, como se explicó en el capítulo anterior, una sobrestimación de la propagación

de errores reduce la capacidad predictiva de los cálculos que dependan de las funciones de fragmentación determinadas en el análisis global.

Puede concluirse que contar con una mayor cantidad de datos experimentales, especialmente para valores de z próximos a 1, mejoraría tanto la determinación del comportamiento de las funciones de fragmentación como el tratamiento de incertezas. Sin embargo, los resultados obtenidos de la aplicación del método Hessiano en la propagación de errores del análisis global de piones fueron realmente positivos, e incluso mejores de lo esperado. Dada la simplicidad y la sistematicidad de esta técnica para el tratamiento de errores sistemáticos, se planea aplicarlo al cálculos de incertezas de observables físicos que dependan del conocimiento de las funciones de fragmentación determinadas y, posteriormente, a análisis globales para funciones de fragmentación de kaones y densidades de partones nucleares.

Bibliografía

- [1] F. Close, *An introduction to Quarks and Partons*, Academic Press, New York (1979).
- [2] F. Halzen, A. D. Martin, *Quarks and Leptons: An introductory Course in Modern Particle Physics*, John Wiley & Sons (1984).
- [3] T. Muta, *Foundations of quantum chromodynamics*, World Scientific Publishing CO. Pte. Ltd (1987).
- [4] C. A. García Canal, R. Sassot, *Int. J. Mod. Phys.* **A15** (2000) 3587-3633.
- [5] A. J. Buras, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 199 (1980).
- [6] G. Altarelli, R.K. Ellis, G. Martinelli and S.Y. Pi, *Nucl. Phys.* **B160**, 301 (1979); P. Nason and B. Webber, *Nucl. Phys.* **B421**, 473 (1994); **B480**, 755(E) (1996).
- [7] W. Furmanski and R. Petronzio, *Z. Phys.* **C11**, 293 (1982).
- [8] D Stump, J Pumplin, R Brock, D Casey, J Huston, J Kalk, H L Lai, W K Tung, *Phys. Rev.* **D65**, 014011 (2001).
- [9] J. Pumplin, D. Stump, R. Brock, D. Casey, J. Huston, J. Kalk, H. L. Lai, and W. K. Tung, *Phys. Rev.* **D65**, 014013 (2001).
- [10] S. Kretzer, *Phys. Rev.* **D62**, 054001 (2000)
- [11] B.A. Kniehl, G. Kramer and B. Pötter, *Nucl. Phys.* **B582**, 514 (2000)
- [12] S. Albino, B.A. Kniehl and G. Kramer, *Nucl. Phys.* **B725**, 181 (2005); **B734**, 50 (2006).
- [13] M. Hirai, S. Kumano, T.-H. Nagai and K. Sudoh, hep-ph/0702250.
- [14] D. De Florian, R. Sassot and M Stratmann, *Phys. Rev.* **D75**, 114010 (2007).

- [15] ALPEH Collaboration, D. Buskulic *et al.*, *Z. Phys.* **C66**, 355 (1995).
- [16] DELPHI Collaboration, P. Abreu *et al.*, *Eur. Phys. J.* **C5**, 585, (1998).
- [17] OPAL Collaboration, R. Akers *et al.*, *Zeit. Phys.* **C63**, 181 (1994)
- [18] OPAL Collaboration, G. Abbiendi *et al.*, *Eur. Phys. J.* **C16**, 407 (2000)
- [19] TP Collaboration, H. Aihara *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1263 (1998); *Phys. Lett.* **B184**, 299 (1987); X.-Q. Lu, Ph.D. thesis, John Hopkins University, UMI-87-07273, 1986.
- [20] SLD Collaboration, K. Abe *et al.*, *Phys. Rev.* **D59**, 052001 (1999).
- [21] TASSO Collaboration, W. Braunschweig *et al.*, *Zeit. Phys.* **C42**, 189 (1989).
- [22] A. Hillenbrand (HERMES Collaboration), “Measurement and Simulation of the Fragmentation Process at HERMES”, Ph.D. thesis, Erlangen Univ., Germany, September 2005; private communications.
- [23] PHENIX Collaboration, S.S. Adler *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 241803 (2003); K. Barish (PHENIX Collaboration), “The PHENIX Spin Program: Recent Results and Future Prospects”, talk presented at SPIN 2006, Kyoto, Japan.
- [24] STAR Collaboration, J. Adams *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 152302 (2006)
- [25] BRAHMS Collaboration, I. Arsene *et al.*, hep-ex/0701041
- [26] STAR Collaboration, B.I. Abelev *et al.*, nucl-ex/0607033.