

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Física

AdS/CFT y Métodos Holográficos a Tiempo Real

Trabajo de Diploma para obtener el título de Licenciado en Física

Pedro Jorge Martinez



Director: Marcelo Botta Cantcheff
Asesor Académico: Guillermo Silva
Lugar de trabajo: IFLP, Dto. de Física, Fac. Cs. Exactas, UNLP

La Plata, Noviembre de 2014

Resumen

Se estudió la prescripción de Skenderis y van Rees para el cálculo de funciones de correlación de operadores locales en teorías de campos conformes mediante el uso de métodos holográficos dentro del marco de la dualidad AdS/CFT. Se desea comprobar si la inserción de fuentes sobre las regiones de signatura euclídea de la teoría de gravedad en esta prescripción se corresponden con estados distintos del fundamental o para perturbaciones del equilibrio térmico en la teoría de campos dual. Esta hipótesis se confirma para todas las geometrías estudiadas en el trabajo, aunque los estados generados por este mecanismo pertenecen a un subconjunto reducido de todos los posibles estados de una teoría de campos conforme.

*“La búsqueda apasionada de lo inútil es absolutamente
esencial para la existencia de la Humanidad.
Nosotros somos los poetas del saber.”*

Jean-Robert Pitte,
Presidente de la *Université Paris-Sorbonne* del 2003 al 2008

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a mi vieja y a mi viejo, Cristina y Jorge, por ser una guía fundamental en mi vida y un ejemplo de esfuerzo, vocación, constancia y sacrificio. Nada de esto hubiese sido posible sin ellos al lado mío, como estuvieron siempre y como están hoy. De la misma forma quiero expresar una inmensa gratitud a mi familia, pero también al gran número de personas que sin ser mi familia me abrieron las puertas como si lo fueran.

Quiero agradecer también a mis amigos y compañeros de camino con quien compartí toda la primaria y secundaria, a los que se colaron un poco más tarde y llegaron para quedarse y también a los que me acompañaron en la facultad. Gracias por el humor, las experiencias vividas y por hacerme crecer.

Gracias a Ágata, que hizo de este último año y medio algo hermoso.

No puedo dejar de agradecer el apoyo del cuerpo docente y directivo de la Institución de Cultura Itálica de La Plata, que además de formarme en el sentido académico han sabido integrarse en mi vida como un segundo hogar.

Por último, quiero agradecer a los docentes e investigadores del Departamento de Física de la Universidad Nacional de La Plata que brindan lo mejor de sí mismos a esta Honorable Casa de Estudios. Entre ellos, quiero agradecer especialmente a mi Director Marcelo Botta Cantcheff y mi Asesor Académico Guillermo Silva por la paciencia y el apoyo al realizar este Trabajo de Diploma.

ÍNDICE GENERAL

1..	<i>Introducción</i>	6
2..	<i>Aspectos Básicos de la Dualidad AdS/CFT</i>	8
2.1.	Espacios AdS y H	8
2.1.1.	Espacios AdS	8
2.1.2.	Espacios Hiperbólicos H	14
2.2.	Propiedades Relevantes de Teorías de Campos	18
2.2.1.	Caminos a Tiempo Complejo y Correladores de una Teoría de Campos	18
2.2.2.	Formalismo de Schwinger-Keldysh	19
2.2.3.	Propagadores de una CFT	26
2.3.	Dualidad AdS/CFT	28
3..	<i>Prescripciones y Aplicaciones</i>	32
3.1.	Prescripción GKPW	32
3.2.	Prescripción de Skenderis y van Rees	36
3.3.	Aplicaciones	41
3.3.1.	Formalismo In-Out	42
3.3.2.	Formalismo In-In	55
3.3.3.	Formalismo Térmico	59
3.3.4.	AdS en Coordenadas de Poincaré	61
4..	<i>Resumen, Conclusiones y Visión a Futuro</i>	65
	<i>Apéndice</i>	66
A..	<i>Campo Escalar Masivo sobre H en Coordenadas Globales</i>	67
B..	<i>Cambio de Coordenadas para el Propagador de $\mathcal{O}$</i>	68

1. INTRODUCCIÓN

La dualidad AdS/CFT [1] propone la equivalencia entre ciertas teorías de campos conforme (*CFT*) en d dimensiones y el estudio de teorías de gravedad en espacios Anti-de Sitter (*AdS*) en $d + 1$ dimensiones. En particular, relaciona el límite fuertemente acoplado de la teoría de campos con el límite clásico de la teoría de super-gravedad y viceversa. En la presente tesis se calcularán observables de la teoría conforme en el límite fuertemente acoplado, mediante el estudio de soluciones clásicas en la teoría de gravedad dual.

El cálculo de las soluciones clásicas para los campos en signatura lorentziana requiere de la imposición de condiciones iniciales, que no tienen una interpretación clara en el marco de la dualidad. Una forma de sortear este problema es trabajar en signatura euclídea donde dichas condiciones iniciales no son necesarias, para luego extrapolar los resultados a signatura lorentziana mediante una rotación de Wick. Esta prescripción se conoce en la bibliografía como GKPW [2, 3].

Este método presenta algunos problemas desde el punto de vista conceptual dado que la aplicación de la conjetura no debiera requerir un cambio de signatura. Además, la aplicación de la prescripción GKPW no siempre es posible. A temperatura no nula, por ejemplo, el cambio de signatura requiere la prolongación analítica de una suma sobre frecuencias de Matsubara, que solo pueden determinarse de forma aproximada en el límite de altas o bajas temperaturas. La prescripción falla dado que en general no es posible prolongar analíticamente funciones de las cuales solo se tiene una expansión asintótica.

El uso de signatura euclídea puede pensarse como considerar un tiempo imaginario. Por este motivo, las formulaciones para el cálculo de funciones de correlación usando la dualidad AdS/CFT se dividen en *Prescripciones a Tiempo Real* o *Imaginario* según se trabaje con una métrica lorentziana o euclídea respectivamente.

Varios autores han propuesto prescripciones a tiempo real. Por ejemplo, en los trabajos de Balasubramanian, et. al. [4, 5], se estudian correcciones cuánticas a las soluciones clásicas de los campos en la teoría gravitatoria para obtener las condiciones iniciales necesarias, mientras que en la prescripción de Son y Herzog [6] se propone imponer las condiciones iniciales extrayendo información de regiones de la teoría de gravedad que no tienen una interpretación dentro de la teoría de campos dual. En este trabajo se usará la prescripción de Skenderis y van Rees [7, 8] para construir espacio-tiempos que sean duales a una teoría de campos conforme uniendo regiones de signatura lorentziana y euclídea, de forma similar a como se describe en el trabajo de Hartle y Hawking [9]. Se prefiere esta última prescripción dado que no requiere del cálculo (en general dificultoso) de correcciones cuánticas a las soluciones clásicas de los campos ni recurre a información de regiones de la teoría gravitatoria que no tengan una interpretación dual en la teoría de campos.

En esta tesis se estudiará en profundidad la propuesta de Skenderis y van Rees y sus fundamentos. El resultado más importante del trabajo es el cálculo de valores de expectación para estados iniciales y finales correspondientes a deformaciones del estado de equilibrio en varios formalismos de la teoría de campos, todavía no discutido en profundidad en la literatura.

El Capítulo 2 presenta los conceptos de gravitación y teoría de campos relevantes en el cálculo de

funciones de correlación de operadores locales usando la dualidad AdS/CFT y necesarios para comprender la formulación de la prescripción de Skenderis y van Rees y las aplicaciones que se presentan en este trabajo.

En el Capítulo 3 primero se describe un ejemplo de aplicación de la prescripción GKPW. Luego, se estudia en detalle la prescripción de Skenderis y van Rees y se presentan 3 ejemplos de aplicación de la misma. Se calculan valores de expectación de operadores locales dentro de la teoría de campos para estados distintos del vacío, para los formalismos In-Out e In-In, o fuera del equilibrio en el formalismo Térmico. Para el caso de estados fundamentales, se recuperan los resultados obtenidos en [7, 8].

El presente trabajo parece indicar que los estados a los que se puede acceder mediante esta prescripción efectivamente corresponden a estados distintos del fundamenta, aunque son un subconjunto menor al de todos los estados posibles dentro de la teoría de campos. Restringido a estos estados, sin embargo, el método presentado en este trabajo parece indicado para el cálculo de valores de expectación de cualquier operador local de una teoría de campos mediante la dualidad AdS/CFT.

2. ASPECTOS BÁSICOS DE LA DUALIDAD ADS/CFT

Para poder aplicar las prescripciones para el cálculo de funciones de correlación primero conviene repasar algunos conceptos de gravitación y de teorías de campos y simetría conforme. Primero se estudian la métrica y topología de los espacios AdS y H , que se usarán como fondo para las teorías de gravedad descritas en este trabajo. Luego se describe la forma en que se construyen teorías de campos con tiempos complejos para obtener funciones de correlación en el vacío, en estados excitados e incluso fuera del equilibrio térmico conocidos como formalismos *In-Out*, *In-In* y *Térmico* respectivamente. También se presentan la correspondencia estado-operador y las restricciones que imponen las simetrías de una teoría conforme sobre las funciones de correlación de un operador de la teoría. Ambas herramientas se usarán para corroborar e interpretar los resultados del trabajo. Finalmente se presenta la dualidad AdS/CFT y la relación que permite conectar los correladores de las teorías gravitatorias y de campos conforme.

2.1. Espacios AdS y H

2.1.1. Espacios AdS

El espacio Anti-de Sitter (AdS), es un ejemplo de un espacio-tiempo maximalmente simétrico y de constante cosmológica $\Lambda < 0$. En un espacio maximalmente simétrico general, el tensor de Riemann es constante y está determinado por la métrica como

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{2\Lambda}{d(d-1)}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) \quad (2.1)$$

donde d es la dimensión del espacio. Localmente, un espacio maximalmente simétrico de dimensión d y signatura dada, queda completamente determinado por el signo de $\mathcal{R}$. De esta forma, los espacios quedan clasificados en 3: $\mathcal{R} > 0$, $\mathcal{R} = 0$ y $\mathcal{R} < 0$. En signatura euclídea, estos espacios corresponden respectivamente a la esfera d -dimensional S^d , a hiper-superficies $\mathbb{R}^d$ y a espacios hiperbólicos H_d . En métrica Lorentziana estos espacios se denominan también respectivamente de Sitter dS_d , Minkowski $\mathbb{M}^d$ y anti-de Sitter AdS_d .

La acción que describe un espacio AdS es

$$S = \frac{1}{16\pi G_d} \int d^d x \sqrt{-g}(\mathcal{R} - 2\Lambda),$$

donde $\Lambda < 0$.

A continuación se presenta una forma alternativa de definir el espacio AdS_d , que permite observar más claramente la topología del mismo. Se presentan también las coordenadas que se usarán en el Capítulo 3 para estudiar las prescripciones a tiempo real y se discute la estructura conforme del espacio.

AdS como Superficie Cuádrica

Se puede definir AdS_d como una superficie cuádrica embebida en una métrica plana $d+1$ dimensional. Para eso, se considera el vínculo

$$\sum_{i=1}^{d-1} X_i^2 - U^2 - V^2 = -R_0^2, \quad (2.2)$$

sobre la métrica $\mathbb{R}^{d-1,2}$

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{d-1} dX_i^2 - dU^2 - dV^2. \quad (2.3)$$

En la Fig. 2.1 se muestra el hiperboloide (2.2) para el caso de AdS_2 , embebido en el espacio $\mathbb{R}^{1,2}$. Antes de proponer coordenadas para este espacio, se nota que:

- Fijar R_0^2 en (2.2) equivale a fijar Λ en (2.1). Se puede demostrar que

$$R_0^2 = -\frac{(d-2)(d-1)}{2\Lambda}. \quad (2.4)$$

Las propiedades topológicas están determinadas solamente por el signo de R_0^2 . Luego, por simplicidad, se tomará $R_0^2 = 1$ ($\Lambda < 0$) para los espacios AdS .

- La topología del hiperboloide es isomorfa a $\mathbb{R}^{d-1} \times S^1$, donde S^1 está asociada a la dirección temporal.
- Dado que AdS_d es un espacio-tiempo maximalmente simétrico, posee $\frac{d(d+1)}{2}$ vectores de Killing ξ^μ . Estos pueden obtenerse a partir de

$$\nabla(\alpha\xi_\beta) = 0. \quad (2.5)$$

Los vectores así contruidos para AdS_d generan el grupo de isometrías $SO(d-1, 2)$.

Coordenadas

Para los objetivos del Capítulo 3 serán relevantes 2 parametrizaciones de este espacio: las coordenadas *Globales* y las de *Poincaré*.

Globales

Se parametriza al hiperboloide (2.2) como

$$\begin{aligned} U &= \cosh(\rho) \cos(t) \\ V &= \cosh(\rho) \sin(t) \\ X^i &= \sinh(\rho) \Omega_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{d-1} \Omega_i^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

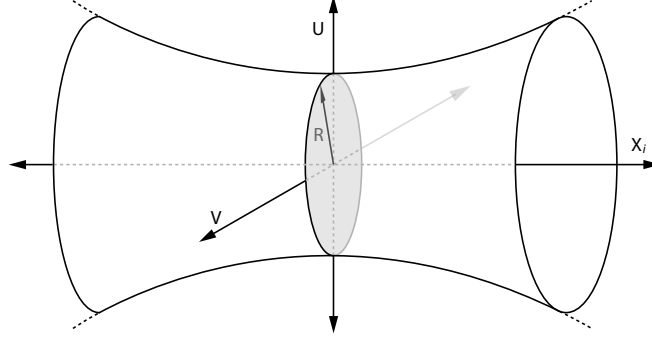


Fig. 2.1: Se muestra el espacio AdS_2 como una superficie embebida en $\mathbb{R}^{1,2}$. En una dimensión d general las coordenadas U y V son temporales en la métrica, mientras que las X_i son espaciales.

donde Ω_i representan a S^{d-2} . Expresando la métrica (2.3) en función de estas coordenadas¹ resulta

$$ds^2 = -\cosh^2(\rho)dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2(\rho)d\Omega_{d-2}^2, \quad (2.7)$$

donde $d\Omega_{d-2}^2$ es la métrica de S^{d-2} . Tomando $0 \leq \rho < \infty$ y $0 \leq t < 2\pi$ (además del rango clásico de las variables angulares de S^{d-2}), se cubre una vez el hiperboloide completo.

La coordenada temporal describe una variedad isomorfa a S^1 . Para evitar tener una variable temporal con un dominio finito, se toma la variedad de *cubrimiento universal* de AdS que permite tomar $-\infty < t < \infty$. En la Fig. 2.2 puede verse de forma ilustrativa este proceso.

La métrica con la que trabajan Skenderis y van Rees es

$$ds^2 = -(1+r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{(1+r^2)} + r^2 d\Omega_{d-2}^2, \quad (2.8)$$

que puede obtenerse de (2.7) definiendo una nueva variable radial $r = \sinh(\rho)$, donde $r \in [0, \infty)$. Se denomina *borde conforme* a la región del espacio definida por el límite $\rho \rightarrow \infty$, donde la métrica es divergente. La métrica también es divergente en los límites $t \rightarrow \pm\infty$. La unión de todas las regiones donde la métrica (2.8) es divergente se las denomina *frontera* de AdS .

Poincaré

Otra parametrización posible para (2.2) es

¹ Por ejemplo, para S^2 las coordenadas son $\Omega_1 = \cos \theta$ y $\Omega_2 = \sin \theta$.

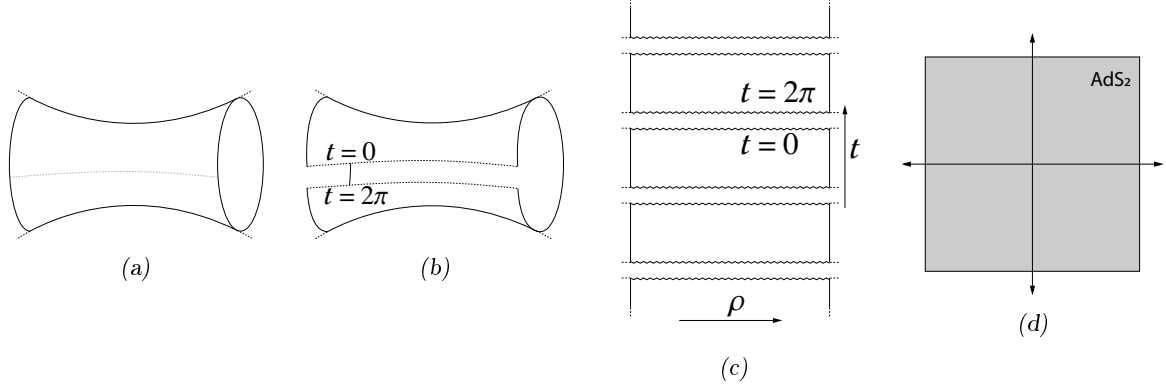


Fig. 2.2: Procedimiento para deformar el hiperboloide (2.2) al plano en AdS_2 . En (a) y (b) se marca con una línea punteada el corte que marca el paso de 0 a 2π del tiempo. En (c) se unen infinitos de estos cortes, evitando así la existencia de curvas temporales cerradas.

$$\begin{aligned}
 X^i &= x^i z^{-1}, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, d-2 \\
 V &= t z^{-1} \\
 U - X^{d-1} &= z^{-1} \\
 U + X^{d-1} &= \left(\sum_{i=1}^{d-2} (x^i)^2 - t^2 + z^2 \right) z^{-1}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

La métrica (2.3) en estas coordenadas resulta

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} \left(-dt^2 + dz^2 + \sum_{i=1}^{d-2} (dx^i)^2 \right) \tag{2.10}$$

donde $-\infty < t, x^i < \infty$. El dominio de la variable z puede cubrir los reales positivos o negativos, pero no ambos, dado que $z = 0$ es una singularidad en esta parametrización. Se tomará $z > 0$, que cubre solamente una mitad del hiperboloide (2.2) como se muestra en la Fig. 2.3. La frontera de AdS en esta parametrización se estudiará en detalle en la sección 2.1.1.

El interés en esta parametrización reside en que las superficies de nivel de z describen espacios $\mathbb{M}^{d-1}$. Asimismo, la estructura de (2.10) hace manifiesta una simetría de dilatación $(t, z, x^i) \rightarrow (ct, cz, cx^i)$, con $c > 0$. Esta simetría permite estudiar cómo se comportan objetos que viajan en la dirección z . A medida que un objeto se mueve de z_2 a z_1 con $z_2 > z_1$, acercándose a la frontera del espacio, el tamaño del objeto decrece. Dado que en unidades naturales² la distancia tiene unidades inversas de energía, a medida que el objeto se acerca a esta frontera, la escala de energía aumenta. Por este motivo se suele hacer referencia a los bordes $z \rightarrow \infty$ y $z = 0$ como *borde infrarrojo* y *borde ultravioleta* respectivamente como se esquematiza en la Fig. 2.4.

² $\hbar = 1$ y $c = 1$

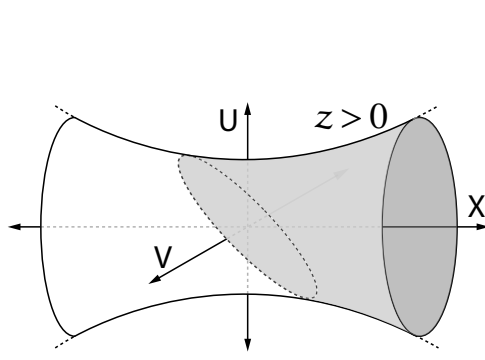


Fig. 2.3: Se muestra la región cubierta por las coordenadas de Poincaré definidas en la ecuación (2.9) sobre AdS_2 . A partir de dicha parametrización puede verse que $z > 0$ impone $U - X > 0$.

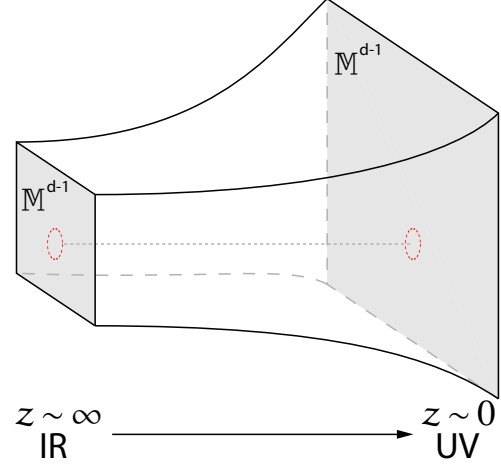


Fig. 2.4: Se toman dos superficies de nivel de z . Un cuerpo (simbolizado por el círculo de línea punteada) en una región de $z \rightarrow 0$ parecería ser más pequeño que el mismo cuerpo a $z \rightarrow \infty$.

Estructura Conforme

El estudio de la estructura conforme de un espacio facilita el análisis de la estructura causal del mismo. De forma general, se parte de la métrica del espacio y mediante un cambio de coordenadas se lo mapea a una región finita de una métrica conocida. Estos diagramas, llamados *Conformes*, permiten obtener las superficies de nivel de las variables de cada parametrización, que serán fundamentales en las aplicaciones de la prescripción de Skenderis y van Rees.

Para tener una variable radial con un dominio finito, se parte de la métrica (2.7) y se define $\tan \chi = \sinh \rho$, de donde

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 \chi} (-dt^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega_{d-2}^2), \quad (2.11)$$

donde $\chi \in [0, \pi/2)$. La estructura causal de un espacio-tiempo es invariante frente a transformaciones conformes³, se forma que se estudiará la estructura causal de ds^2 a partir de la de $d\tilde{s}^2$, donde

$$d\tilde{s}^2 = -dt^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega_{d-2}^2.$$

La geometría definida por $d\tilde{s}^2$ se conoce como *Universo Estático de Einstein* y corresponde a un universo sin bordes isomorfo a $S^{d-1} \times \mathbb{R}$. En este último, el dominio de χ se extiende de 0 a π , mientras que en (2.11) $\chi \in [0, \pi/2)$, de donde puede verse que las superficies $t = cte$ describen hemi-esferas S^{d-1} . El polo de la hemi-esfera y su ecuador, corresponden a $\chi = 0$ y $\chi = \pi/2$ respectivamente. La Fig. 2.5 muestra la estructura conforme de AdS_3 . Cada punto de la zona sombreada representa un círculo de radio

³ Una transformación conforme se define como una transformación de la métrica tal que $ds^2 \rightarrow \Theta ds^2$, donde Θ es una función analítica. Notar que si bien $\cos^{-2} \chi$ diverge para $\chi = \pi/2$ en (2.11), dicho punto no pertenece al dominio de la coordenada.

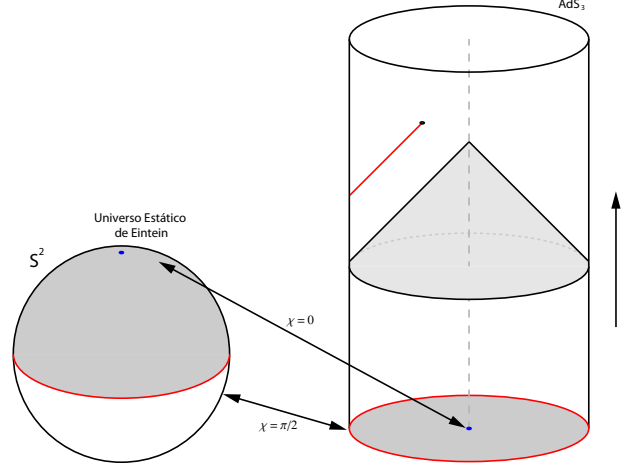


Fig. 2.5: La zona cubierta por una superficie a $t = cte$ (disco sombreado en gris) de AdS_3 es una hemi-esfera del Universo Estático de Einstein. La existencia de puntos del universo (punto negro) cuya evolución temporal no puede determinarse completamente, aún conociendo toda la información del universo a un momento constante en el tiempo (cono gris), dado que podría existir información proveniente de la frontera (recta roja desde la frontera al cilindro).

$\sin(\chi)$. El borde conforme de este espacio se encuentra en $\chi = \pi/2$ y tiene una topología isomorfa a $\mathbb{R}_t \times S^1$, o $\mathbb{R}_t \times S^{d-2}$ para dimensión d arbitraria. En general, el espacio AdS con su borde conforme se entienden como un cilindro macizo. Las regiones $t = cte$ definen “tapas” en el cilindro, mientras que el *borde conforme* corresponde a la superficie lateral del mismo.

La existencia de una frontera tipo tiempo ($\chi = \pi/2$) implica que AdS no es *globalmente hiperbólico*. Esto significa que a partir las ecuaciones de movimiento y condiciones iniciales en una superficie espacial no es posible determinar la evolución temporal de un sistema, dado que podría ingresar información desde la frontera temporal. De forma general, este problema se resuelve imponiendo condiciones de contorno adicionales en dichas fronteras. Es interesante notar que la existencia de una frontera tipo tiempo es lo que permite que la teoría de campos en el borde conforme tenga una dimensión temporal al proponer la dualidad AdS/CFT en tiempo real.

La región descrita por las coordenadas de Poincaré se obtendrá comparando esta parametrización con las coordenadas globales. Por simplicidad se presenta un análisis hecho sobre AdS_2 , pero un estudio en dimensión arbitraria lleva a conclusiones análogas [10]. Dado que cada parametrización tiene coordenadas temporales no equivalentes, se notará al tiempo global como t_G y al Poincaré como t_P . A partir de (2.6) y (2.9),

$$\begin{aligned} U &= \cos(\chi)^{-1} \cos(t_G) = (2z)^{-1} + (-t_P^2 + z^2)(2z)^{-1} \\ V &= \cos(\chi)^{-1} \sin(t_G) = t_P z^{-1} \\ X &= \tan \chi = -(2z)^{-1} + (-t_P^2 + z^2)(2z)^{-1}. \end{aligned}$$

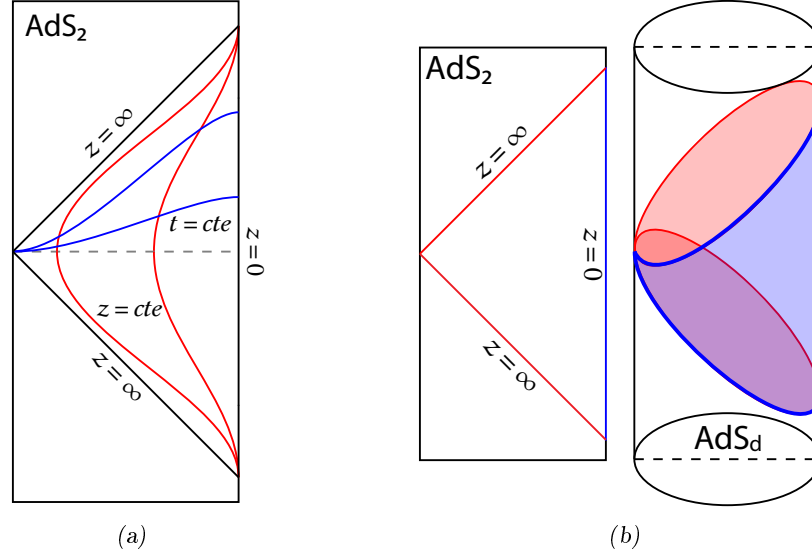


Fig. 2.6: En (a) se muestran esquemáticamente las curvas generadas al tomar constante alguna de las coordenadas de Poincaré. En (b), se lleva gráficamente de AdS_2 a AdS_d . Las curvas rojas y azules se hacen hiper-superficies en dimensión general. Cada punto del diagrama de la derecha representa una esfera S^{d-3} .

A partir de estas relaciones pueden obtenerse las curvas de nivel de t_P y z , definidas como

$$\frac{\sin(t_G)}{\cos(t_G) - \sin(\chi)} = t_P = cte \quad \cos(t_G) - \sin(\chi) = z^{-1} = cte,$$

cuya forma puede verse en la Fig. 2.6a. La frontera de la región cubierta por las coordenadas de Poincaré en un espacio AdS de dimensión arbitraria se muestra en la Fig. 2.6b.

2.1.2. Espacios Hiperbólicos H

Los espacios maximalmente simétricos con $\Lambda < 0$ y signatura euclídea reciben el nombre de espacios *Hiperbólicos* o H . Se presentará este espacio como una hiper-superficie embebida en un espacio plano de dimensión mayor, similar a como se hizo para el espacio AdS. Este enfoque permitirá señalar las diferencias entre la topología de AdS y H y, en particular, será central en el Capítulo 3 para resolver algunas sutilezas que surge al renormalizar los campos en un juego particular de coordenadas.

H Como Superficie Cuádrica

Se impone como vínculo el paraboloide

$$\sum_{i=1}^d X_i^2 - U^2 = -R_0^2, \quad (2.12)$$

sobre la métrica del espacio $\mathbb{R}^{d,1}$

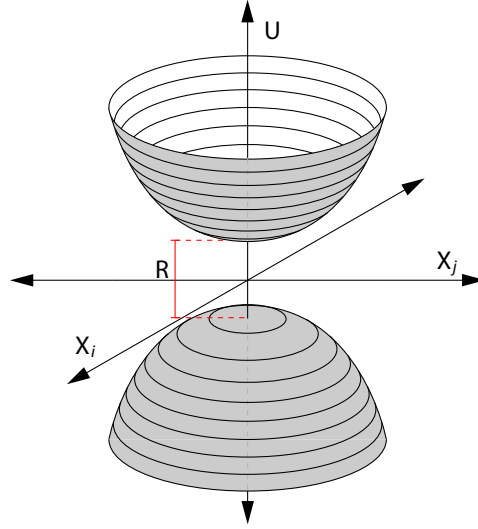


Fig. 2.7: Se muestra el espacio H_2 como una superficie embebida en $\mathbb{R}^{2,1}$. Puede elegirse cubrir con un juego de coordenadas o bien el paraboloides superior o inferior, pero no ambos de forma continua. Entre ellos existe una separación de longitud R_0 .

$$ds^2 = \sum_{i=1}^d dX_i^2 - dU^2. \quad (2.13)$$

En la Fig. 2.7 se muestra el paraboloides (2.12) embebido en el espacio $\mathbb{R}^{2,1}$. Igual que en AdS , se fija $R_0^2 = 1$.

Coordenadas

Para los objetivos del Capítulo 3 serán relevantes 3 parametrizaciones de este espacio: las coordenadas *Globales*, las que se denominarán *E-Globales* y las de *Poincaré*.

Globales

Parametrizar este espacio como

$$\begin{aligned} U &= \cosh(\tilde{\rho}) \\ X^i &= \sinh(\tilde{\rho}) \Omega_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{d-1} \Omega_i^2 = 1, \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde las coordenadas Ω_i son las coordenadas esféricas de S^{d-1} , cumple la condición (2.12) y permite expresar la métrica (2.13) como

$$ds^2 = d\tilde{\rho}^2 + \sinh^2(\tilde{\rho}) d\Omega_{d-1}^2, \quad (2.15)$$

donde $d\Omega_{d-1}^2$ es la métrica unitaria de S^{d-1} y $0 \leq \tilde{\rho} < \infty$. Con estos dominios, se cubre el paraboloide superior de la Fig. 2.7⁴. La métrica (2.15) muestra que este espacio es topológicamente equivalente a $\mathbb{R}^d$, que puede representarse como una esfera maciza. Esta construcción muestra que las simetrías de este espacio son $SO(1,d)$.

E-Globales

La parametrización análoga a las coordenadas globales de AdS para el espacio H se definen como

$$\begin{aligned} U &= \cosh(\rho) \cosh(\tau) \\ X^d &= \cosh(\rho) \sinh(\tau) \\ X^i &= \sinh(\rho) \Omega_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{d-1} \Omega_i^2 = 1 \end{aligned} \tag{2.16}$$

donde las coordenadas Ω_i son las coordenadas esféricas de S^{d-2} . La métrica (2.13) en función de estas coordenadas resulta

$$ds^2 = \cosh^2(\rho) d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2(\rho) d\Omega_{d-2}^2, \tag{2.17}$$

con $d\Omega_{d-2}^2$ la métrica unitaria de S^{d-2} , $0 \leq \rho < \infty$ y $-\infty < \tau < \infty$. Con esto se cubre el paraboloide superior completo.

Se define $r = \sinh(\rho)$ para escribir la métrica (2.17) como

$$ds^2 = (1 + r^2) d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2 d\Omega_{d-2}^2, \tag{2.18}$$

donde $0 \leq r < \infty$. La métrica (2.18) puede obtenerse como la prolongación analítica de (2.8) aplicando la transformación $t \rightarrow -i\tau$. Por este motivo, es común encontrar este espacio como *AdS Euclídeo* o *E-AdS*. La similitud entre estas métricas será muy importante en el Capítulo 3 para comparar soluciones de los campos entre teorías gravitatorias de signatura lorentziana y euclídea.

Poincaré Euclídeo

La parametrización

$$\begin{aligned} X^i &= x^i z^{-1}, \quad \text{con} \quad i = 1, 2, \dots, d-2 \\ X^{d-1} &= \tau z^{-1}, \\ U - X^d &= z^{-1} \\ U + X^d &= \left(\sum_{i=1}^{d-2} (x^i)^2 + \tau^2 + z^2 \right) z^{-1}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

cumple el vínculo (2.12) y deja la métrica (2.13)

⁴ El otro paraboloide puede cubrirse haciendo $U = -\cosh(\tilde{\rho})$ y de la Fig. 2.7 es natural que no puedan cubrirse ambos con una única parametrización con un dominio continuo, dado que no tienen puntos de contacto.

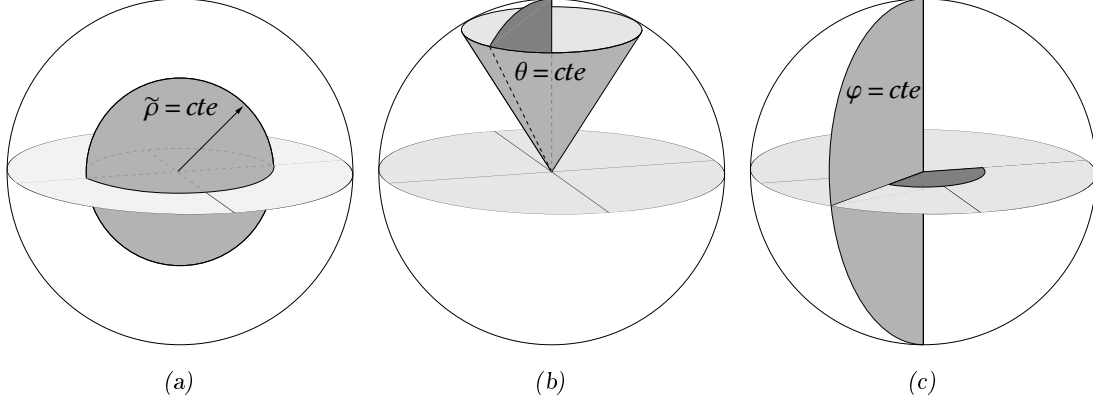


Fig. 2.8: En las figuras se muestra el espacio H_3 en coordenadas globales, además las superficies generadas por sus coordenadas. En (a), (b) y (c) se ven las superficies generadas por ρ , θ y ϕ constantes, respectivamente

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} \left(d\tau^2 + dz^2 + \sum_{i=1}^{d-2} (dx^i)^2 \right) \quad (2.20)$$

donde $-\infty \leq \tau, x^i < \infty$ y $z > 0$.

Estructura Conforme

Para enviar la parametrización (2.14) a una región finita, se define $\sinh(\tilde{\rho}) = \tan(\eta)$. Se puede comprobar directamente que la foliación del espacio H_3 por las coordenadas globales es la que se muestra en la Fig. 2.8. En E-Globales, las coordenadas angulares son explícitamente iguales a las de las coordenadas Globales con excepción de la variable angular azimutal $\theta \in [0, \pi]$ como se puede ver comparando (2.14) y (2.16). Las superficies de nivel de las variables E-Globales quedan definidas por las ecuaciones

$$\tan(\eta) \sin(\theta) = \sinh(\rho) = cte \quad \sin(\eta) \cos(\theta) = \tanh(\tau) = cte \quad (2.21)$$

En la Fig. 2.9 se muestran las superficies (2.21) en un espacio H de dimensión arbitraria. Estas superficies son de especial interés en el Capítulo 3, donde se deberá encontrar una forma de describir la frontera de H en función de estas coordenadas para imponer condiciones de contorno no triviales sobre esta.

Por último, se discuten las coordenadas Poincaré euclídeas. Partiendo de la parametrización (2.19) y comparando con (2.14), se obtienen las superficies de nivel para estas coordenadas

$$\cos(\eta)^{-1} + \tan(\eta) \sin(\theta) = z^{-1} = cte \quad \frac{\sin(\eta) \cos(\theta)}{1 - \sin(\eta) \sin(\theta)} = \tau = cte \quad (2.22)$$

Ejemplos de las curvas de nivel sobre H_d se muestra en la Fig. 2.10. A diferencia de lo que sucede en AdS , las coordenadas Poincaré euclídeas cubren todo el espacio H .

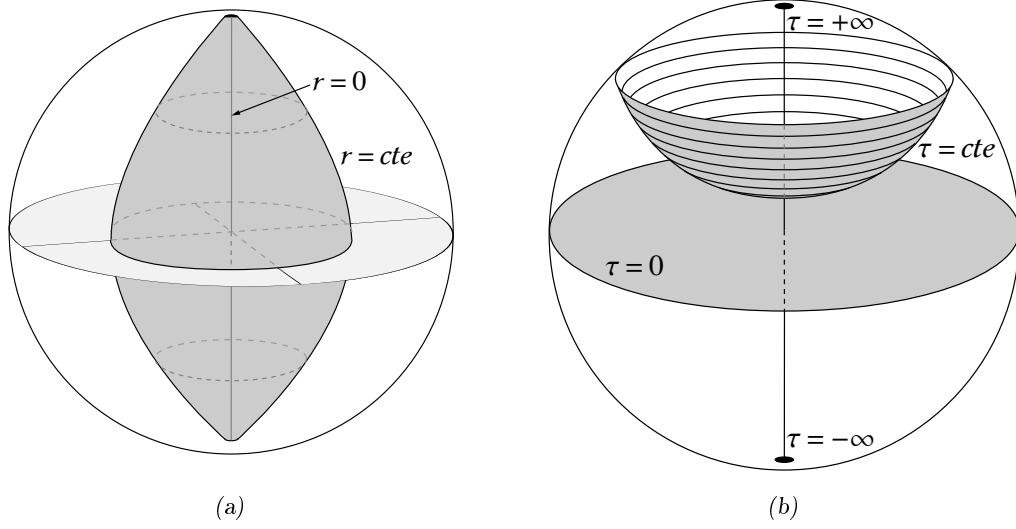


Fig. 2.9: Se muestran las curvas de nivel de las coordenadas e-globales ρ (a) y τ (b).

2.2. Propiedades Relevantes de Teorías de Campos

Esta sección primero presenta algunos conceptos fundamentales para comprender los formalismos In-Out, In-In y Térmicos, conectándolos con formalismos que aparecen más comunmente en la bibliografía y, luego, se centrará en propiedades particulares de las CFT que serán fundamentales para interpretar los resultados del presente trabajo.

2.2.1. Caminos a Tiempo Complejo y Correladores de una Teoría de Campos

Para comprender los esquemas usados en el Capítulo 3 y la información que puede extraerse de ellos, se partirá de la expresión

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) e^{-i \int_{-T}^T dt H_I(t)} \} | 0 \rangle}{\langle 0 | e^{-i \int_{-T}^T dt H_I(t)} | 0 \rangle} \quad (2.23)$$

que puede encontrarse en [11] para el cálculo de funciones de correlación para un campo escalar en una teoría $\lambda\phi^4$ y se relacionará con el primero de los formalismos sobre el que se aplicará la prescripción de Skenderis y van Rees en el Capítulo 3 denominado *In-Out*. Lo relevante de esta expresión será la forma del límite en el lado derecho de la igualdad. Tomar $T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)$ con $\epsilon \neq 0$ es necesario para conectar el vacío de la teoría interactuante $|\Omega\rangle$ con el vacío de la teoría libre $|0\rangle$. Una representación de este camino en el plano complejo t se muestra en la Fig. 2.11.

Desde el formalismo de integral de caminos, las funciones de n puntos de un operador local $\mathcal{O}(x)$, se obtienen tomando la derivada funcional n -ésima de la función generatriz

$$\mathcal{Z}[j] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS + i \int d^d x j(x) \mathcal{O}(x)},$$

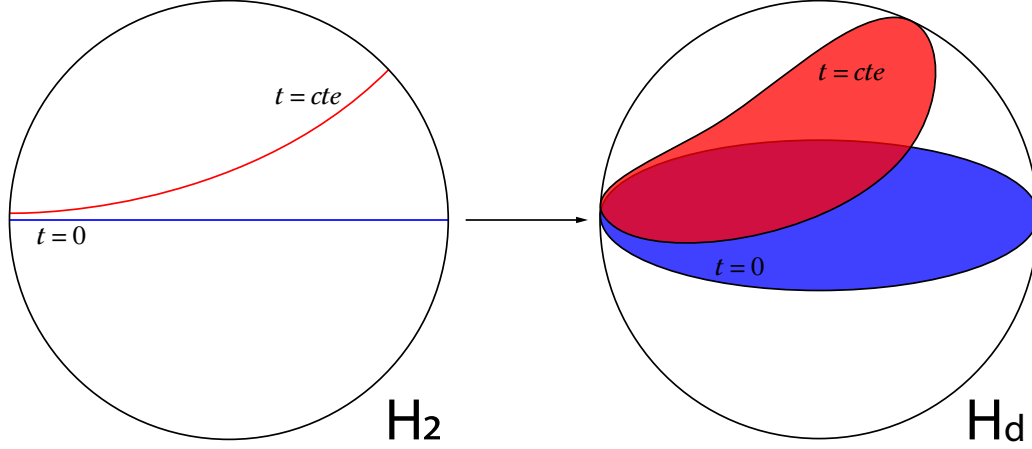


Fig. 2.10: Se muestra cómo se extiende a mayor dimensión las curvas encontradas en las coordenadas de Poincaré euclídeas.

respecto de la fuente externa $j(x)$.

Considerar un tiempo complejo requiere separar la acción S en una parte lorentziana y otra euclídea. De esta forma $iS \rightarrow iS_L - S_E$, donde los subíndices L y E indican si la acción es lorentziana o euclídea. Describir un camino como el que requiere (2.23) en este formalismo sería poco conveniente dado que en todo momento la acción queda compuesta de parte lorentziana y euclídea. En su lugar, notando que no existen singularidades sobre el plano complejo t , puede deformarse el camino de la Fig. 2.11 para obtener otro equivalente que se muestra en la Fig. 2.12. La ventaja de la segunda trayectoria es que en un formalismo de integral de caminos, permite dividir la trayectoria en regiones donde las acciones son solamente euclídeas o lorentzianas.

Para el camino mostrado en la Fig. 2.12, la acción completa puede escribirse como

$$Z[j] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS_L[j; \phi_-, \phi_+] - S_{E;i}[j_i, \phi_-] - S_{E;f}[j_f, \phi_+]}, \quad (2.24)$$

donde ahora $S_L[j; \phi_-, \phi_+]$ contiene al término de la fuente externa $i \int d^d x |x\rangle \mathcal{O}(x)$, pero además se hace explícita su dependencia con la configuración de los campos en los extremos inicial (ϕ_-) y final (ϕ_+) de la parte real de la curva temporal en la Fig. 2.12. Los términos $S_{E;i}[j_i; \phi_-]$ y $S_{E;f}[j_f; \phi_+]$ corresponden a las secciones euclídeas inicial y final correspondientemente, que dependen de las fuentes externas insertadas ($j_{i/f}$) y de la configuración de los campos en sus extremos $\phi_{\pm}$. Por ser una deformación del camino original (Fig. 2.11) este formalismo lleva también a funciones de correlación ordenadas temporalmente.

2.2.2. Formalismo de Schwinger-Keldysh

Para interpretar los dos formalismos In-In y Térmico es necesario introducir primero un método que permite el cálculo de valores de expectación en sistemas interactuantes y de muchas partículas llamado *Formalismo de Schwinger-Keldysh* [12, 13].

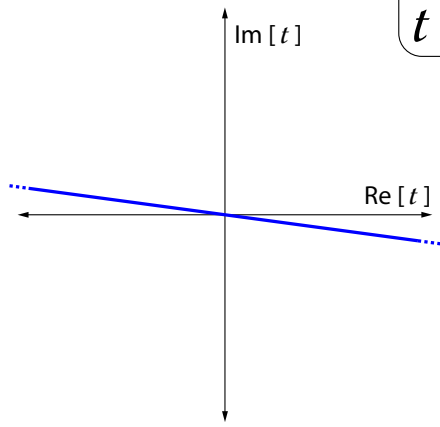


Fig. 2.11: La figura muestra el camino sobre el plano complejo temporal que toma el formalismo tradicional de dispersión en teoría cuántica de campos. Aunque el corrimiento del eje real ϵ es pequeño, dado que $T \rightarrow \infty$, tanto la componente real como imaginaria del camino se hacen infinitas. Este camino lleva a un propagador de Feynman.

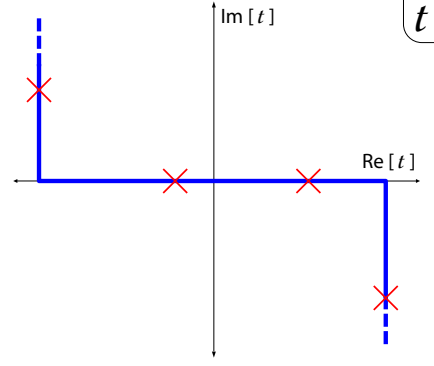


Fig. 2.12: Se muestra el camino del formalismo In-Out sobre el plano temporal complejo. Las cruces rojas simbolizan la inserción de operadores en cada una de las regiones.

Se parte de un sistema cuántico de muchas partículas, cuyo hamiltoniano, $H(t)$, puede contener dependencias explícitas en el tiempo. El sistema está descrito inicialmente por una matriz densidad $\rho(t_i)$ para algún tiempo t_i . La forma específica de $\rho(t_i)$ no será relevante y puede tomarse $t_i = -\infty$, la matriz que describe a un sistema cuyo hamiltoniano es $H(-\infty)$. La ventaja de esto es considerar que en el pasado las interacciones no estaban y que fueron encendiéndose de forma adiabática en algún momento entre t_i y el presente. En estas condiciones, siempre puede tomarse $\rho(t_i)$ como la matriz densidad del sistema en equilibrio y en ausencia de interacciones. Para un tiempo t posterior, puede encontrarse $\rho(t)$ resolviendo la ecuación de movimiento de Heisenberg

$$\partial_t \rho(t) = -i[H(t), \rho(t)]. \quad (2.25)$$

La solución de esta ecuación diferencial es $\rho(t) = U(t, -\infty)\rho(-\infty)U(-\infty, t)$, donde $U(t, t')$ queda definido por

$$\partial_t U(t, t') = -iH(t)U(t, t') \quad \partial_{t'} U(t, t') = iU(t, t')H(t').$$

El valor medio de un operador $\mathcal{O}(t)$ se define como

$$\langle \mathcal{O}(t) \rangle \equiv \frac{\text{Tr}\{\mathcal{O}(t)\rho(t)\}}{\text{Tr}\{\rho(t)\}} = \frac{\text{Tr}\{U(-\infty, t)\mathcal{O}(t)U(t, -\infty)\rho(-\infty)\}}{\text{Tr}\{\rho(t)\}}. \quad (2.26)$$

El enfoque del formalismo de Schwinger-Keldysh es interpretar el lado derecho de (2.26) como una

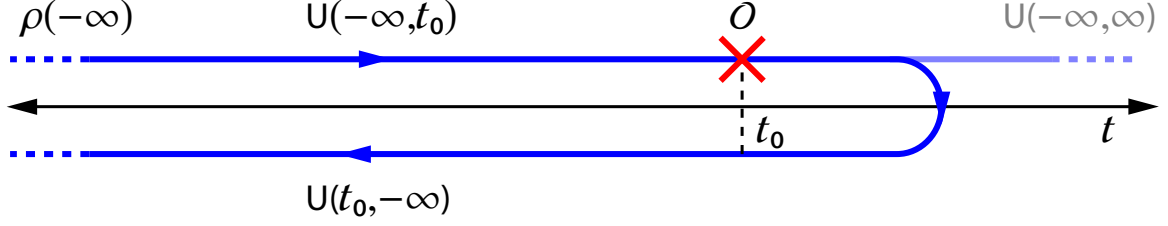


Fig. 2.13: Se muestra en azul la interpretación de la evolución cerrada en el tiempo de la toma de una traza, junto con los operadores que generan cada tramo. El camino que continua y luego da la vuelta luego de la inserción del operador $\mathcal{O}(t)$ es irrelevante en el cálculo y es solo por claridad de la figura. En un azul más claro, se grafica la trayectoria que se seguiría dentro de la traza si se insertase $U(\infty, -\infty)$ de lado izquierdo de la traza.

evolución desde una configuración inicial en $-\infty$ hasta t , donde se aplica el operador $\mathcal{O}$, para luego volver a $-\infty$, como se muestra en la Fig. 2.13.

Se definirá la función de partición como

$$\mathcal{Z} \equiv \frac{\text{Tr}\{\rho(t)\}}{\text{Tr}\{\rho(-\infty)\}} = \frac{\text{Tr}\{U(t, -\infty)\rho(-\infty)U(-\infty, t)\}}{\text{Tr}\{\rho(-\infty)\}} \quad (2.27)$$

Calcular esta función de partición es trivial, dado que $U(t, t')$ es unitario, de forma que por la propiedad cíclica de la traza puede escribirse

$$\mathcal{Z} = \frac{\text{Tr}\{U(-\infty, t)U(t, -\infty)\rho(-\infty)\}}{\text{Tr}\{\rho(-\infty)\}} = 1.$$

Para poder obtener información a partir de esta función de partición, primero es conveniente mencionar la posibilidad de insertar una identidad $1 = U(t, t')U(t', t)$ a izquierda del operador $\mathcal{O}(t)$ en (2.26), que hace que la trayectoria continúe un tiempo arbitrario luego de la acción del operador, para luego regresar al punto original. La Fig. 2.13 ya tiene esta inserción, aunque no se la muestra explícitamente. Esto no altera en absoluto el resultado de la operación, dado que el sistema “va y vuelve” en el tiempo. De haber insertado el operador identidad a derecha de $\mathcal{O}(t)$, el operador aparecería recién en el tramo “de vuelta”, pero nuevamente no afectaría al cálculo del observable. Esta ambigüedad es central para este formalismo. La inserción del operador sobre la curva puede generarse derivando la función de partición $\mathcal{Z}[\eta]$ en presencia de una fuente externa η utilizando el hamiltoniano $H_{\mathcal{O}} \equiv H \pm \mathcal{O}\eta(t)/2$, donde $\pm$ corresponde al tramo “de ida” y “de vuelta” respectivamente. El hamiltoniano no es igual en ambos caminos y $\mathcal{Z} \neq 1$ puesto que el operador identidad $U(t, t')$ obtenido en (2.25) no es el mismo para los caminos de ida y de vuelta. Para obtener el valor de expectación de $\mathcal{O}(t)$, debe calcularse

$$\langle \mathcal{O}(t) \rangle = \left. \frac{\delta \mathcal{Z}[\eta]}{\delta \eta(t)} \right|_{\eta=0}.$$

donde se diferencia directamente $\mathcal{Z}[\eta]$, en lugar de $\ln \mathcal{Z}[\eta]$, porque para $\eta = 0$ la función de partición es la identidad, de forma que en este formalismo el logaritmo natural no es necesario.

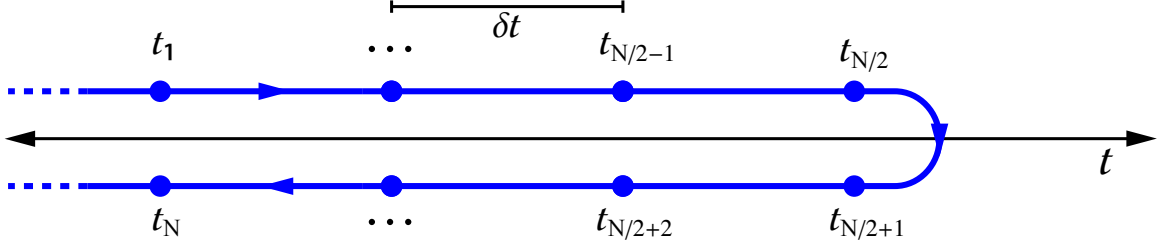


Fig. 2.14: Se discretiza el recorrido de la Fig. 2.13 en N secciones infinitesimales de longitud δt . Se observa además que $t_{N/2} = t_{N/2+1}$.

Considerar hamiltonianos distintos en el camino de ida y de vuelta también hace que las ecuaciones de movimiento para el campo en uno y otro tramo sean distintas, de forma que para $\eta \neq 0$ los campos en uno y otro tramo (ϕ_+ y ϕ_-) pueden tomarse como grados de libertad distintos. Dicho de otro modo, este formalismo requiere que los grados de libertad del sistema se *dupliquen*. Sin embargo, esta duplicación no genera grados de libertad independientes. En el punto t_1 de la Fig. 2.13 en donde el camino de ida y vuelta se unen, los campos tienen que ser los mismos, puesto que ambos describen al sistema a ese tiempo, de forma que

$$\phi_+(t_1) = \phi_-(t_1). \quad (2.28)$$

El siguiente paso será calcular la función de partición del sistema que se está describiendo. En esta tesis se trabajará con campos escalares, de forma que se pondrá como ejemplo de este formalismo de un campo escalar complejo $\phi(x)$ en presencia de un potencial químico μ . Para este sistema el denominador en (2.27) es el de un sistema bosónico en equilibrio, es decir

$$\text{Tr}\{\rho(-\infty)\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(\omega_0 - \mu)n} = (1 - e^{-\beta(\omega_0 - \mu)})^{-1} = (1 - \rho(\omega_0))^{-1},$$

donde se llama al factor $e^{-\beta(\omega_0 - \mu)} = \rho(\omega_0)$, siendo ω_0 la energía del nivel fundamental.

Para calcular el numerador de (2.27) según el formalismo de la integral de caminos, se divide el recorrido original en N secciones infinitesimales de longitud δt como se muestra en la Fig. 2.14, insertando el operador identidad en la base de estados coherentes

$$1 = \int \mathcal{D}\bar{\phi}_j \phi_j e^{-|\phi_j|^2} |\phi_j\rangle \langle \phi_j|.$$

Al partir en secciones discretas el camino, se tomará el punto t_1 dos veces: la primera como fin de la trayectoria de los campos ϕ_+ y la segunda como punto de partida de los campos ϕ_- . Para observar las particularidades de este formalismo, se toma el ejemplo de $N = 6$. Para este caso el numerador de (2.27) toma la forma

$$Tr\{\rho(t)\} = Tr\{U(-\infty, t)U(t, -\infty)\rho(-\infty)\} =$$

$$\langle \phi_6 | U_{-\delta_t} | \phi_5 \rangle \langle \phi_5 | U_{-\delta_t} | \phi_4 \rangle \langle \phi_4 | 1 | \phi_3 \rangle \langle \phi_3 | U_{+\delta_t} | \phi_2 \rangle \langle \phi_2 | U_{+\delta_t} | \phi_1 \rangle \langle \phi_1 | \rho(-\infty) | \phi_6 \rangle.$$

donde $U_{\pm\delta_t} = e^{\mp iH\delta_t} \approx 1 \mp iH\delta_t$ es el operador evolución temporal en el intervalo infinitesimal δ_t . A la mitad de la trayectoria $\delta_t = t_1 - t_1 = 0$, lo que explica la identidad entre los campos ϕ_3 y ϕ_4 .

La función de partición completa puede escribirse en notación matricial como

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{Tr\{\rho(-\infty)\}} \int \prod_{j=1}^6 \mathcal{D}\bar{\phi}_j \phi_j e^{i \sum_{j,j'=1}^6 \phi_j G_{jj'}^{-1} \phi_{j'}},$$

con

$$iG_{jj'}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & & & & & \\ h_- & -1 & & & & \\ & h_- & -1 & & & \\ & & 1 & -1 & & \\ & & & h_+ & -1 & \\ & & & & h_+ & -1 \end{array} \right] \rho(\omega_0), \quad (2.29)$$

donde $h_{\pm} = 1 \pm i\omega_0\delta_t$.

Dado que la teoría es cuadrática en los campos, la integral funcional de $\mathcal{Z}$ es gaussiana y puede hacerse explícitamente como

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{Tr\{\rho(-\infty)\}} \int \prod_{j=1}^6 \mathcal{D}\bar{\phi}_j \phi_j e^{i \sum_{j,j'=1}^6 \phi_j G_{jj'}^{-1} \phi_{j'}} = \frac{1}{Tr\{\rho(-\infty)\}} (Det[-iG^{-1}])^{-1}.$$

El determinante de la matriz es

$$Det[-iG^{-1}] = 1 - \rho(\omega_0)(h_-h_+)^{N/2} = 1 - \rho(\omega_0)(1 + \omega_0^2\delta_t^2)^{N/2} \sim 1 - \rho(\omega_0)e^{\omega_0^2\delta_t^2 N/2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1 - \rho(\omega_0),$$

de forma que al volver al continuo se recupera $\mathcal{Z}[\eta = 0] = 1$.

Para obtener valores de expectación de los observables, se deben insertar fuentes externas $\eta \neq 0$. En una teoría libre, las integrales funcionales son siempre cuadráticas y pueden calcularse exactamente. Por ejemplo, para los propagadores

$$\langle \phi_j \bar{\phi}_{j'} \rangle = \frac{\delta^2 Z[\eta]}{\delta \bar{\eta}(t') \delta \eta(t)} \Big|_{\eta=0} = iG_{jj'}. \quad (2.30)$$

La matriz $iG_{jj'}$ puede calcularse invirtiendo (2.29), de donde se obtiene

$$iG_{jj'} = \frac{1}{Det[-iG^{-1}]} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \rho(\omega_0)h_-h_+^2 & \rho(\omega_0)h_+^2 & \rho(\omega_0)h_+^2 & \rho(\omega_0)h_+ & \rho(\omega_0) \\ h_- & 1 & \rho(\omega_0)h_-h_+^2 & \rho(\omega_0)h_-h_+^2 & \rho(\omega_0)h_-h_+ & \rho(\omega_0)h_- \\ h_-^2 & h_- & 1 & \rho(\omega_0)h_-^2h_+^2 & \rho(\omega_0)h_-^2h_+ & \rho(\omega_0)h_-^2 \\ \hline h_-^2 & h_- & 1 & 1 & \rho(\omega_0)h_-^2h_+ & \rho(\omega_0)h_-^2 \\ h_-^2h_+ & h_-h_+ & h_+ & h_+ & 1 & \rho(\omega_0)h_-^2h_+ \\ h_-^2h_+^2 & h_-h_+^2 & h_+^2 & h_+^2 & h_+ & 1 \end{array} \right].$$

Si se indican los elementos de esta matriz con los índices $1, 2, \dots, N, N, \dots, 2, 1$, donde los primeros (últimos) 3 corresponden al campo ϕ_+ (ϕ_-), los elementos de esta matriz pueden separarse en cuatro:

$$\begin{aligned}\langle \phi_{+j} \bar{\phi}_{-j'} \rangle &\equiv \frac{\rho(\omega_0) h_-^{j-1} h_+^{j'-1}}{\text{Det}[-iG^{-1}]} \\ \langle \phi_{-j} \bar{\phi}_{+j'} \rangle &\equiv \frac{\rho(\omega_0) h_+^{N-j} h_-^{N-j'}}{\text{Det}[-iG^{-1}]} = \frac{\rho(\omega_0) (h_+ h_-)^{N-1} h_+^{1-j} h_-^{j'-1}}{\text{Det}[-iG^{-1}]} \\ \langle \phi_{+j} \bar{\phi}_{+j'} \rangle &\equiv \frac{h_-^{j-j'}}{\text{Det}[-iG^{-1}]} \times \begin{cases} 1 & \text{si } j \geq j', \\ \rho(\omega_0) (h_- h_+)^{N-1} & \text{si } j < j' \end{cases} \\ \langle \phi_{-j} \bar{\phi}_{-j'} \rangle &\equiv \frac{h_+^{j'-j}}{\text{Det}[-iG^{-1}]} \times \begin{cases} \rho(\omega_0) (h_- h_+)^{N-1} & \text{si } j > j', \\ 1 & \text{si } j \leq j' \end{cases}\end{aligned}$$

Para volver a un tiempo continuo debe tomarse el límite $N \rightarrow \infty$. Recordando que $h_{\pm} = 1 \pm i\omega_0 \delta_t$, pueden comprobarse los límites $(h_+ h_-)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$ y $h_{\pm}^j \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{\pm i\omega_0 \delta_t j} = e^{\pm i\omega_0 t}$, donde se recuperó la variable temporal $t = \delta_t j$. Usando además $\text{Det}[-iG^{-1}] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1 - \rho(\omega_0)$, se obtienen los propagadores

$$iG_{ij}(x-y) = \frac{\delta^2 \mathcal{Z}[\phi_+, \phi_-]}{\delta \phi_{\pm}(x) \delta \phi_{\pm}(y)} = i \begin{pmatrix} G_{++} & -G_{+-} \\ -G_{-+} & G_{--} \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

donde

$$\begin{aligned}iG_{+-}(t, t') &= n e^{-i\omega_0(t-t')} \\ iG_{-+}(t, t') &= (n+1) e^{-i\omega_0(t-t')} \\ iG_{++}(t, t') &= \theta(t-t') iG_{+-}(t, t') + \theta(t'-t) iG_{-+}(t, t') \\ iG_{--}(t, t') &= \theta(t'-t) iG_{+-}(t, t') + \theta(t-t') iG_{-+}(t, t').\end{aligned} \quad (2.32)$$

donde $n = (e^{\beta\omega_n|k|} - 1)^{-1}$. Se debe destacar que en este formalismo se define una *matriz* de propagadores en donde aparecen tanto propagadores de Feynman como propagadores de Dyson, retardados y avanzados.

Por último, se presenta la notación continua para este formalismo. La acción se escribe como

$$S = \int_{\mathcal{C}} dt L(t) = \int dt_+ L_+(t_+) - \int dt_- L_-(t_-),$$

donde $\mathcal{C}$ es la curva oscura en la Fig. 2.13 y el signo relativo entre los términos surge al invertir el sentido del tiempo. A pesar de la notación usada en el lado derecho de la igualdad, donde los campos $\phi_{\pm}$ parecen independientes, debe recordarse que están relacionados por el vínculo (2.28). La función de partición puede escribirse como

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[\bar{\phi}, \phi] e^{iS[\bar{\phi}, \phi]},$$

donde $\mathcal{D}[\bar{\phi}, \phi] = \prod \frac{d\bar{\phi} d\phi}{\text{Tr}\{\rho_0\}}$.

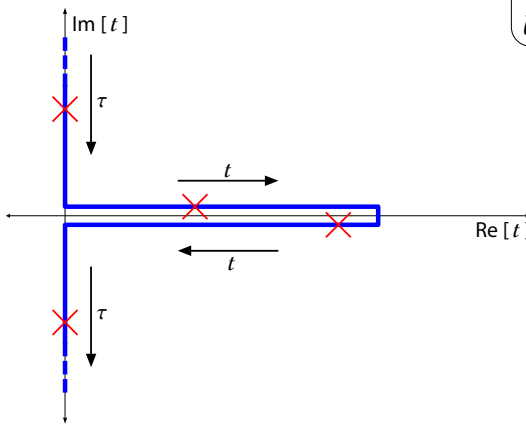


Fig. 2.15: Se muestra el camino del formalismo In-In. Las secciones verticales definen los estados inicial y final, aunque para sistemas físicos estos estados deben ser iguales, debido a que la curva real se recorre primero en un sentido y luego en el inverso. Pueden insertarse operadores sobre las secciones reales para obtener propagadores adelantados.

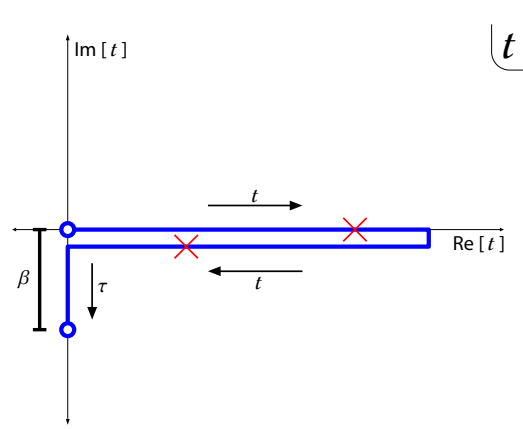


Fig. 2.16: Se muestra el camino del formalismo Térmico. Los círculos en los extremos de la trayectoria están identificados y el largo total de la sección imaginaria es β . La inserción de operadores sobre las secciones reales permiten el cálculo de valores de expectación en el formalismo de Schwinger-Keldysh.

Formalismo In-In

Este formalismo permite el cálculo directo de funciones de correlación retardadas o avanzadas mediante el formalismo de integral de caminos. El camino está compuesto por dos intervalos de tiempo imaginario unidos por una trayectoria cerrada del tipo de Schwinger-Keldysh como se muestra en la Fig. 2.15. Que el camino esté compuesto por secciones verticales y horizontales, al igual que para el formalismo In-Out, permite separar la acción en secciones euclídeas y lorentzianas independientes. La hipótesis de este trabajo es que la inserción de fuentes sobre las secciones euclídeas generan los estados iniciales y finales para la teoría de campos en la sección lorentziana. Al respecto, es relevante mencionar si la trayectoria en el tiempo es cerrada, los estados inicial y final generados con inserciones sobre las regiones euclídeas deben ser el mismo, puesto que corresponden al mismo instante. Sin embargo, el camino no es cerrado en este formalismo, de forma que $\mathcal{Z}$ no es una función de partición, si no una función generatriz.

Formalismo Térmico

El formalismo térmico es la forma de representar con un camino a tiempo complejo al formalismo de Schwinger-Keldysh. La información de la matriz densidad inicial en equilibrio $\rho(-\infty)$ se genera insertando una sección imaginaria de longitud finita β cuyo punto final se identifica con el punto inicial de la trayectoria como se muestra en la Fig. (2.16). Una sección imaginaria finita inserta dentro de la función de partición (2.27) un factor $e^{-i(-i\beta)H} = e^{-\beta H}$, de forma que puede interpretarse β como el inverso de la temperatura del sistema.

2.2.3. Propagadores de una CFT

El grupo de transformaciones conformes es el subgrupo de cambios de coordenadas que dejan la métrica invariante a menos de un factor de escala local,

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = e^{2\sigma(x)} g_{\mu\nu}(x) \quad (2.33)$$

Proponiendo una transformación de coordenadas infinitesimal $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ que cumpla (2.33), pueden obtenerse los generadores de las transformaciones conformes:

- *Traslaciones*: $\epsilon^\mu = a^\mu$ con generadores P_μ ;
- *Transformaciones de Lorentz*: $\epsilon^\mu = \omega_\nu^\mu x^\nu$ con $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ y generadores $M_{\mu\nu}$;
- *Transformaciones de Escala*: $\epsilon^\mu = \lambda x^\mu$ con generadores D ;
- *Transformaciones Especiales Conformes*: $\epsilon^\mu = b^\mu x^2 - 2x^\mu b \cdot x$ con generadores K_μ

Las primeras 3 transformaciones están asociadas con traslaciones rígidas, rotaciones y cambios de velocidades y con dilataciones, respectivamente. Para las transformaciones especiales, puede demostrarse que una transformación finita toma la forma

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + 2b \cdot x + b^2 x^2}.$$

Esta transformación mapea x^μ a infinito, de forma que debe compactificarse el espacio de Minkowsky agregando dicho punto al espacio. Este grupo es isomorfo a $SO(d, 2)$. La simetría discreta de inversión $x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu}{x^2}$ cumple con la condición (2.33) y es por tanto una transformación del grupo conforme. Teniendo en cuenta esta última transformación se forma el grupo conforme completo, que resulta isomorfo a $O(d, 2)$.

Una teoría de campos conforme, debe tener correladores que también cumplan con estas simetrías. Esto permiten dar expresiones cerradas para las funciones de 1, 2 y 3 puntos y permite encontrar restricciones fuertes para las de n puntos con $n > 3$.

Puede derivarse el cambio de un campo escalar frente a una transformación conforme finita

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\Delta/d} \phi(x). \quad (2.34)$$

donde $\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\Delta/d}$ es el jacobiano de la transformación de coordenadas. Para el caso de una transformación de escala, por ejemplo, $x \rightarrow \lambda x$, el campo debe cambiar como $\phi'(x') = \lambda^{-\Delta} \phi(\lambda x)$. Los valores que puede tomar Δ quedarán fijados al exigir que la acción de la teoría sea invariante. Para un mayor detalle en el desarrollo y una generalización a campos de mayor spin, ver [14].

Para el caso de una función de correlación de 1 punto ($G_1 = \langle \phi_1(x_1) \rangle$), no hay forma de construir funciones invariantes de transformaciones conformes. Los valores de expectación de vacío de un único campo en esta teoría son todos triviales.

Para el caso de $G_2 = \langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle$, la invarianza frente a traslaciones y transformaciones de Lorentz impone que sólo puede depender de módulos de distancias $r_{ij} = |x_i - x_j|$. Por la forma en que cambian los campos ante transformaciones conformes (2.34), el cambio en una función de 2 puntos es

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle = G(r_{12}) = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\Delta_1/d} \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\Delta_2/d} \langle \phi(x'_1) \phi(x'_2) \rangle. \quad (2.35)$$

Considerando una transformación de escala, la relación anterior toma la forma

$$G(r_{12}) = \lambda^{\Delta_1 + \Delta_2} G(\lambda r_{12}).$$

Invarianza de escala impone que

$$G(r_{12}) = \frac{C}{r_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2}},$$

donde C es una constante arbitraria.

Finalmente, para una transformación especial conforme y usando la notación $\gamma_i = 1 - 2b \cdot x_i + b^2 x_i^2$

$$x_i^\mu \rightarrow \frac{x_i^\mu - b^\mu x_i^2}{\gamma_i}, \quad \left| \frac{\partial x'_i}{\partial x_i} \right| = \frac{1}{\gamma_i^d}, \quad |x'_1 - x'_2| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}},$$

de forma que

$$G(r_{12}) = \frac{C}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2}} G(r_{12}).$$

Usando la forma explícita de $G(r_{12})$ encontrada arriba,

$$\frac{C}{x_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2}} = \frac{C}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2}} \frac{(\gamma_1 \gamma_2)^{\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}}}{x_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2}}.$$

Esta última relación impone $\Delta_1 = \Delta_2$, por lo tanto

$$\langle \phi_{\Delta_1}(x_1) \phi_{\Delta_2}(x_2) \rangle = \frac{C \delta_{\Delta_1 \Delta_2}}{x_{12}^{2\Delta_1}}. \quad (2.36)$$

La constante C puede absorberse con una normalización adecuada, de forma que esta construcción determina completamente la función de 2 puntos en una CFT. En una teoría conforme, cualquier propagador de 2 puntos de un campo de spin arbitrario está completamente determinado por las simetrías de la teoría.

Para la función de correlación de 3 puntos $G(x_1, x_2, x_3)$, pueden recrearse inmediatamente los argumentos anteriores. Pidiendo invarianza frente a dilataciones

$$G(x_1, x_2, x_3) \propto \frac{1}{x_{12}^a x_{23}^b x_{13}^c}, \quad a + b + c = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

mientras que para transformaciones especiales conformes,

$$\frac{1}{x_{12}^a x_{23}^b x_{13}^c} = \frac{1}{x_{12}^a x_{23}^b x_{13}^c} \frac{(\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2})^{\frac{a}{2}} (\gamma_2^{\Delta_2} \gamma_3^{\Delta_3})^{\frac{b}{2}} (\gamma_3^{\Delta_3} \gamma_1^{\Delta_1})^{\frac{c}{2}}}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2} \gamma_3^{\Delta_3}}.$$

Estas ecuaciones imponen

$$a = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3, \quad b = \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1, \quad c = \Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2,$$

forzando el propagador a tomar la forma

$$G(x_1, x_2, x_3) = \frac{C_{123}}{x_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3} x_{23}^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1} x_{13}^{\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2}}.$$

Para correladores de orden superior las simetrías siguen imponiendo restricciones, aunque no puede determinarse una forma cerrada, dado que a partir de un correlador de 4 puntos en adelante existen nuevos objetos invariantes de simetrías conformes de los que puede depender el propagador. Ejemplos de estas cantidades son $\frac{r_{12}r_{34}}{r_{13}r_{24}}$ y permutaciones de índices con esta estructura.

Tomando el caso particular del propagador de 4 puntos, puede limitarse su forma a

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathcal{F}\left(\frac{r_{12}r_{34}}{r_{13}r_{24}}, \frac{r_{12}r_{34}}{r_{23}r_{14}}\right) \prod_{i < j} \frac{1}{r_{ij}^{\Delta_i - \Delta_j - \Delta/3}}, \quad \Delta = \sum \Delta_i,$$

donde $\mathcal{F}$ es una función arbitraria que no puede fijarse por simetrías de la teoría.

2.3. Dualidad AdS/CFT

La dualidad AdS/CFT [1] (o correspondencia gauge/gravedad) prescribe que bajo ciertas condiciones, una teoría de gravedad $(d+1)$ -dimensional, es dual a una teoría de gauge en el borde asintótico d -dimensional de dicho espacio-tiempo. En particular, la teoría de campos dual a un fondo asintóticamente Anti-de Sitter (AdS) es una teoría de campos conforme (CFT), de donde deriva su nombre, aunque la dualidad aplica para espacios más generales. Si bien no existe una demostración, la dualidad ha pasado un número importante de chequeos de consistencia [15] y se ha conformado como una herramienta muy importante en el marco de la física de altas energías. Un aspecto fundamental de la conjetura es que el régimen fuertemente acoplado (no perturbativo) de una teoría es, a la vez, la región de acoplamiento débil (perturbativo) de su teoría dual. Desde este punto de vista, la correspondencia admite dos formas de abordaje: estudiar el límite débilmente acoplado de una teoría de campos para conseguir información acerca del régimen de acoplamiento fuerte de la teoría gravitatoria dual y viceversa. Las prescripciones GKPW y la de Skenderis y van Rees utilizan la dualidad según el segundo de estos enfoques.

A continuación, se presenta un ejemplo de dos teorías relacionadas por la dualidad. En particular, este ejemplo permite comprobar que los límites de fuerte/débil acoplamiento de ambas teorías se encuentran en regímenes opuestos. En su forma original, la dualidad AdS/CFT postula que la teoría de cuerdas IIB en un espacio $AdS_5 \times S^5$ es exactamente dual a la teoría supersimétrica de Yang-Mills (SYM) $\mathcal{N} = 4$ con grupo de gauge $SU(N)$. Una forma de ver esto es estudiando dos formas alternativas de describir un sistema de N D3-branas con cuerdas abiertas en un espacio-tiempo plano $\mathbb{M}^{10}$.

Primero, se considera el caso en que la interacción de las branas con la métrica puede despreciarse. Si g_s es la constante de acoplamiento de las branas con la métrica la condición anterior es el límite $g_s N \ll 1$. El espectro de baja energía de las cuerdas abiertas (modos no masivos) que terminan sobre el volumen tetra-dimensional de las branas, es descrito por un multiplete supersimétrico $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills con grupo de gauge $SU(N)$. De forma esquemática, la acción aproximada en este límite S_{Ab} puede escribirse como

$$S_{Ab} = S_{Br} + S_{Esp} + S_{Int} \approx S_{\mathcal{N}=4SYM} + S_{EspPlano} + S_{Int}, \quad g_s N \ll 1, \quad (2.37)$$

donde S_{Br} tiene 11 dimensiones y describe los modos no masivos del espectro de cuerdas abiertas, y S_{Esp} es la acción de supergravedad en 10 dimensiones. El término S_{Int} describe el acoplamiento entre los

modos de las cuerdas abiertas y cerradas. A bajas energías, este término puede despreciarse, de manera que los modos abiertos sobre la brana y sobre el espacio plano se desacoplan.

En el caso opuesto, cuando el acoplamiento entre las branas y la métrica es fuerte ($g_s N \gg 1$) el espacio se deforma debido a la presencia de las branas. En este límite, la métrica del espacio puede escribirse como

$$ds^2 = \frac{(-dt^2 + \sum_{i=1}^3 dx_i^2)}{\sqrt{H(r)}} + \sqrt{H(r)}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad H(r) = 1 + \frac{Ng_s \alpha'^2}{r^4}. \quad (2.38)$$

Cerca de la región $r \sim 0$, llamada *garganta*, $\sqrt{H(r)} \sim \sqrt{Ng_s(\alpha')^2 r^{-4}} \propto r^{-2}$ y la geometría efectiva es la de $AdS_5 \times S^5$. La acción en este régimen puede escribirse

$$S_{Cerr} \approx S_{Gar} + S_{EspPlano} + S_{Int}, \quad g_s N \gg 1, \quad (2.39)$$

donde $S_{Gar} \approx S_{CuerdasAdS_5 \times S^5}$ es la acción para los modos masivos y no masivos de cuerdas de la garganta. El término S_{Int} , que describe la interacción entre los modos en la garganta y los modos de baja energía en espacio plano, puede despreciarse a bajas energías.

El paso fundamental viene de considerar que tanto S_{Ab} como S_{Cerr} describen el mismo sistema y deben, por tanto, ser equivalentes. Comparando (2.37) y (2.39) se obtiene

$$S_{N=4SYM} = S_{CuerdasAdS_5 \times S^5}. \quad (2.40)$$

Llevando adelante de forma más detallada esta construcción, pueden encontrarse relaciones entre los parámetros de la teoría: las constantes de acoplamiento de Yang-Mills g_{YM} y de la teoría de cuerdas g_s , el rango del grupo de gauge N y R el radio del espacio AdS . Se obtiene

$$g_{YM}^2 = g_s, \quad \left(\frac{R}{l_s}\right)^4 = g_{YM}^2 N = \lambda, \quad (2.41)$$

donde $l_s = \sqrt{\alpha'}$ es la longitud propia de la cuerda y $\lambda = g_{YM}^2 N$ es la constante de 't Hooft.

Tomando el límite $g_{YM}^2 \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$, pero manteniendo $\lambda \rightarrow \infty$, el largo de la cuerda es despreciable frente al tamaño del espacio ($l_s \ll R$) y la tensión efectiva de la cuerda $T_{ef} \propto \left(\frac{R}{l_s}\right)^2 \rightarrow \infty$, de forma que las cuerdas pueden considerarse rígidas y puntuales. En estas condiciones, la teoría de cuerdas se reduce a supergravedad débilmente acoplada. En cambio, si $N, \lambda \rightarrow \infty$, la teoría de gauge se vuelve fuertemente acoplada.

Un argumento independiente a favor de la validez de la dualidad es que las teorías duales comparten el grupo de simetrías. El espacio AdS_5 tiene isometrías isomorfas al grupo conforme en 4 dimensiones $SO(4, 2)$, mientras que S^5 tiene a $SO(6) \approx SU(4)$ como grupo de isometría. Las simetrías bosónicas de la teoría SYM con $N = 4$ son $SU(2, 2) \times SU(4)_R$. Dado que $SU(2, 2) \approx SO(4, 2)$, puede comprobarse que el grupo de simetrías coincide para ambas teorías. De forma general, siempre que se tenga una teoría que mantenga la simetría conforme en su régimen cuántico, su dual será un espacio AdS. Además, cualquier otra simetría de la teoría de gauge se relaciona con simetrías del espacio interno $\mathcal{M}$. El espacio dual a una teoría de campos conforme de dimensión arbitraria d tiene la estructura general $AdS_{d+1} \times \mathcal{M}$.

La conjetura además implica una identificación entre la coordenada radial z en la solución de supergravedad y la escala de energía de la teoría de campos dual. Esta identificación resulta de analizar cómo se realiza de un lado y otro el operador de una transformación de dilatación. En la teoría de campos una

dilatación es $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$ ⁵. Desde el lado de gravedad, de acuerdo con lo dicho en el párrafo anterior, la dilatación afecta solamente al espacio AdS . Luego, la isometría se expresa como

$$\begin{array}{ccc} x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu & \longleftrightarrow & x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu \quad z \rightarrow \lambda z \\ \text{Gauge} & & \text{Gravedad} \end{array} \quad (2.42)$$

Tomando $\lambda \rightarrow 0$, la variable radial se acerca a la frontera ultravioleta de AdS $z \rightarrow 0$. Luego, el límite $z \rightarrow 0$ corresponde al régimen ultravioleta de la teoría de campos. Un razonamiento análogo muestra que $z \rightarrow \infty$ corresponde al régimen infrarrojo de la teoría de gauge.

La dualidad AdS/CFT afirma, además, que las funciones generatrices de las teorías duales son iguales

$$\mathcal{Z}_{Cuerdas} \approx \mathcal{Z}_{CFT}. \quad (2.43)$$

Esta relación no es trivial: la dimensión de las teorías es distinta y los lagrangianos que describen ambas teorías poseen diferentes campos. La correspondencia provee un mapeo entre los observables de ambas teorías. Desde el punto de vista de una teoría tetradimensional, todo operador $\mathcal{O}$ invariante de gauge puede asociarse con una fuente j de la forma

$$L_{CFT} + \int d^4x j \cdot \mathcal{O},$$

donde L_{CFT} es el lagrangiano de la teoría de campos. Se define la función generatriz $\mathcal{Z}_{CFT}(h)$ de funciones de correlación con el operador $\mathcal{O}$ como

$$\mathcal{Z}_{CFT}(h) \equiv \int \mathcal{D}\phi e^{L_{CFT} + \int d^4x j \cdot \mathcal{O}} = \langle e^{\int d^4x j \cdot \mathcal{O}} \rangle$$

La función de n puntos de $\mathcal{O}$ se obtienen como

$$\langle \mathcal{O}^n \rangle = \left[\frac{\delta^n \ln \mathcal{Z}_{CFT}}{\delta j^n} \right]_{j=0} \quad (2.44)$$

Un aspecto central de la conjetura es que a todo operador invariante de la teoría de gauge le corresponde un campo de la teoría de gravedad. La propuesta dentro de la dualidad es que este campo $h = h(x, r)$ evaluado en el borde del espacio AdS *es la fuente* del mencionado operador de la teoría dual. Existe entonces un campo h_i por cada operador invariante de la teoría $\mathcal{O}_i$. La relación (2.43) puede hacerse más precisa escribiendo

$$\mathcal{Z}_{CFT} = \mathcal{Z}_{Cuerdas}[h(x, r = r_{\text{Borde}}) = j]. \quad (2.45)$$

El lado izquierdo de esta ecuación es la función generatriz para correladores de $\mathcal{O}$ de una teoría de campos d -dimensional, mientras que el lado derecho es la función de partición de una teoría de gravedad $d + 1$ -dimensional con condiciones de contorno para un campo h en el borde asintótico. Para un caso general, la función de partición de un sistema puede no admitir un tratamiento analítico. Sin embargo, en el límite semiclásico de la teoría de cuerdas ($R \gg l_s$) la función generatriz puede aproximarse como

$$\mathcal{Z}_{Cuerdas}[h(x, r = r_{\text{Borde}}) = j] \sim e^{S_{SuGra}[j]} \quad (2.46)$$

⁵ Debe notarse que las coordenadas x^μ en ambas teorías son las mismas.

donde $S_{SuGra}[j]$ es la acción en supergravedad con la condición de contorno $h\big|_{r=r_{Borde}} = j$ evaluado en la solución. En este límite, la definición (2.44) permite obtener las funciones de n puntos de los operadores duales como

$$\langle \mathcal{O}^n \rangle = (-i)^{n-1} \left[\frac{\delta^n S_{SuGra}[j]}{\delta j^n} \right]_{j=0} \quad (2.47)$$

Las relaciones (2.45) y (2.46) son las que fundamentan las prescripciones que se describen en el Capítulo 3.

3. PRESCRIPCIONES Y APLICACIONES

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en este trabajo para calcular valores de expectación de operadores entre estados distintos del fundamental. Para esto se presenta la prescripción de Skenderis y van Rees [7, 8], originalmente formulada para calcular funciones de correlación. Además, para comparar resultados, se detalla en ejemplo de la prescripción estandar GKPW [2, 3].

La necesidad de una prescripción para usar la dualidad en el espacio AdS surge al calcular la acción S_{SuGra} del lado derecho de (2.46). Para esto, además de condiciones de contorno sobre el borde conforme $r \rightarrow r_{Borde}$, resulta necesario proveer condiciones iniciales sobre $t \rightarrow \pm\infty$. En el capítulo anterior se dijo que existe una biyección entre las condiciones de contorno y las fuentes externas j de observables de la teoría de campos dual. Sin embargo, la dualidad AdS/CFT no da ninguna información acerca de la interpretación que tienen las condiciones iniciales o de cómo determinarlas. Las distintas prescripciones proveen formas de sortear la dificultad de requerir más información de la que provee naturalmente la dualidad.

3.1. Prescripción GKPW

En esta sección se presenta la prescripción GKPW para el cálculo de correladores de un operador local $\mathcal{O}$ en espacios AdS y se lo aplica al ejemplo de un campo escalar masivo en una teoría libre, utilizando la métrica de Poincaré.

Partiendo del espacio AdS se pasa a un espacio H realizando una rotación de Wick en la coordenada temporal $t \rightarrow -i\tau$ ¹. Como se estudió en el Capítulo 2, la frontera del espacio H solamente está compuesta por el borde conforme, como puede verse en la Fig. 3.1, de forma que las condiciones iniciales desconocidas que antes impedían el cálculo en AdS ya no son necesarias.

En este espacio puede escribirse la prescripción GKPW como

$$\langle e^{-\int_{\partial H} \mathcal{O} \psi_0} \rangle \equiv e^{-I_E[\psi_0]} \quad (3.1)$$

donde $I_E[\psi_0] = S_E[\psi_0]_{G_{\text{grav}}}^{\text{On Shell}}$ es la acción euclídea de la teoría de gravedad dual evaluada sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento clásicas, mientras que el lado izquierdo de la igualdad es la función generatriz del operador $\mathcal{O}$ de la teoría de campos euclídea.

Se resuelven las ecuaciones de movimiento para el espacio H , pidiendo que los campos sean regulares en todo el espacio y que cumplan con una condición de contorno arbitraria ψ_0 . Los campos en el espacio original AdS se obtienen invirtiendo la transformación, $\tau \rightarrow it$. Obtenidos los campos, puede calcularse la acción evaluada en la solución clásica y usar (2.46) para obtener los propagadores de la teoría de campos dual.

¹ El sentido de la rotación ($t \rightarrow \mp i\tau$) es irrelevante dentro de la métrica, pero da el signo correcto para poder interpretar una evolución temporal imaginaria como una distribución térmica $e^{-itH} \rightarrow e^{-\beta H}$.

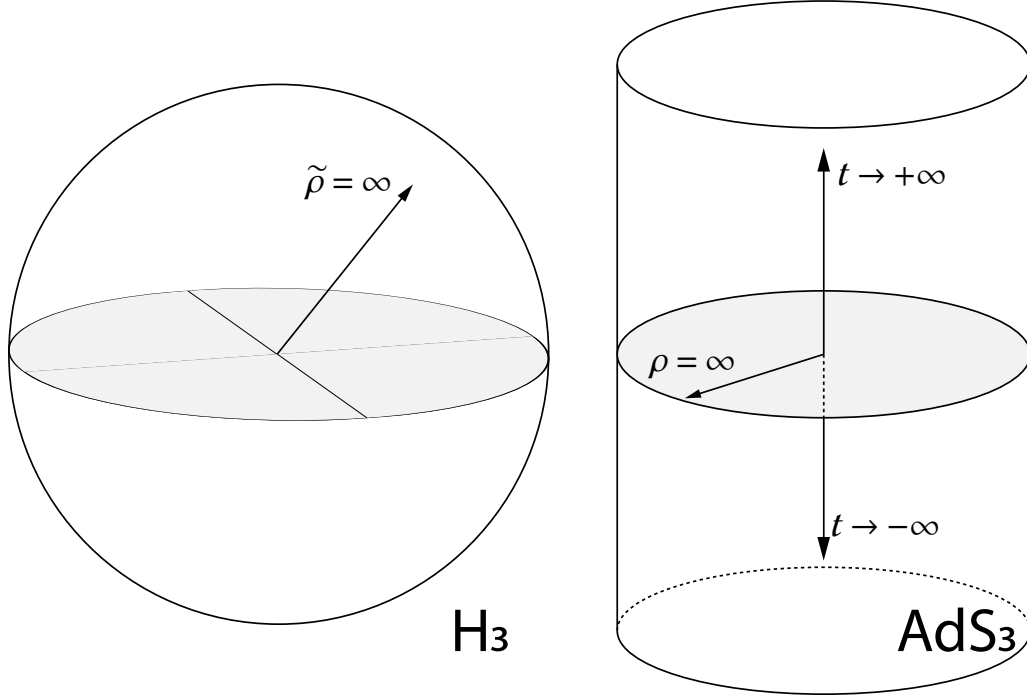


Fig. 3.1: Se comparan las fronteras de los espacios AdS y H. La prescripción GKPW aprovecha la ausencia de fronteras tipo tiempo en H para obtener soluciones únicas para los campos en ese espacio. Los propagadores sobre AdS pueden recuperarse mediante una prolongación analítica haciendo $\tau \rightarrow it$.

Para poner un ejemplo de aplicación de esta prescripción, se obtendrá la función de 2 puntos de un operador $\mathcal{O}(x)$ en la teoría de campos en d dimensiones dual a un campo escalar $\psi(x, z)$, donde z es la coordenada radial del espacio AdS_{d+1} . Partiendo de la métrica en AdS_{d+1} ² en coordenadas de Poincaré se hace la transformación $t \rightarrow -i\tau$ para pasar al espacio H_{d+1}

$$ds^2 = \frac{-dt^2 + dz^2 + \sum_{i=1}^{d-1} (dx^i)^2}{z^2} \Rightarrow \frac{d\tau^2 + dz^2 + \sum_{i=1}^{d-1} (dx^i)^2}{z^2} = \frac{dz^2 + \sum_{i=1}^d (dx^i)^2}{z^2},$$

donde se renombra la variable $\tau = x^d$.

La acción para un campo escalar libre masivo ψ es

$$S = \int dz d^d x \frac{\sqrt{|g|}}{2} (z^2 (\partial_z \psi)^2 + z^2 (\partial_\mu \psi)^2 + m^2 \psi^2)$$

donde el índice $\mu = 1, \dots, d$ y $\sqrt{|g|} = z^{-d-1}$. Integrando por partes

² Recordar que se toma el radio del espacio AdS $R_0^2 = 1$.

$$S = - \int dz d^d x \frac{\sqrt{|g|}}{2} \psi (\square - m^2) \psi + \int_{\partial H} d^d x \frac{z^{-d-1}}{2} \psi z^2 \partial_z \psi,$$

siendo ∂H la frontera de H . Si los campos cumplen las ecuaciones de movimiento $(\square - m^2)\psi = 0$, entonces el primer término se anula de forma que

$$S = \int_{\partial H} d^d x \frac{z^{-d}}{2} \psi z \partial_z \psi = \int d^d x \frac{z^{-d}}{2} \psi z \partial_z \psi \Big|_{z=\infty} + \int d^d x \frac{z^{-d}}{2} \psi z \partial_z \psi \Big|_{z=0}. \quad (3.2)$$

La integral sobre ∂H tiene dos contribuciones: $z \rightarrow 0$ y $z \rightarrow \infty$. Como se vio en la sección 2.1.1, el primer límite corresponde al borde conforme mientras que el segundo límite pertenece al interior del espacio AdS . El comportamiento de estos términos requieren de una expresión para los campos. La ecuación de movimiento es

$$(\square - m^2)\psi = 0 \quad \square = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_z (\sqrt{|g|} g^{zz} \partial_z) + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu).$$

Proponiendo la solución $\psi(x, z) = e^{ik_\mu x^\mu} f_k(z)$, la ecuación diferencial para $f_k(z)$ resulta

$$[z^{d+1} \partial_z (z^{-d+1} \partial_z) - m^2 - z^2 k^2] f_k(z) = 0,$$

donde $k^2 = \delta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu$ y cuya solución general es

$$f_k(z) = A_k z^{d/2} K_\nu(kz) + B_k z^{d/2} I_\nu(kz),$$

para $\nu = \sqrt{(d/2)^2 + m^2}$ y A_k y B_k coeficientes arbitrarios. Los comportamientos asintóticos de estas soluciones en $z \rightarrow \infty$ son

$$K_\nu(z) \sim e^{-kz} \quad I_\nu(z) \sim e^{kz}$$

En esta métrica $k^2 > 0$, de forma que la única solución regular en el interior de H es de la forma

$$\psi(x, z) = \int d^d k e^{ik_\mu x^\mu} A_k z^{d/2} K_\nu(kz), \quad (3.3)$$

Estas soluciones y sus derivadas decaen exponencialmente en $z \rightarrow \infty$, de forma que en (3.2) la única contribución a la acción proviene de la región $z = 0$.

En métrica lorentziana, k^2 podría haber sido tipo tiempo $k^2 < 0$, luz $k^2 = 0$ o espacio $k^2 > 0$. La regularidad en el interior ya no determina la solución de forma única y son necesarias las condiciones iniciales a las que se hacía referencia al principio del presente capítulo.

Los coeficientes A_k en (3.3) se fijan imponiendo condiciones de contorno $\psi_0(x)$ en $z = 0$. Alrededor de este punto, el campo puede expandirse como

$$f_k(z) \approx z^{d/2-\nu} (a_0 + a_1 z^2 + \dots) + z^{d/2+\nu} \ln z (b_0 + b_1 u^2 + \dots). \quad (3.4)$$

Recordando que $\nu > d/2$ para todo d y m , se observa que el punto $z = 0$ es una singularidad del campo y diverge como $z^{d/2-\nu}$, de forma que debe regularizarse el problema imponiendo las condiciones de contorno sobre una superficie $z = \epsilon$ y luego tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Se pide entonces que el campo satisfaga

$$\psi(x, \epsilon) = \psi_0(x, \epsilon) = \epsilon^{d/2-\nu} \psi_0(x),$$

lo que determina los coeficientes $A_k = \tilde{\psi}_0(k, \epsilon) (\epsilon^{d/2} K_\nu(k\epsilon))^{-1}$ en la expresión (3.3) donde $\tilde{\psi}_0(k, \epsilon)$ es la transformada de Fourier de la condición de contorno $\psi_0(x, \epsilon)$. La solución (3.3) se puede escribir

$$\psi(x, z) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik_\mu x^\mu} \tilde{\psi}_0(k, \epsilon) \mathcal{K}(k, z), \quad (3.5)$$

donde $\mathcal{K}(k, z) = \frac{z^{d/2} K_\nu(kz)}{\epsilon^{d/2} K_\nu(k\epsilon)}$. Con esta notación, (3.2) toma la forma

$$\begin{aligned} S[\psi_0] &= \int d^d x \frac{1}{2} z^{-d} \psi(x, z) z \partial_z \psi(x, z) \Big|_{z=\epsilon} \\ &= \int d^d x \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} e^{i(p_\mu + q_\mu) x^\mu} \tilde{\psi}_0(p, \epsilon) \tilde{\psi}_0(q, \epsilon) \left\{ \frac{1}{2} \epsilon^{-d} \mathcal{K}(q, z) \epsilon \partial_z \mathcal{K}(p, z) \right\}_{z=\epsilon} \\ &= \int \frac{d^d p d^d q}{(2\pi)^d} \delta^d(p + q) \tilde{\psi}_0(p, \epsilon) \tilde{\psi}_0(q, \epsilon) \left\{ \frac{1}{2} \epsilon^{-d} \mathcal{K}(q, z) \epsilon \partial_z \mathcal{K}(p, z) \right\}_{z=\epsilon} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Obtenida la acción, puede usarse la relación (2.47) para obtener la función de 2 puntos del operador dual $\mathcal{O}$ en espacio de momentos. En efecto

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(p) \mathcal{O}(q) \rangle &\equiv \left[\frac{\delta^2 S}{\psi_0(q) \psi_0(p)} \right]_{\tilde{\psi}_0=0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{d-2\nu} \left[\frac{\delta^2 S}{\psi_0(q, \epsilon) \psi_0(p, \epsilon)} \right]_{\tilde{\psi}_0=0} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (2\pi)^{-d} \delta^d(p + q) \left\{ \frac{1}{2} \epsilon^{-2\nu} \mathcal{K}(-p, z) \epsilon \partial_z \mathcal{K}(p, z) + \frac{1}{2} \epsilon^{-2\nu} \mathcal{K}(p, z) \epsilon \partial_z \mathcal{K}(-p, z) \right\}_{z=\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (2\pi)^{-d} \delta^d(p + q) \left\{ \epsilon^{-2\nu} \mathcal{K}(-p, z) \epsilon \partial_z \mathcal{K}(p, z) \right\}_{z=\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para tomar el límite, se debe expandir $\epsilon^{-2\nu} \mathcal{K}(-p, z) \epsilon \partial_z \mathcal{K}(p, z)$ para $z \sim 0$. Por definición, $\mathcal{K}(-p, z) \rightarrow 1$ en este límite, mientras que usando la expansión (3.4) puede verse que

$$\begin{aligned} \epsilon \partial_z \mathcal{K}(p, z) \Big|_{z=\epsilon} &= \epsilon \partial_z \left(\frac{z^{d/2} K_\nu(kz)}{\epsilon^{d/2} K_\nu(k\epsilon)} \right) \Big|_{z=\epsilon} \\ &= \left\{ \frac{d}{2} - \nu(1 + c_2(\epsilon^2 p^2) + \dots) \right\} \\ &\quad + \left\{ \nu(\epsilon p)^{2\nu} \ln(\epsilon p) \frac{2b_0}{a_0} (1 + d_2(\epsilon^2 p^2) + \dots) \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

El primer grupo entre llaves es una serie de potencias enteras y positivas de k , que llevados al espacio de posición toman la forma

$$\int d^d k e^{-ik_\mu x^\mu} (\epsilon k)^{2j} \epsilon^{-d} = \epsilon^{2j-d} \square_x^j \delta^d(x).$$

Por ser proporcionales a $\delta^d(x)$ y sus derivadas, a estos términos se los conoce como *de contacto*. Los mismos pueden extraerse del propagador al renormalizar la acción [11], de forma que la contribución física a los propagadores proviene del segundo grupo entre llaves en (3.8) que no es analítico en $k = 0$. Es

importante resaltar que el exponente de ϵ en el orden más bajo del segundo grupo compensa exactamente al que aparece en (3.7), de forma el propagador solo contiene potencias no negativas de ϵ .

Luego, para obtener $\langle \mathcal{O}(x_1)\mathcal{O}(x_2) \rangle$ se debe transformar al espacio de posición dicha contribución

$$\int d^d k \, 2\nu \frac{b_0}{a_0} e^{-ik_\mu x^\mu} k^{2\nu} [\ln k\epsilon](1 + \dots) = \frac{2\nu\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2}\Gamma(\Delta - d/2)} \frac{1}{x^{2\Delta}} + O(\epsilon)$$

donde $\Delta = d/2 + \nu$ y se hace explícito que $\frac{b_0}{a_0} = \frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{2\nu}\nu\Gamma(\nu)^2}$. El logaritmo natural, entre corchetes, solo aparece en los casos donde ν es entero. El caso $\nu \notin \mathbb{Z}$ es análogo: en ausencia del logaritmo, el cálculo de la función de 2 puntos de $\mathcal{O}$ involucra la transformada de Fourier de $k^{2\nu}$ en un espacio d dimensional, que resulta proporcional a $x^{-2\nu-d} = x^{-2\Delta}$. Finalmente, puede obtenerse el correlador tomando el límite $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\langle \mathcal{O}(x_1)\mathcal{O}(x_2) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2\nu\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2}\Gamma(\Delta - d/2)} \frac{1}{(x_1 - x_2)^{2\Delta}} + O(\epsilon) = \frac{2\nu\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2}\Gamma(\Delta - d/2)} \frac{1}{(x_1 - x_2)^{2\Delta}}. \quad (3.9)$$

Esta es la forma correcta de los propagadores en una teoría de campos conforme de dimensión conforme Δ encontrada en la sección 2.2.3. Para un valor arbitrario del radio de AdS R_0^2 , la dualidad relaciona la dimensión conforme del operador $\mathcal{O}$ con R_0^2 , la masa m del campo ψ y la dimensión d del espacio como

$$\Delta = d/2 + \sqrt{(d/2)^2 + m^2 R^2}$$

3.2. Prescripción de Skenderis y van Rees

La prescripción de Skenderis y van Rees [8], propone un método para calcular observables en teorías de campos conformes directamente en métrica lorentziana.

La propuesta de los autores se aplica a teorías de campos conformes de dimensión d arbitraria que puedan describirse, en su evolución temporal, como un camino en el plano complejo, similar a los formalismos In-Out, In-In y Térmico presentados en el Capítulo 2. La prescripción asigna a cada sección de tiempo real (imaginario) un tiempo-espacio en $d + 1$ dimensiones de signatura lorentziana (euclídea). El siguiente paso es unir todos los tiempo-espacios $d + 1$ -dimensionales en un único tiempo-espacio, cuyo borde conforme será, por construcción, la teoría de campos original. Construida la teoría de gravedad dual, se calcula la acción evaluada sobre las soluciones clásicas para calcular las funciones de n puntos de operadores $\mathcal{O}$ de la teoría de campos mediante la relación (2.47).

Dada una teoría de campos cuya evolución temporal se exprese como una curva $\mathcal{C}$ sobre el plano complejo, se separa la misma en secciones $\partial_r \mathcal{M}_i$ según sean lorentzianas o euclídeas como se puede apreciar en la Fig. 3.2a para el formalismo In-Out.

A cada una de estas secciones se les asigna una variedad $\mathcal{M}_i$ con la única condición de que su borde conforme sea $\partial_r \mathcal{M}_i$ ³. Para este trabajo se utilizarán las mismas $\mathcal{M}_i$ usadas en [7, 8]. Sobre cada una de estas variedades se define, además, una acción S_i que da las ecuaciones de movimiento para los campos de la teoría de gravedad.

³ Esto permite que para una misma $\partial_r \mathcal{M}_i$ exista más de una $\mathcal{M}_i$ que cumpla esta condición. La existencia de múltiples espacios duales a una misma teoría de campos dentro de la dualidad AdS/CFT es algo ya conocido. Por ejemplo, el formalismo Térmico admite como teorías de gravedad dual el agujero negro de Schwartzschild y una variedad conocida como *AdS Térmico*, que es la que se usará en esta tesis en la sección 3.3.3.

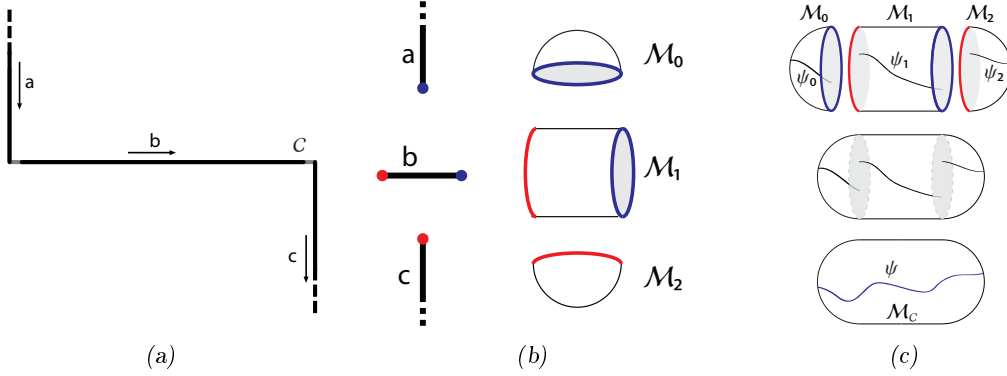


Fig. 3.2: Se muestra cómo construir la teoría de gravedad dual al formalismo In-Out dentro de la prescripción de Skenderis y van Rees. En (a) se puede ver el camino $\mathcal{C}$ seccionado en regiones de métrica euclídea y lorentziana. El paso siguiente es encontrar espacios $\mathcal{M}_i$ que sean duales a las secciones de las curvas y armar con estos (pegando los bordes azules con los rojos) un espacio “a trozos” dual a la curva como muestra b. Las hemisferas representan la mitad de espacios H_{d+1} mientras que los cilindros son secciones del cilindro AdS_{d+1} . Además de unir las fronteras de los espacios, se debe unir toda una hipersuperficie que atraviesa el volumen de la teoría gravitatoria. A continuación, se buscan las soluciones para los campos ψ_i en cada región $\mathcal{M}_i$ por separado para finalmente imponer las condiciones I y II en cada frontera y obtener un único campo ψ que sea solución de las ecuaciones de movimiento en la variedad completa como se muestra en (c). La prescripción propone este campo como el que debe usarse en la acción al usar (2.47) para calcular observables de la teoría de campos dual.

Las variedades $\mathcal{M}_i$ de signatura lorentziana (euclídea) tienen dominios finitos en la variable t (τ), cuya longitud debe corresponder con la de $\partial_r \mathcal{M}_i$. Sobre estas regiones se une la variedad $\mathcal{M}_i$ con las $\mathcal{M}_{i-1}$ y $\mathcal{M}_{i+1}$, como se muestra en las Fig. 3.2b y 3.2c. La región en la que se unirán $\mathcal{M}_i$ y $\mathcal{M}_j$ se denomina $\mathcal{S}_{ij}$ y a la variedad resultante de la unión, $\mathcal{M}_c$.

Usando notación similar a la presentada en la ecuación (3.1), puede escribirse la prescripción de Skenderis y van Rees para el camino In-Out que se muestra en la Fig. 3.2 como

$$\langle 0 | e^{i \int_{\partial AdS} \mathcal{O} \psi_L} | 0 \rangle \equiv e^{iS} = e^{iI_L[\psi_L; \psi^+, \psi^-] - I_{E;0}[0; \psi^-] - I_{E;2}[0; \psi^+]} \quad (3.10)$$

donde ahora la función generatriz corresponde a una teoría de campos a tiempo real, $I_{E;0/2}[0; \psi^-/+]$ son las acciones euclídeas de las regiones $\mathcal{M}_0/2$ evaluadas sobre la solución clásica que se anula sobre $\partial_r \mathcal{M}_{0/2}$ y vale $\psi^-/+$ sobre $\mathcal{S}_{01}$ y $\mathcal{S}_{12}$ respectivamente y $I_L[\psi_L; \psi^+, \psi^-]$ es la acción lorentziana evaluada también sobre la solución clásica que vale $\psi^-/+$ sobre $\mathcal{S}_{01}$ y $\mathcal{S}_{12}$, pero además satisface que sobre $\partial_r \mathcal{M}_1$ es ψ_L . Como puede verse del lado de la izquierda en (3.10), ψ_L es la fuente insertada sobre el borde conforme de la teoría gravitatoria dual, que se corresponde con la fuente externa del operador $\mathcal{O}$ de la teoría de campos dual. Las funciones $\psi^\mp$ son precisamente las condiciones iniciales y finales que deben especificarse para obtener una solución única a tiempo real. Según la prescripción, estas condiciones pueden generarse mediante la inserción de las secciones euclídeas $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{M}_2$ en ausencia de fuentes sobre sus propios bordes conformes y se corresponden con el estado fundamental de la teoría de campos dual.

En el límite semi-clásico de la prescripción, además de minimizarse la acción respecto de los campos en cada una de las regiones $\mathcal{M}_i$ debe minimizarse también respecto de las condiciones iniciales y finales $\psi^\mp$. Esto impone sobre continuidad de los campos de la teoría a través de las regiones $\mathcal{S}_{ij}$ y de sus momentos

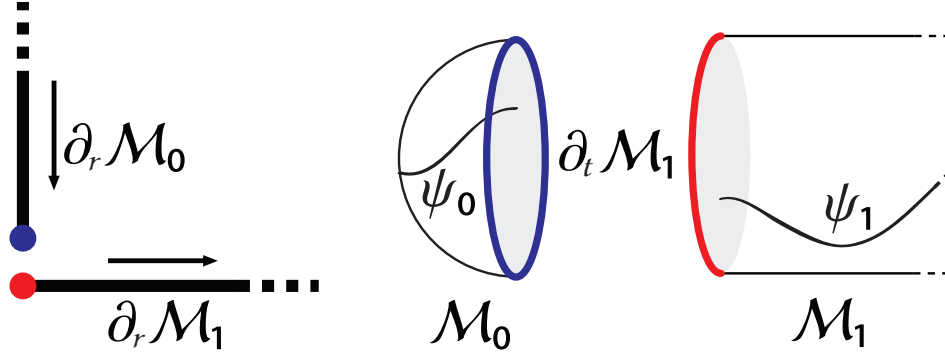


Fig. 3.3: Se muestra la sección tomada para estudiar las divergencias en la acción de un campo escalar sobre una métrica definida. Los espacios $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{M}_1$ son espacios de escalar de curvatura negativo H y AdS de dimensión $d+1$, donde d es la dimensión de la teoría de campos. Los bordes conformes se llaman $\partial_r \mathcal{M}_i$ y son isomorfos a los tramos de la curva en la teoría de campos. La hipersuperficie donde deben pegarse ambas soluciones de los campos se denomina S_{01} .

conjugados. Esto se mostrará explícitamente para un campo escalar en la siguiente sección.

Luego de obtener los campos que cumplen con las condiciones de movimiento sobre la variedad $\mathcal{M}_C$ (y en consecuencia sobre cada $\mathcal{M}_i$), se calcula la acción evaluada sobre las soluciones clásicas. La prescripción de Skenderis y van Rees afirma que la acción que debe usarse para calcular las funciones de n puntos de operadores $\mathcal{O}$ de la teoría de campos mediante la relación (2.47) es la acción completa S que debe tener un único parámetro complejo t_C que parametrize toda la curva temporal del formalismo que se está describiendo.

Campo Escalar

Se considera la acción de un campo escalar ψ de masa m , dual a un operador $\mathcal{O}$ de dimensión conforme $\Delta = \frac{d}{2} + k$, $k = \sqrt{(d/2)^2 + m^2} \in \mathbb{N}$. Se estudiará una parte de su evolución temporal donde la misma es primero imaginaria y luego real como se muestra en la Fig. (3.3). La teoría de gravedad dual consiste en un fondo gravitatorio de constante cosmológica negativa, pero la signatura de este espacio pasa de ser euclídea a ser lorentziana. Dicho de otro modo, la variedad completa es una unión entre un espacio H ($\mathcal{M}_0$) y uno AdS ($\mathcal{M}_1$). Este ejemplo será suficiente para comprender el comportamiento de la acción S sobre las fronteras de $\mathcal{M}_i$.

Las métricas sobre los espacios $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{M}_1$ fueron presentadas en las ecuaciones (2.18) y (2.8) respectivamente. La acción sobre $\mathcal{M}_1$ es

$$S_1 = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}_1} dx^{d+1} \sqrt{|g|} (\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi + m^2 \psi).$$

Se tomará la acción sobre $\mathcal{M}_0$ como la acción S_1 bajo la transformación $t \rightarrow -i\tau$,

$$S_0 = \frac{i}{2} \int_{\mathcal{M}_0} dx^{d+1} \sqrt{|g|} (\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi + m^2 \psi).$$

Suponiendo conocidas las soluciones $\psi_{S,0}$ y $\psi_{S,1}$ que cumplen las ecuaciones de movimiento de cada espacio, se obtiene la acción completa S como

$$S = S_0 + S_1 = -\frac{1}{2} \int_C dt_C \int dr d^{d-1}x \sqrt{|g|} (\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi + m^2 \psi), \quad (3.11)$$

donde la variable temporal compleja t_C parametriza la curva del formalismo es un caso general. En este caso,

$$t_C = \begin{cases} -i\tau & \text{para } \partial_r \mathcal{M}_0 \\ t & \text{para } \partial_r \mathcal{M}_1 \end{cases}$$

Exigir que los campos sobre $\mathcal{M}_1$ tengan como condición inicial la misma que las condición final en la región $\mathcal{M}_0$, impone directamente que los campos sean continuos a través de la superficie $\mathcal{S}_{01}$

$$\psi_{S,0}(\tau, r, x^a) \Big|_{\mathcal{S}_{01}} = \psi_{S,1}(t, r, x^a) \Big|_{\mathcal{S}_{01}}.$$

Reconstruyendo el procedimiento que llevó a la ecuación (3.2), se puede escribir la acción S evaluada sobre las soluciones clásicas como

$$S_0 + S_1 = i \int_{\partial \mathcal{M}_0} d^d x \sqrt{|g|} \psi_0 n^\mu \partial_\mu \psi_0 - \int_{\partial \mathcal{M}_1} d^d x \sqrt{|g|} \psi_1 n^\mu \partial_\mu \psi_1 \quad (3.12)$$

Ambos espacios tienen términos de borde que corresponden a la frontera conforme además de términos que provienen de las regiones $\mathcal{S}_{01}$. Los primeros son similares a los encontrados en (3.6) y se tratarán más adelante. La acción sobre la superficie $\mathcal{S}_{01}$ es

$$\frac{1}{2} \int_{\partial_t \mathcal{M}} dr d^{d-1}x \frac{r}{1+r^2} (i\psi_0 \partial_\tau \psi_0 - \psi_1 \partial_t \psi_1).$$

Minimizando esta acción respecto de las condiciones iniciales/finales se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \left(\frac{1}{2} \int_{\partial_t \mathcal{M}} dr d^{d-1}x \frac{r}{1+r^2} (i\psi_0 \partial_\tau \psi_0 - \psi_1 \partial_t \psi_1) \right) \\ &= \int_{\partial_t \mathcal{M}} dr d^{d-1}x \frac{r}{1+r^2} (i\partial_\tau \psi_0 - i\partial_t \psi_1) \delta \psi_1, \end{aligned}$$

que solo se cumple bajo la condición

$$(\partial_\tau \psi_0) \Big|_{\mathcal{S}_{01}} = (-i\partial_t \psi_1) \Big|_{\mathcal{S}_{01}},$$

es decir, siempre que los momentos conjugados sean continuos al atravesar $\mathcal{S}_{01}$.

Todos los ejemplos de este trabajo contemplan casos con campos escalares. Luego, en lugar de usar las condiciones (??) sobre las superficies $\mathcal{S}_{ij}$, resulta equivalente a pedir

I : Continuidad de los campos.

II : Continuidad de los momentos conjugados.

Bajo las condiciones I y II los términos de borde temporales en (3.12) se anulan, de forma que queda considerar los términos de borde sobre $\partial_r \mathcal{M}_i$

$$S_0 + S_1 = +\frac{i}{2} \int_{\partial_r \mathcal{M}_0} d\tau d^{d-1} x (1+r^2) \psi_{S,0} r \partial_r \psi_{S,0} - \frac{1}{2} \int_{\partial_r \mathcal{M}_1} dt d^{d-1} x (1+r^2) \psi_{S,1} r \partial_r \psi_{S,1}, \quad (3.13)$$

Si bien en la sección 3.1 se trataron términos similares sobre H , el comportamiento asintótico de los campos sobre el borde conforme de los espacios AdS y H es idéntico⁴, de forma que se espera de los mismos la presencia de términos de contacto al igual que en (3.8), que pueden eliminarse de la acción agregando contra-términos [8]. Las únicas regiones donde aún puede haber divergencias no controladas son $\partial_r \mathcal{M} \cap \partial_t \mathcal{M}$. Para evitar divergencias en estas regiones, la prescripción pide a las fuentes j de (2.47) que se anulen suavemente al acercarse a $\partial_r \mathcal{M} \cap \partial_t \mathcal{M}$. Con estas fuentes, los campos sobre las regiones $\partial_r \mathcal{M} \cap \partial_t \mathcal{M}$, que son de la forma (3.3), se anulan y también su contribución de borde en la acción (3.12).

Para una geometría general con n regiones $\mathcal{M}_i$, se debe insertar la acción definida en (3.11) en (2.47) para calcular observables de $\mathcal{O}$ como

$$\langle \mathcal{O}^n \rangle = (-i)^{n-1} \left\{ \frac{\delta^n S}{\delta \psi_0^n(x)} \right\}_{\psi_0=0}, \quad (3.14)$$

donde queda implícito que se cumplen las condiciones (??) sobre todas las superficies $\mathcal{S}_{ij}$.

Gravedad

Se pedirá que a través de las regiones $\mathcal{S}_{ij}$ sean continuas tanto la métrica como su momento conjugado⁵.

Para el ejemplo anterior del campo escalar, la continuidad de la métrica a través de $\mathcal{S}_{ij}$ puede comprobarse directamente de (2.8) y (2.18) dado que dichas superficies se toman a t y τ constantes.

El momento conjugado de la métrica $\pi_{\mu\nu}$ puede expresarse en función de sí misma y de la curvatura extrínseca como

$$\pi_{\mu\nu} = K_\alpha^\alpha g_{\mu\nu} - K_{\mu\nu}.$$

La curvatura extrínseca de una superficie normal a un vector n^μ unitario es

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n P_{\mu\nu} = \frac{1}{2} n^\alpha \partial_\alpha (g_{\mu\nu} - n^2 n_\mu n_\nu) + \partial_\mu (n^\alpha) (g_{\alpha\nu} - n^2 n_\alpha n_\nu) \quad (3.15)$$

donde $P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n^2 n_\mu n_\nu$ es la primer forma fundamental de la superficie normal a n^μ y $n^2 = n_\alpha n^\alpha = -1$ dado que es un vector tipo tiempo.

En coordenadas E-Globales en H y las Globales de AdS , el vector normal unitario es $n_\mu = \sqrt{1+r^2} \delta_\mu^0$. Dado que todas las métricas de este trabajo solo dependen de la dirección radial, puede verse que el primer término de (3.15) se anula

$$n^\alpha \partial_\alpha (g_{\mu\nu} - n^2 n_\mu n_\nu) = n^0 \partial_0 (g_{\mu\nu}(r) - n^2 n_\mu(r) n_\nu(r)) = 0$$

El cálculo explícito del segundo término muestra que también es trivial

⁴ Esto se verá explícitamente en la sección 3.3.1, cuando se resuelva el problema de un campo escalar sobre AdS .

⁵ Aunque el procedimiento es análogo en su mayor parte, se requiere de la adición de nuevos contra-términos a la acción para eliminar términos divergentes que aparecen sobre $\partial_r \mathcal{M} \cap \partial_t \mathcal{M}$.

$$\partial_\mu(n^\alpha)(g_{\alpha\nu} - n^2 n_\alpha n_\nu) = \partial_\mu(n^0)(g_{0\nu} + n_0 n_\nu) = \delta_\mu^r \partial_r \left(\frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \right) \delta_\nu^0 (-(1+r^2) + \sqrt{1+r^2} \sqrt{1+r^2}) = 0$$

de forma que cualquier superficie de nivel de t y τ puede unirse con cualquier otra.

Los cálculos pueden repetirse para las coordenadas de Poincaré en H y AdS donde $n^\mu = z\delta_0^\mu$. Una demostración análoga muestra que el tensor de curvatura extrínseca (3.15) también es idénticamente nulo para cualquier superficie de nivel temporal y por tanto estas regiones pueden unirse libremente.

3.3. Aplicaciones

El objetivo de este trabajo es encontrar un mapeo entre las fuentes ubicadas sobre las fronteras conformes euclídeas y la consideración de estados no triviales para obtener elementos de matriz o valores de expectación de operadores sobre la teoría de campos dual a un determinado espacio. En función de dicho mapeo se pretende interpretar, dentro de la prescripción, el rol de estas inserciones. La opinión de Skenderis y van Rees es que debieran generar estados no triviales para el formalismo In-Out, aunque no existe aún en la literatura un cálculo explícito de la forma de los mismos. En este trabajo se lleva adelante un cálculo de estos objetos. Se verá que para los caminos abiertos estudiados, la inserción de operadores sobre las regiones euclídeas generará resultados que pueden interpretarse como estados distintos del vacío, aunque también se comprueba que estos estados no son estados completamente generales. La inserción de fuentes en el formalismo Termal ya no tienen la interpretación de estados finales o iniciales, puesto que el camino temporal es cerrado. La interpretación es que las inserciones sobre estas secciones permiten describir un macro-estado dado por un ρ general y posiblemente fuera del equilibrio. En ausencia de fuentes, la contribución de la sección vertical puede escribirse como $\rho = e^{-\beta H}$, es decir, la matriz densidad de un sistema en equilibrio. Dicho de otro modo, en ausencia de fuentes el estado que describe la sección vertical es un estado de equilibrio a temperatura $T = \beta^{-1}$, mientras que en presencia de fuentes la sección sigue representando la matriz densidad de un sistema de partículas, pero fuera del equilibrio.

También es de interés evaluar si la inserción de fuentes j modifican los propagadores de la teoría de campos. Ninguno de los propagadores de los casos estudiados se ve modificado por la inserción de fuentes. Este resultado es consecuencia de que las acciones estudiadas en este trabajo son cuadráticas, aunque se muestran argumentos a favor de que este comportamiento no debiera extrapolarse a teorías interactuantes o con un mayor número de campos.

Comparando las prescripciones presentadas en este trabajo, es interesante notar que al imponer condiciones en el borde conforme en la prescripción GKPW, el problema queda completamente determinado sin dejar grados de libertad para fijar los estados iniciales y finales desde un enfoque holográfico, u oscureciendo cómo la información puesta en el borde conforme define, a la vez, los operadores dentro del valor de expectación y los estados iniciales y finales. La prescripción de Skenderis y van Rees tiene una ventaja en este aspecto: pareciera natural proponer que los operadores dentro del valor de expectación están solamente relacionados con el/los sectores lorentzianos, mientras que la información contenida en las regiones euclídeas se asociarán con los estados iniciales y finales de la teoría de campos.

En esta sección se calculan la función de 1 y 2 puntos de un operador $\mathcal{O}$, dual a un campo escalar ψ de masa m , dual a un operador $\mathcal{O}$ de dimensión conforme $\Delta = \frac{d}{2} + l$, $l = \sqrt{(d/2)^2 + m^2} \in \mathbb{N}$ en AdS_3 , para los formalismos In-Out, In-In y Térmico en una teoría de campos en 2 dimensiones y nuevamente para el formalismo In-Out pero dentro del parche de Poincaré en AdS_{d+1} , dual a una teoría de campos conforme d dimensional.

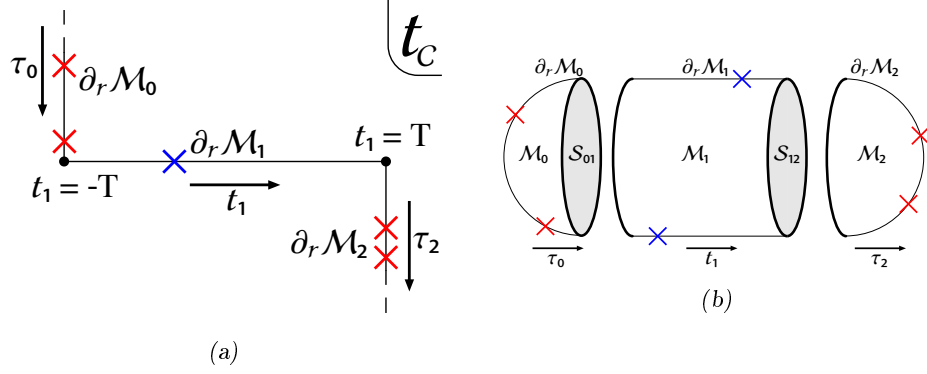


Fig. 3.4: Se muestra el esquema completo del problema a resolver: una sección euclídea con fuentes arbitrarias que generan el estado inicial, un sector lorentziano con fuentes donde se da una evolución temporal y finalmente una segunda sección euclídea que define el estado final. Las fuentes ubicadas en los tramos lorentziano y euclídeo se simbolizan con cruces azules y rojas respectivamente. En (a) se muestra el camino en el plano complejo temporal, mientras que (b) presenta la versión holográfica del mismo.

3.3.1. Formalismo In-Out

Como se mencionó en el Capítulo 2, el formalismo In-Out representa un experimento de dispersión. En la Fig. 3.4a se muestra nuevamente el formalismo con la inserción de operadores en los tramos de tiempo real (imaginario) simbolizado con cruces azules (rojas). En ausencia de operadores sobre las secciones euclídeas, ambos estados inicial y final son el fundamental.

Definida la teoría de campos y el camino en el plano complejo que la representa, el primer paso de la prescripción requiere encontrar espacio-tiempos $\mathcal{M}_i$ duales a cada una de las secciones del camino. Se tomará un espacio AdS_3 para la sección real $\mathcal{M}_1$ y regiones de H_3 para las secciones $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{M}_2$ como se puede ver en la Fig. 3.4b. La región inicial $\mathcal{M}_0$ será la descrita en coordenadas e-globales con $\tau_0 < 0$ y la final, $\mathcal{M}_2$, con $\tau_2 > 0$. La variedad $\mathcal{M}_1$ se extiende entre $t \in [-T, T]$. Sobre el borde conforme de cada $\mathcal{M}_i$ se imponen condiciones de contorno $\psi_i(x)$. Sobre $\mathcal{M}_1$ las condiciones de contorno representan fuentes externas j de la teoría de campos en (2.47). La hipótesis del trabajo es que las condiciones de contorno sobre $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{M}_2$ determinarán estados iniciales y finales distintos del estado fundamental en la teoría de campos dual.

Asignado un espacio dual a cada $\mathcal{M}_i$, se resuelven las ecuaciones de movimiento en cada región y se unen las soluciones en un único campo pidiendo las condiciones I y II sobre las superficies $\mathcal{S}_{ij}$.

Solución sobre $\mathcal{M}_1$

La acción y métrica sobre $\mathcal{M}_1$ son

$$S_1 = \frac{1}{2} \int_{-T}^T dt \int dr d\varphi \sqrt{|g|} (\partial_\mu \Psi_1 \partial^\mu \Psi_1 + m^2 \Psi_1^2), \quad ds^2 = -(1 + r^2) dt^2 + \frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2 d\varphi^2$$

y la ecuación de movimiento en coordenadas globales

$$(\square - m^2)\Psi_1 = \left(\frac{1}{r} \partial_r \{r(1+r^2)\partial_r\} - \frac{\partial_t^2}{1+r^2} + \frac{\partial_\varphi^2}{r^2} - m^2 \right) \Psi_1 = 0$$

Se propone $\Psi_1(r, t, \varphi) = e^{ik\varphi - i\omega t} f(\omega, k, r)$ con $k \in \mathbb{Z}$, de donde la ecuación para $f(\omega, k, r)$ resulta

$$\left(\frac{1}{r} \partial_r (r(1+r^2)\partial_r) + \frac{\omega^2}{1+r^2} - \frac{k^2}{r^2} - m^2 \right) f(|\omega|, |k|, r) = 0, \quad (3.16)$$

donde se hace explícito que $f(|\omega|, |k|, r)$ solo puede depender de los módulos de k y ω puesto que en (3.16) solo aparecen los cuadrados de estas cantidades. Las soluciones linealmente independientes son

$$\begin{aligned} f(|\omega|, |k|, r) = & A_1(1+r^2)^{\frac{|\omega|}{2}} r^{|k|} F\left(\frac{|\omega| + |k| + l + 1}{2}, \frac{|\omega| + |k| - l + 1}{2}; 1 + |k|; -r^2\right) \\ & + A_2(1+r^2)^{\frac{|\omega|}{2}} r^{-|k|} F\left(\frac{|\omega| - |k| + l + 1}{2}, \frac{|\omega| - |k| - l + 1}{2}; 1 + |k|; -r^2\right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

con $l = \sqrt{1+m^2}$, A_1 y A_2 constantes arbitrarias y $F(a, b; c; x)$ la función hipergeométrica. La solución debe ser regular dentro de la variedad, de forma que expandiendo alrededor de $r \sim 0$, se obtiene

$$f(|\omega|, |k|, r) \sim A_1 r^{|k|} (1 + \dots) + A_2 r^{-|k|} (1 + \dots), \quad (3.18)$$

de donde la regularidad del campo exige $A_2 = 0$.

En el límite $r \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} f(|\omega|, |k|, r) \sim & A_1 \left(\frac{\Gamma(1+|k|)(l-1)!}{\Gamma(\frac{|\omega|+|k|+l+1}{2})\Gamma(\frac{-|\omega|+|k|+l+1}{2})} \right) \times \\ & [r^{-1-l} \alpha(|\omega|, |k|, l) \{ \log(r^2) + \beta(|\omega|, |k|, l) \} + \dots + r^{-1+l} + \dots] \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde se definen

$$\alpha(|\omega|, |k|, l) = \frac{(\frac{|\omega|+|k|-l+1}{2})_l (\frac{|\omega|-|k|-l+1}{2})_l}{l!(l-1)!}; \quad \beta(|\omega|, |k|, l) = -\varepsilon\left(\frac{|\omega| + |k| + l + 1}{2}\right) - \varepsilon\left(\frac{-|\omega| + |k| - l + 1}{2}\right) \quad (3.20)$$

donde $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ son los *Símbolos de Pochhammer* y $\varepsilon(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx}$ es la función *Digamma*.

La constante A_1 queda determinada al pedir que sobre la distancia de corte R_C , el campo tenga el comportamiento asintótico

$$\Psi_1(R_C, t, \varphi) = \psi_1(R_C, t, \varphi) = R_C^{-1+l} \psi_1(t, \varphi),$$

donde $\psi_1(t, \varphi)$ es la fuente insertada sobre el borde conforme de $\mathcal{M}_1$. Esto fuerza

$$A_1 = \tilde{\psi}_1(R_C, \omega, k) \left[\frac{\Gamma(1+|k|)(l-1)!}{\Gamma(\frac{|\omega|+|k|+l+1}{2})\Gamma(\frac{-|\omega|+|k|+l+1}{2})} \right]^{-1}, \quad (3.21)$$

definida $\tilde{\psi}_1(R_C, \omega, k)$ como la transformada de Fourier de $\psi_1(R_0, \tau, \varphi)$. Con esta elección, una solución para el campo Ψ_1 es

$$\Psi_1(r, t, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int d\omega e^{ik(\varphi - \varphi') - i\omega(t - t')} \psi_1(R_0, t', \varphi') \mathcal{K}(r, \omega, k), \quad (3.22)$$

con

$$\mathcal{K}_1(r, \omega, k) = \frac{f(|\omega|, |k|, r)}{f(|\omega|, |k|, R_0)}$$

A diferencia de lo que sucede en H , esto no agota las posibles soluciones para el campo. El factor $\Gamma(\frac{|\omega| + |k| + l + 1}{2}) \Gamma(\frac{-|\omega| + |k| + l + 1}{2})$ en el denominador de (3.19) es divergente siempre que

$$\omega = \omega_{n|k|}^\pm = \pm(2n + |k| + l + 1), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.23)$$

Para $\omega = \omega_{n|k|}^\pm$, el término proporcional a r^{-1+l} no aparece en la expansión (3.19), de forma que la solución decae como r^{-1-l} en el límite $r \rightarrow \infty$. Cualquier combinación lineal de estas soluciones, denominados *modos normalizables* en la bibliografía, puede agregarse a (3.22) sin modificar el comportamiento asintótico de campo cerca del borde conforme. Por conveniencia al unir las soluciones sobre $\mathcal{S}_{01}$ y $\mathcal{S}_{12}$ imponiendo las condiciones I y II se notarán los modos normalizables como

$$e^{-i\omega_{n|k|}^\pm t + ik\varphi} g(\omega_{n|k|}^\pm, |k|, r),$$

habiendo definido

$$\begin{aligned} g(\omega_{n|k|}^\pm, |k|, r) &\equiv \oint_{\omega_{n|k|}^\pm} d\omega \mathcal{K}_1(r, \omega, k) \\ &\sim r^{-l-1} \alpha(\omega_{n|k|}^\pm, |k|, l) \oint_{\omega_{n|k|}^\pm} d\omega \beta(\omega, |k|, l) + \dots \\ &\sim r^{-l-1} \alpha(\omega_{n|k|}^\pm, |k|, l) 4\pi i + \dots, \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde los contornos en las integrales están definidos en sentido anti-horario y horario para las frecuencias negativas y positivas respectivamente, de forma que $g(\omega_{n|k|}^+, |k|, r) = g(\omega_{n|k|}^-, |k|, r)$.

Con esta notación, la solución más general para el campo sobre $\mathcal{M}_1$ es

$$\begin{aligned} \Psi_1(r, t, \varphi) &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int d\omega e^{ik(\varphi - \varphi') - i\omega(t - t')} \psi_1(R_0, t', \varphi') \mathcal{K}_1(r, \omega, k) + \\ &\quad \sum_{\pm} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_{nk}^\pm e^{-i\omega_{n|k|}^\pm t + ik\varphi} g(\omega_{n|k|}^\pm, |k|, r), \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde $Q_{nk}^\pm$ son coeficientes arbitrarios.

Además de estos coeficientes, aún existe una indeterminación en la expresión (3.25) respecto de cómo tomar la integral en ω en el primer término. En la Fig. 3.5a puede verse que el camino de integración atraviesa infinitos polos ubicados en $\omega = \omega_{n|k|}^\pm$. La integral debe calcularse usando el Teorema de Residuos, para lo cual es necesario definir un camino de integración sobre el plano complejo de ω . El camino natural

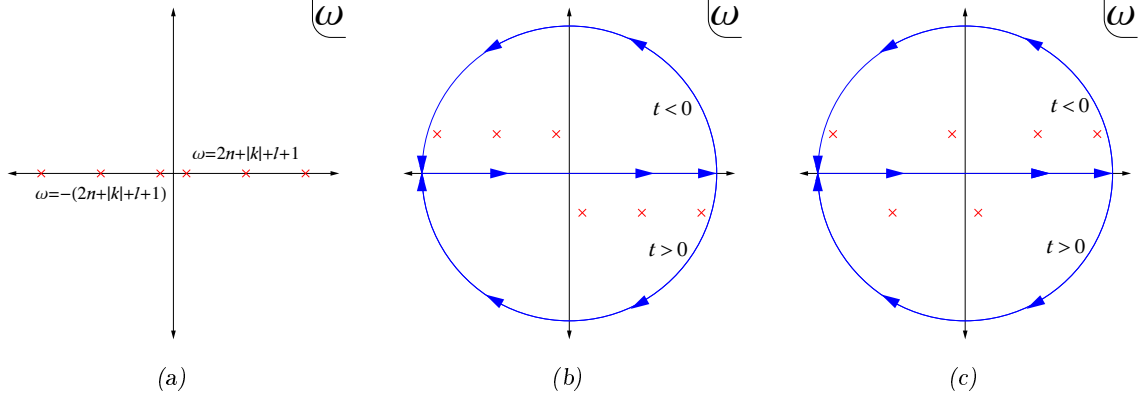


Fig. 3.5: En (a) se muestran los polos (3.23) en el plano complejo ω . En (b) se muestra el camino de Feynman, mientras que (c) muestra otro camino posible que se conecta con el primero mediante un número finito de polos que pueden reabsorberse en una nueva definición de los coeficientes $C_{nk}^{\pm}$.

sobre el cual definir la integral es el camino de Feynman, que se muestra en la Fig. 3.5b. La integral tomada sobre cualquier otro camino, como el que se muestra en la Fig. 3.5c, difiere de la elegida en un número finito de residuos que tienen la misma forma que los modos normalizables definidos en (3.24). De esta forma, cualquier cambio de camino de integración puede absorberse en una redefinición de las constantes arbitrarias $Q_{nk}^{\pm}$. Se escribe, finalmente, la solución como

$$\Psi_1(r, t, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{F}} d\omega dt' d\varphi' e^{ik(\varphi - \varphi') - i\omega(t - t')} \psi_1(R_0, t', \varphi') \mathcal{K}_1(r, \omega, k) +$$

$$\sum_{\pm} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{nk}^{\pm} e^{-i\omega_{n|k|}^{\pm} t + ik\varphi} g(\omega_{n|k|}^{\pm}, |k|, r), \quad (3.26)$$

donde el subíndice $\mathcal{F}$ indica que se toma el camino de integración de la Fig. 3.5b y los coeficientes arbitrarios $C_{nk}^{\pm}$ son los coeficientes arbitrarios para este camino y que se fijarán al imponer las condiciones I y II sobre $\mathcal{S}_{01}$ y $\mathcal{S}_{12}$.

Soluciones sobre $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{M}_2$

Renormalización Holográfica en Coordenadas E-Globales

Antes de resolver las ecuaciones de movimiento para las regiones $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{M}_2$, es necesario hacer algunas consideraciones acerca del proceso de renormalización holográfica en coordenadas e-globales.

En la mayor parte de la bibliografía se realiza la renormalización holográfica en coordenadas de Poincaré o Globales para el espacio H , donde existe una única coordenada radial (z y ρ respectivamente) que parametriza el borde conforme. Este trabajo requiere una renormalización en coordenadas e-globales donde la coordenada radial r no cubre completamente el borde conforme, como puede verse en la Fig. 3.6.

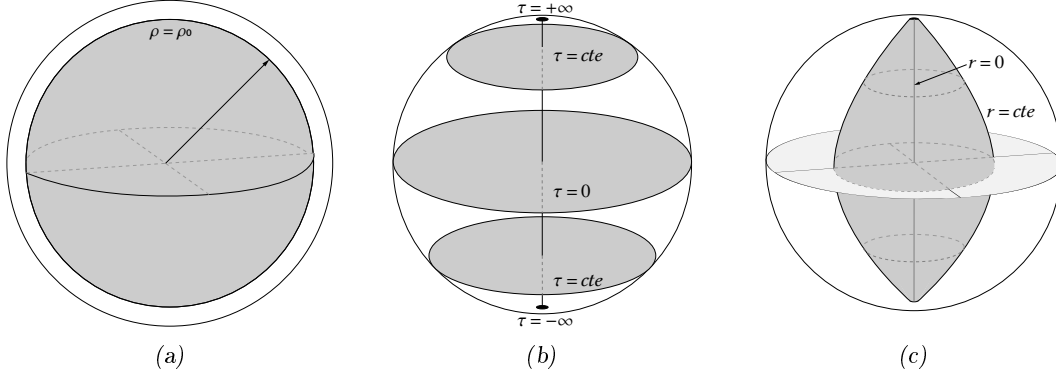


Fig. 3.6: Se compara la forma de poner una distancia de corte en coordenadas globales para H , definida como una superficie de nivel $\rho = \rho_0$ (a), con las superficies de nivel encontradas en el sección 2.1.2 para las coordenadas r (b) y τ (c).

A partir de la Fig. 3.6b, se puede ver que las superficies r constante no cubren los puntos $\tau = \pm\infty$. Aún así, la renormalización holográfica es válida usando las superficies de nivel de r .

Para comprobar esto debe mostrarse que la acción evaluada sobre las soluciones clásicas no diverge en $\tau = \pm\infty$. Si no fuese así, la acción renormalizada sería aún divergente, lo que impediría obtener observables finitos. Para comprobar esto, se debe considerar que el comportamiento asintótico de los campos para $\tau \rightarrow \pm\infty$ es $e^{\pm\omega\tau}$. Con este comportamiento, pedir que los campos no presenten singularidades en el espacio, fuerza a los campos a anularse en ambos puntos y por tanto también se anula el término de borde en $\tau \rightarrow \pm\infty$.

Por otro lado, recordando que la inserción de fuentes sobre la frontera conforme se aplican sobre una superficie r constante y que esta no contiene a los puntos $\tau = \pm\infty$, es necesario estudiar si esto no limita el espectro de estados que se pueden considerar dentro de la teoría de campos dual. Utilizando un argumento análogo al que se usa en [11] para llegar a la expresión 2.23, puede demostrarse que un estado de una teoría de campos que evoluciona sin interactuar desde $\tau = -\infty$, o hasta $\tau = +\infty$, solo puede ser proporcional al estado fundamental de la teoría. De esta forma, estos puntos resultan prescindibles para generar estados excitados de la teoría de campos. En consecuencia, la renormalización holográfica utilizando superficies de nivel de r es válida aún al insertar operadores sobre $\delta\mathcal{M}_0$ y $\delta\mathcal{M}_2$.

Soluciones sobre $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{M}_2$

En esta sección se mostrará en detalle cómo construir la solución del campo para $\mathcal{M}_0$ con condiciones de contorno $\psi_0(x)$ sobre el borde conforme. La solución para $\mathcal{M}_2$ se puede construir de forma análoga.

La acción y métrica para $\mathcal{M}_0$ son

$$S = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^0 d\tau \int dr d\varphi \sqrt{|g|} (\partial_\mu \Psi \partial^\mu \Psi + m^2 \Psi^2), \quad ds^2 = (1 + r^2) d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2 d\varphi^2$$

y la ecuación de movimiento en coordenadas e-globales

$$(\square - m^2)\Psi_0 = \left(\frac{1}{r} \partial_r \{r(1+r^2) \partial_r\} + \frac{\partial_t^2}{1+r^2} + \frac{\partial_\varphi^2}{r^2} - m^2 \right) \Psi_0 = 0.$$

Se propone $\Psi_0(r, t, \varphi) = e^{ik\varphi + i\omega\tau} h(\omega, k, r)$ con $k \in \mathbb{Z}$. Notar que se propone una expansión en ondas planas para τ . La ecuación para $h(\omega, k, r)$ es

$$\left(\frac{1}{r} \partial_r \{r(1+r^2) \partial_r\} - \frac{|\omega|^2}{1+r^2} - \frac{|k|^2}{r^2} - m^2 \right) h(|\omega|, |k|, r) = 0. \quad (3.27)$$

Esta ecuación diferencial puede transformarse en (3.16), bajo la transformación $\omega \rightarrow i\omega$. Las soluciones son también las mismas definidas en (3.17) pero bajo la misma transformación

$$h(|\omega|, |k|, r) = f(-i|\omega|, |k|, r) = A_1(1+r^2)^{-\frac{i|\omega|}{2}} r^{|k|} F\left(\frac{-i|\omega| + |k| + l + 1}{2}, \frac{-i|\omega| + |k| - l + 1}{2}; 1 + |k|; -r^2\right),$$

donde se ha descartado la segunda solución al pedir regularidad en el interior de $\mathcal{M}_0$.

El comportamiento asintótico en el límite $r \rightarrow \infty$ es

$$f(-i|\omega|, |k|, r) \sim [r^{-1-l} \alpha(-i|\omega|, k, l) \{\log(r^2) + \beta(-i|\omega|, k, l)\} + \dots + r^{-1+l} + \dots],$$

donde las funciones α y β fueron definidas en (3.20). Una diferencia entre esta solución y la encontrada para $\mathcal{M}_1$, es que los polos de la solución ya no están sobre el eje real, si no en los puntos $\omega = \pm i(2n + |k| + l + 1)$, como muestra la Fig. (3.7). Como consecuencia de esto, puede deducirse que no habrá necesidad de definir arbitrariamente un camino de integración, como sí tuvo que hacerse en la sección anterior.

Para imponer las condiciones de contorno $\psi_0(x)$ sobre el borde conforme, se define la función

$$\mathcal{K}_0(r, |\omega|, |k|) = \frac{f(-i|\omega|, |k|, r)}{f(-i|\omega|, |k|, R_0)}$$

de forma que una solución para el campo Ψ_0 puede escribirse

$$\Psi_0(r, \tau, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int d\omega e^{ik(\varphi - \varphi') + i\omega(\tau - \tau')} \psi_0(R_0, t', \varphi') \mathcal{K}_0(r, |\omega|, |k|), \quad (3.28)$$

que cumple $\Psi_0(R_0, \tau, \varphi) = R_0^{-1+l} \psi_0(\tau, \varphi)$.

Sin embargo, la solución (3.28) no es la más general posible para $\mathcal{M}_0$. Si sobre el borde conforme se exigen condiciones de contorno de Dirichlet, puede comprobarse que la ecuación (3.27) admite soluciones del tipo

$$\Psi_0(r, \tau, \varphi) = e^{ik\varphi + \omega\tau} f(|\omega|, |k|, r).$$

Como se mostró en la sección anterior, para $\omega = \pm(2n + |k| + l + 1)$ estas soluciones se anulan sobre el borde conforme, pero debido a la dependencia exponencial en τ , divergen en $\tau \rightarrow \pm\infty$.

Para $\mathcal{M}_0$, $\tau \in (-\infty, -T]$ de forma que la solución

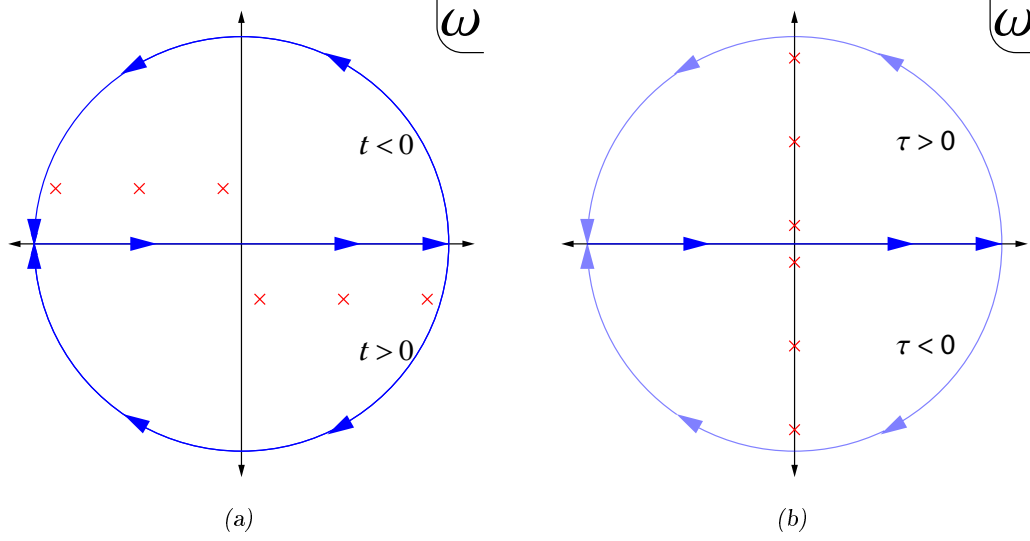


Fig. 3.7: En la figura se comparan los caminos de las integrales sobre el plano complejo ω para el caso de $\mathcal{M}_1$, de signatura lorentziana y $\mathcal{M}_0$ o $\mathcal{M}_2$, de signatura euclídea. En la primera, (a), es necesario correr los polos fuera del eje real. La configuración elegida, entre las infinitas, determina el propagador de la teoría. Para el caso euclídeo, (b), la integral está definida sobre el eje real y solo usa el teorema de residuos (la línea azul es más clara) para expandir la solución en la misma base que $\mathcal{M}_1$. El hecho de que se inviertan los signos entre las imágenes para los que se cierra por arriba y abajo es porque las soluciones lorentzianas $\propto e^{-i\omega t}$, mientras que en signatura euclídea $\propto e^{i\omega \tau}$.

$$\Psi_0(r, \tau, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int d\omega d\tau' d\varphi' e^{i\omega(\tau-\tau') + ik(\varphi-\varphi')} \psi_0(\tau', \varphi') \mathcal{K}_0(r, |\omega|, |k|) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} I_{nk} e^{+\omega_n |k| \tau + ik\varphi} g(\omega_n |k|, |k|, r), \quad (3.29)$$

que contiene una combinación lineal con coeficientes arbitrarios I_{nk} solamente con los modos normalizables que se anulan en el límite $\tau \rightarrow -\infty$, además de cumplir las condiciones de contorno $\Psi_0(R_0, \tau, \varphi) = R_0^{-1+l} \psi_0(\tau, \varphi)$.

Para $\mathcal{M}_2$, donde $\tau \in [T, \infty)$, una construcción análoga lleva a que la solución más general puede escribirse

$$\Psi_2(r, \tau, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int d\omega d\tau' d\varphi' e^{i\omega(\tau-\tau') + ik(\varphi-\varphi')} \psi_2(\tau', \varphi') \mathcal{K}_2(r, |\omega|, |k|) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} F_{nk} e^{-\omega_n |k| \tau + ik\varphi} g(\omega_n |k|, |k|, r), \quad (3.30)$$

donde F_{nk} son coeficientes arbitrarios.

Si $\mathcal{M}_0$ o $\mathcal{M}_2$ hubiesen comprendido $\tau \in (-\infty, \infty)$, la necesidad de que el campo sea regular en el interior de la variedad hubiese hecho que la adición de estas soluciones no fuesen aceptables. Esto recupera el resultado obtenido en la sección 3.1 de que para el espacio H la solución es única.

Continuidad de los campos y sus momentos conjugados

La prescripción indica que se deben unir estas soluciones en una única solución que cumpla las condiciones de borde en cada región por separado y que cumpla las condiciones I y II en las regiones $\mathcal{S}_{01}$ y $\mathcal{S}_{12}$. Es importante recordar que para evitar divergencias en la acción, la prescripción indica que las funciones ψ_i deben anularse suavemente al acercarse a las regiones $\mathcal{S}_{ij}$. Esto permitirá escribir los campos sobre estas hiper-superficies de forma que facilite imponer la continuidad de los campos y de sus momentos conjugados.

Considérese la solución (3.26) de $\mathcal{M}_1$ sobre $\mathcal{S}_{01}$, es decir, se evalúa el campo en $t = -T$. Si la fuente ψ_1 se anula suavemente al acercarse a $\mathcal{S}_{01}$, esto equivale a decir que $t' > -T$, donde t' es la variable sobre la que se integra en el primer término de (3.26). El mismo razonamiento para $\mathcal{S}_{12}$, restringe el dominio a $t' \in (-T, T)$. En estas condiciones, sobre $\mathcal{S}_{01}$ la diferencia $t - t' = -T - t' = -(T + t') < 0$ en la exponencial imaginaria del primer término de (3.26), de forma que puede calcularse la integral

$$\int_{\mathcal{F}} d\omega e^{i\omega(T+t')} \psi_1(R_0, t', \varphi') \mathcal{K}_1(r, \omega, k) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \psi_1(R_0, t', \varphi') e^{i\omega_{n|k|}^-(T+t')} g(\omega_{n|k|}^-, |k|, r),$$

tomando los polos negativos de la Fig. 3.5b. Definiendo

$$\tilde{\psi}_1(R_0, \omega_{n|k|}^\pm, k) \equiv \int dt' d\varphi' \psi_1(R_0, t', \varphi') e^{ik\varphi + i\omega_{n|k|}^\pm t'} = R_0^{l-1} \tilde{\psi}_1(\omega_{n|k|}^\pm, k), \quad (3.31)$$

se puede escribir (3.26) sobre $\mathcal{S}_{01}$ como

$$\Psi_1(r, -T, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\left(C_{nk}^- + \frac{1}{4\pi^2} \tilde{\psi}_1(R_0, \omega_{n|k|}^-, k) \right) e^{-i\omega_{n|k|}^- T} + C_{nk}^+ e^{i\omega_{n|k|}^+ T} \right] e^{ik\varphi} g(\omega_{n|k|}, |k|, r), \quad (3.32)$$

donde se usó explícitamente en las exponenciales que $\omega_{n|k|}^- = -\omega_{n|k|}^+ \equiv \omega_{n|k|}$. Un argumento similar sobre $\mathcal{S}_{12}$ muestra que solo las frecuencias positivas contribuyen en la integral del primer término de (3.26), de forma que

$$\Psi_1(r, T, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[C_{nk}^- e^{i\omega_{n|k|}^- T} + \left(C_{nk}^+ + \frac{1}{4\pi^2} \tilde{\psi}_1(R_0, \omega_{n|k|}^+, k) \right) e^{-i\omega_{n|k|}^+ T} \right] e^{ik\varphi} g(\omega_{n|k|}, |k|, r). \quad (3.33)$$

Expresiones similares pueden encontrarse para el momento conjugado del campo (3.26), así como también para los campos (3.29) y (3.30) y sus momentos conjugados sobre $\mathcal{S}_{01}$ y $\mathcal{S}_{12}$. Para la región $\mathcal{M}_0$, por ejemplo, evaluar el campo en $\tau = 0$ permite hacer la integral en el primer término de (3.29) mediante el teorema de residuos tomando los polos positivos de la Fig. 3.7b, de donde

$$\int d\omega e^{i\omega(\tau-\tau')} \mathcal{K}_0(r, |\omega|, |k|) = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\omega_{n|k|}(\tau-\tau')} g(\omega_{n|k|}, |k|, r).$$

Se define entonces

$$\bar{\psi}_0(R_0, \omega_{n|k|}, k) = \int_{-\infty}^0 d\tau' \int d\varphi' e^{\omega_{n|k|}\tau'} \psi_0(R_0, \tau', \varphi') = R_0^{l-1} \bar{\psi}_0(\omega_{n|k|}, k), \quad (3.34)$$

para escribir el campo sobre $\mathcal{S}_{01}$ como

$$\Psi_0(r, 0, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{1}{4\pi^2} \bar{\psi}_0(R_0, \omega_{n|k|}, k) e^{-\omega_{n|k|}\tau} + I_{nk} e^{\omega_{n|k|}\tau} \right] e^{ik\varphi} g(\omega_{n|k|}, |k|, r). \quad (3.35)$$

Por la ortogonalidad de las ondas planas y de las funciones $g(\omega_{n|k|}, |k|, r)$, las condiciones I y II para el formalismo In-Out

$$\begin{aligned} \Psi_0(r, 0, \varphi) &= \Psi_1(r, -T, \varphi) & \Psi_1(r, T, \varphi) &= \Psi_2(r, 0, \varphi) \\ \partial_\tau \Psi_0(r, \tau, \varphi) \Big|_{\tau=0} &= -i \partial_t \Psi_1(r, t, \varphi) \Big|_{t=-T} & -i \partial_t \Psi_1(r, t, \varphi) \Big|_{t=T} &= \partial_\tau \Psi_2(r, \tau, \varphi) \Big|_{\tau=0} \end{aligned} \quad (3.36)$$

forman el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_0 + I_{nk} &= C_{nk}^+ e^{i\omega T} + (C_{nk}^- + \tilde{\psi}_1^-) e^{-i\omega T} & (C_{nk}^+ + \tilde{\psi}_1^-) e^{-i\omega T} + C_{nk}^- e^{i\omega T} &= F_{nk} + \bar{\psi}_2 \\ \bar{\psi}_0 - I_{nk} &= C_{nk}^+ e^{i\omega T} - (C_{nk}^- + \tilde{\psi}_1^+) e^{-i\omega T} & (C_{nk}^+ + \tilde{\psi}_1^+) e^{-i\omega T} - C_{nk}^- e^{i\omega T} &= F_{nk} - \bar{\psi}_2, \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde $\omega = \omega_{n|k|}$ en las exponenciales, se omite la dependencia en $\omega_{n|k|}$ y k de las condiciones de contorno $\bar{\psi}_0$ y $\bar{\psi}_2$ por claridad y se define $\tilde{\psi}_1^\pm$ según se trate de la transformada de Fourier de ψ_1 con $\omega_{n|k|}^\pm$ en la exponencial.

La solución del sistema (3.37) es

$$\begin{aligned} C_{nk}^+ &= \frac{1}{4\pi^2} e^{-iT\omega} \bar{\psi}_0 & I_{nk} &= \frac{1}{4\pi^2} e^{-iT\omega} \tilde{\psi}_1^- + \frac{1}{4\pi^2} e^{-2iT\omega} \bar{\psi}_2 \\ C_{nk}^- &= \frac{1}{4\pi^2} e^{-iT\omega} \bar{\psi}_2 & F_{nk} &= \frac{1}{4\pi^2} e^{-iT\omega} \tilde{\psi}_1^+ + \frac{1}{4\pi^2} e^{-2iT\omega} \bar{\psi}_0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Estos coeficientes hacen que los campos Ψ_i , además de cumplir las ecuaciones de movimiento en cada región $\mathcal{M}_i$ y las condiciones de contorno sobre $\delta\mathcal{M}_i$, sean continuos y suaves al atravesar las regiones $\mathcal{S}_{ij}$. Este resultado muestra que un dato inicial/final no trivial es una función lineal de los campos en las fronteras euclídeas del espacio-tiempo. Más aún, muestra que no toda la información insertada sobre estas fronteras es relevante, si no que solamente contribuyen los modos normalizables de la teoría gravitatoria. Este comportamiento se repite para todas los casos estudiados y constituye uno de los principales resultados del presente trabajo.

Funciones de Correlación de $\mathcal{O}$

El siguiente paso de la prescripción es obtener las acciones evaluadas sobre las soluciones Ψ_i . La acción completa para la variedad $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ en el formalismo In-Out comprende 3 similares a los que se presentan en (3.13),

$$S = S_0 + S_1 + S_2 = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^0 d\tau_0 d\varphi_0 (1+r^2) \Psi_0 r \partial_r \Psi_0 - \frac{1}{2} \int_{-T}^T dt_1 d\varphi_1 (1+r^2) \Psi_1 r \partial_r \Psi_1 +$$

$$\frac{i}{2} \int_0^\infty d\tau_2 d\varphi_2 (1+r^2) \Psi_2 r \partial_r \Psi_2 = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} dt_C d\varphi (1+r^2) \Psi r \partial_r \Psi$$

donde el camino $\mathcal{C}$ en este caso corresponde al formalismo In-Out y se define

$$t_{\mathcal{C}} = \begin{cases} -T - i\tau_0 & \text{sobre } \mathcal{M}_0 \\ t & \text{sobre } \mathcal{M}_1 \\ T - i\tau_2 & \text{sobre } \mathcal{M}_2 \end{cases} \quad (3.39)$$

Debido a la linealidad del problema, la contribución de cada uno de estos términos a los observables calculados usando (3.14) se calculan de forma independiente. Entonces, en lugar de reemplazar las soluciones de los campos en las acciones S_i directamente, conviene estudiar cada factor en la expresión por separado.

Comenzando por S_1 , puede verse que el factor Ψ_1 que no está derivado es el campo evaluado sobre el borde que, por construcción, tiende a $\psi(R_0, t, \varphi)$ para $r \rightarrow R_0$. El factor $r \partial_r \Psi_1|_{r=R_0}$ debe estudiarse con más detalle y puede escribirse

$$r \partial_r \Psi_1 \Big|_{r=R_0} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{F}} d\omega dt' d\varphi' e^{ik(\varphi - \varphi') - i\omega(t - t')} \psi_1(R_0, t', \varphi') \{r \partial_r \mathcal{K}_1(r, \omega, k)\}_{r=R_0} +$$

$$\sum_{\pm} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{nk}^{\pm} e^{-i\omega_{n|k}^{\pm} t + ik\varphi} \{r \partial_r g(\omega_{n|k}^{\pm}, |k|, r)\}_{r=R_0}. \quad (3.40)$$

El comportamiento de $r \partial_r \mathcal{K}_1(r, \omega, k)|_{r=R_0}$ en el límite $R_0 \rightarrow \infty$ es

$$r \partial_r \mathcal{K}_1(r, \omega, k) \Big|_{r=R_0} \sim \{(l-1) + \dots\} + R_0^{-2l} \{2l\alpha(\omega, |k|, l)\beta(\omega, |k|, l) + \dots\}, \quad (3.41)$$

Donde los corchetes contienen dos series de potencias enteras de k . El primer grupo de corchetes contiene los términos de contacto descritos en la sección 3.1 y pueden removerse de la acción mediante la adición de contra-términos.

El comportamiento asintótico de $r \partial_r g(\omega_{n|k}^{\pm}, |k|, r)|_{r=R_0}$ es similar. Usando la definición (3.24) puede calcularse

$$r \partial_r g(\omega_{n|k}^{\pm}, |k|, r) \Big|_{r=R_0} \equiv \oint_{\omega_{n|k}^{\pm}} d\omega r \partial_r \mathcal{K}_1(r, \omega, k) \sim \{(-l-1) + \dots\} + R_0^{-2l} \{8\pi i l \alpha(\omega_{n|k}, |k|, l) + \dots\}. \quad (3.42)$$

En estas condiciones, todas las cantidades ya fueron evaluadas sobre la distancia de corte R_0 y ya no queda ninguna dependencia en la variable r . Debe mantenerse presente que los coeficientes de los modos normalizables $C_{nk}^{\pm}$, I_{nk} y F_{nk} obtenidos en (3.38) dependen linealmente de las fuentes $\psi_i(R_0, t/\tau, \varphi) = R_0^{-1+l} \psi_i(t/\tau, \varphi)$. Los términos del campo que contienen integrales sobre ω en los campos, como el primer

término de (3.26), son proporcionales a las fuentes por construcción y también tienen una dependencia R_0^{-1+l} . Ignorando los términos de contacto, la expresión (3.40) puede escribirse

$$r\partial_r \Psi_1 \Big|_{r=R_0} = R_0^{-2l} \left[\frac{l}{2\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{F}} d\omega dt' d\varphi' e^{ik(\varphi-\varphi')-i\omega(t-t')} \psi_1(R_0, t', \varphi') \alpha(\omega, |k|, l) \beta(\omega, |k|, l) \right. \\ \left. + \frac{2il}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(e^{i\omega_n |k| t} \bar{\psi}_0(R_0, \omega_{nk}, k) + e^{-i\omega_n |k| t} \bar{\psi}_2(R_0, \omega_{nk}, k) \right) e^{-iT\omega_n |k| + ik\varphi} \alpha(\omega_n |k|, |k|, l) + O(R_0^{-1}) \right],$$

o individualizando la contribución de cada ψ_i

$$r\partial_r \Psi_1 \Big|_{r=R_0} = R_0^{-2l} \left[\int dt' d\varphi' \psi_1(R_0, t', \varphi') \mathcal{P}_1(t', \varphi') + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\psi}_0(R_0, \omega_{nk}, k) \mathcal{P}_0(\omega_{nk}, k) \right. \\ \left. + \bar{\psi}_2(R_0, \omega_{nk}, k) \mathcal{P}_2(\omega_{nk}, k) \right], \quad (3.43)$$

donde se definen las funciones $\mathcal{P}_i$, cuya forma se estudiará más adelante.

Antes de estudiar los términos S_0 y S_2 , se mostrará que solo los términos de orden R^{-2l} en la expansión de todas las acciones contribuyen a la función de 1 punto en el límite $R_0 \rightarrow \infty$. Para mostrar esto, se considera la contribución de S_1 en (3.14). Usando la expansión (3.43) y recordando que debe tomarse la derivada funcional respecto de la fuente regularizada $\psi_1(R_0, t, \varphi) = R_0^{l-1} \psi_1(t, \varphi)^6$, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_1}{\delta \psi_1(t, \varphi)} &= R_0^{l-1} \frac{\delta S_1}{\delta \psi_1(R_0, t, \varphi)} = R_0^{l-1} \frac{\delta \left(-\frac{1}{2} \int_{\partial_r \mathcal{M}_1} dt_1 d\varphi_1 (1+r^2) \Psi_1 r \partial_r \Psi_1 \right)}{\delta \psi_0(R_0, t, \varphi)} \\ &= -\frac{1}{2} R_0^{l-1} \frac{\delta}{\delta \psi_1(R_0, t, \varphi)} \int_{\partial_r \mathcal{M}_1} dt_1 d\varphi_1 R_0^2 \psi_0(R_0, t, \varphi) r \partial_r \Psi_1 = \\ &= -\frac{1}{2} R_0^{-l+1} \frac{\delta}{\delta \psi_1(R_0, t, \varphi)} \int_{\partial_r \mathcal{M}_1} dt_1 d\varphi_1 \psi_1(R_0, t, \varphi) \left[\int dt' d\varphi' \psi_1(R_0, t', \varphi') \mathcal{P}_1(t', \varphi') \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\psi}_0(R_0, \omega_{nk}, k) \mathcal{P}_0(\omega_{nk}, k) + \bar{\psi}_2(R_0, \omega_{nk}, k) \mathcal{P}_2(\omega_{nk}, k) \right] \\ &= -\frac{1}{2} R_0^{-l+1} \left[2 \int dt' d\varphi' \psi_1(R_0, t', \varphi') \mathcal{P}_1(t', \varphi') + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\psi}_0(R_0, \omega_{nk}, k) \mathcal{P}_0(\omega_{nk}, k) \right. \\ &\quad \left. + \bar{\psi}_2(R_0, \omega_{nk}, k) \mathcal{P}_2(\omega_{nk}, k) \right] \end{aligned}$$

Ahora bien, cada una de las fuentes ψ_i está regularizada con R_0^{l-1} , lo que elimina exactamente el factor R_0^{-l+1} dando como resultado una contribución finita al tomar el límite $R_0 \rightarrow \infty$. Como se quería demostrar, los órdenes siguientes de (3.40) son al menos $O(R_0^{-1})$ y se anulan si $R_0 \rightarrow \infty$, de forma que no será necesario considerarlos. Finalmente, la contribución de S_1 a la función de 1 punto resulta

⁶ Este procedimiento se llevó a cabo en (3.7).

$$- \int dt' d\varphi' \psi_1(t', \varphi') \mathcal{P}_1(t, \varphi; t', \varphi') - \frac{1}{2} \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\psi}_0(\omega_{nk}, k) \mathcal{P}_0(t, \varphi; \omega_{nk}, k) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\psi}_2(\omega_{nk}, k) \mathcal{P}_2(t, \varphi; \omega_{nk}, k) \right]$$

Para el cálculo de las contribuciones de S_0 y S_2 , conviene considerar que la relación (3.14) indica que para obtener funciones de correlación del operador $\mathcal{O}$ se debe tomar la derivada funcional respecto de $\psi_1(R_0, t, \varphi)$, de forma que los términos independientes de dicha fuente pueden ignorarse. Considerando S_0 , se puede ver que

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{i}{2} \int_{\partial_r \mathcal{M}_0} d\tau_0 d\varphi_0 (1 + r^2) \Psi_0 r \partial_r \Psi_0 \\ &\approx \frac{i}{2} R_0^{-2l+2} \int d\tau_0 d\varphi_0 \psi_0(R_0, \tau_0, \varphi) \left[\int d\tau' d\varphi' \psi_0(R_0, \tau', \varphi') \mathcal{Q}_0(\tau', \varphi') \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \int dt_1 d\varphi_1 e^{-i\omega_{n|k|}t_1 - ik\varphi_1} R_0^{l-1} \psi_1(t_1, \varphi_1) \mathcal{Q}_1(\omega_{nk}, k) + \bar{\psi}_2(R_0, \omega_{nk}, k) \mathcal{Q}_2(\omega_{nk}, k) \right\} \right] \end{aligned}$$

donde se usó que $r\partial_r \Psi_0$ puede escribirse de forma análoga a la expansión (3.42) con funciones $\mathcal{Q}_i$ que se estudiarán más adelante. En la última expresión, solo uno de los términos es proporcional a la fuente de la región $\mathcal{M}_1$, de forma que las contribuciones de S_0 y S_2 a $\langle \mathcal{O} \rangle$ son

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{i}{2} (\bar{\psi}_0(\omega_{nk}, k) \mathcal{Q}_1(t, \varphi; \omega_{nk}, k) + \bar{\psi}_2(\omega_{nk}, k) \mathcal{R}_1(t, \varphi; \omega_{nk}, k)),$$

habiendo definido $\mathcal{R}_1$ como los factores que acompañan al término proporcional a $\psi_1(t_1, \varphi_1)$ en S_2 . Queda estudiar la forma de las funciones $\mathcal{P}_i$, $\mathcal{Q}_1$ y $\mathcal{R}_1$. Estas contribuciones cumplen las relaciones

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\psi}_0(\omega_{nk}, k) \mathcal{Q}_1(t, \varphi; \omega_{nk}, k) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\psi}_0(\omega_{nk}, k) \mathcal{P}_0(t, \varphi; \omega_{nk}, k)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\psi}_2(\omega_{nk}, k) \mathcal{R}_1(t, \varphi; \omega_{nk}, k) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\psi}_2(\omega_{nk}, k) \mathcal{P}_2(t, \varphi; \omega_{nk}, k)$$

y tienen la forma

$$\begin{aligned} \psi_1(t', \varphi') \mathcal{P}_1(t, \varphi; t', \varphi') &= \frac{l}{2\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{F}} d\omega \psi_1(t', \varphi') e^{-i\omega(t-t') + ik(\varphi-\varphi')} \alpha(\omega, |k|, l) \beta(\omega, |k|, l) \\ \bar{\psi}_0(\omega_{nk}, k) \mathcal{P}_0(t, \varphi; \omega_{nk}, k) &= \frac{il}{\pi} \int d\tau_0 d\varphi_0 \psi_0(\tau_0, \varphi_0) e^{\omega_{n|k|}(\tau_0 - iT)} e^{-i\omega_{n|k|}t + ik(\varphi - \varphi_0)} \alpha(\omega_{n|k|}, |k|, l) \\ \bar{\psi}_2(\omega_{nk}, k) \mathcal{P}_2(t, \varphi; \omega_{nk}, k) &= \frac{il}{\pi} \int d\tau_2 d\varphi_2 \psi_2(\tau_2, \varphi_2) e^{-\omega_{n|k|}(\tau_2 + iT)} e^{-i\omega_{n|k|}t + ik(\varphi - \varphi_2)} \alpha(\omega_{n|k|}, |k|, l). \end{aligned}$$

Los factores $(\tau_0 - iT) = i(-T - i\tau_0)$ y $(\tau_2 + iT) = i(T - i\tau_2)$ en las exponenciales reales reconstruyen t_C definido en (3.39) que es el que parametriza la curva en la Fig. 3.4a. . Volviendo sobre esta variable, se reabsorbe el factor $-i$ que aparecía entre las acciones lorentzianas y euclídeas y sus contribuciones se suman.

Finalmente, usando (3.14), la función de 1 punto para estados no triviales $|i\rangle$ y $|f\rangle$ puede escribirse

$$\begin{aligned}
\langle f | \mathcal{O}(t, \varphi) | i \rangle &= \frac{\delta S}{\delta \psi_1(t, \varphi)} \\
&= \frac{l}{2\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{F}} d\omega dt' d\varphi' \psi_1(t', \varphi') e^{-i\omega(t-t') + ik(\varphi - \varphi')} \alpha(\omega, |k|, l) \beta(\omega, |k|, l) \\
&\quad + \frac{2l}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \{ \bar{\psi}_0(\omega_{nk}, k) e^{i\omega_{n|k|}t} + \bar{\psi}_2(\omega_{nk}, k) e^{-i\omega_{n|k|}t} \} e^{ik\varphi} \alpha(\omega_{n|k|}, |k|, l).
\end{aligned} \tag{3.44}$$

donde se redefinieron $\bar{\psi}_0$ y $\bar{\psi}_2$ como

$$\bar{\psi}_0(\omega_{nk}, k) = -i \int_{-\infty}^0 d\tau' \int d\varphi' e^{\omega_{n|k|}(\tau' - iT)} \psi_0(\tau', \varphi') = \int_{\mathcal{M}_0} dt_C \int d\varphi' e^{-i\omega_{n|k|}t_C} \psi_0(t_C, \varphi')$$

y

$$\bar{\psi}_2(\omega_{nk}, k) = -i \int_0^{\infty} d\tau' \int d\varphi' e^{\omega_{n|k|}(-\tau' - iT)} \psi_2(\tau', \varphi') = \int_{\mathcal{M}_2} dt_C \int d\varphi' e^{-i\omega_{n|k|}t_C} \psi_2(t_C, \varphi'),$$

redefiniciones similares no serán necesarias en los ejemplos de aplicación en los formalismos In-In y Térmico puesto que las regiones euclídeas tienen componente real nula.

El resultado (3.44) muestra que incluso en ausencia de fuentes sobre $\partial_r \mathcal{M}_1$, la función de 1 punto es no nula debido a las contribuciones de las regiones $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{M}_2$, como se espera de un valor de expectación entre estados no triviales.

La función de 2 puntos $\langle f | \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y) | i \rangle$ calculada a partir de (3.14) es

$$\begin{aligned}
\langle f | \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y) | i \rangle &= \frac{l}{2\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{F}} d\omega e^{-i\omega(t-t') + ik(\varphi - \varphi')} \alpha(\omega, |k|, l) \beta(\omega, |k|, l) \\
&= \frac{1}{2^l \pi} \frac{l^2}{[\cos((t_y - t_x)(1 - i\epsilon)) - \cos(\varphi_y - \varphi_x)]^{l+1}}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

que es el mismo resultado que obtienen los autores Skenderis y van Rees en [8] para la función de 2 puntos de $\mathcal{O}$ entre estados de vacío. Demostrar que (3.45) es equivalente a (2.36) para comprobar que la prescripción permite obtener correctamente los propagadores de una teoría conforme requiere de un cambio de coordenadas que se realiza en el Apéndice B.

El cálculo de la función de 2 puntos para $\mathcal{O}$ arroja el mismo resultado independientemente de la presencia o no de fuentes $\bar{\psi}_0(\omega_{nk}, k)$ y $\bar{\psi}_2(\omega_{nk}, k)$. Esto es porque el único término proporcional a $\psi_1(t, \varphi)$ en la la función de 1 punto es el que aparece en el segundo renglón de la expresión (3.44). Esta pérdida de información en las funciones de n puntos con $n > 1$ se origina al haber tomado acciones cuadráticas en los campos, como se explica a continuación.

De forma general, el cálculo de una función generatriz $\mathcal{Z}$ a partir de una acción cuadrática en el campos ψ hace que todas las funciones de n puntos con $n > 2$ sean nulas. Esto es, cualquier teoría con acción cuadrática es una teoría sin interacciones que se propaga libre en el espacio. Según la ecuación (2.43) las funciones generatrices de las teorías de campos y gravitatoria son iguales. Luego, las funciones de n puntos de $\mathcal{O}$ y ψ estarán relacionadas. Concretamente, si ψ tiene una acción cuadrática y libre, entonces cualquier función de j puntos, con $j > 2$ de $\mathcal{O}$ también será nula.

De haber considerado un estado inicial y final iguales en (3.44), una condición necesaria para un valor de expectación es que el mismo debe ser real. El término con la integral se anula al tomar el límite $\psi_1 \rightarrow 0$ y considerando la ortogonalidad de las ondas planas y de las funciones $\alpha(\omega_{n|k|}, |k|, l)$, la condición de realidad exige

$$\{\bar{\psi}_0(\omega_{nk}, k)e^{i\omega_{n|k|}t} + \bar{\psi}_2(\omega_{nk}, k)e^{-i\omega_{n|k|}t}\} = \{\bar{\psi}_0^\dagger(\omega_{nk}, -k)e^{-i\omega_{n|k|}t} + \bar{\psi}_2^\dagger(\omega_{nk}, -k)e^{i\omega_{n|k|}t}\},$$

que solo se cumple si

$$\bar{\psi}_0(\omega_{nk}, k) = \bar{\psi}_2^\dagger(\omega_{nk}, -k)$$

o equivalentemente

$$\psi_0(-\tau, \varphi) = \psi_2^\dagger(\tau, \varphi),$$

donde el signo relativo entre las variables τ proviene de que ψ_0 está definida para $\tau < 0$, mientras que ψ_2 está definida para $\tau > 0$.

Una propuesta natural para los estados del espacio de la teoría de campos dual que pueden alcanzarse con este método es

$$|\psi_{0/2}\rangle = e^{\int_{\partial\mathcal{M}_{0/2}} \mathcal{O}^{\psi_{0/2}}} |0\rangle$$

que se desprende eurísticamente de la fórmula (3.10). Los resultados encontrados en este trabajo son consistentes con esta expresión y, como se dijo anteriormente, muestran que solo los estados asociados con excitaciones escalares en la teoría gravitatoria dual son relevantes.

3.3.2. Formalismo In-In

El formalismo In-In, mostrado en la Fig. (3.8a), difiere con el In-Out en que posee 2 secciones de signatura lorentziana que forman un camino cerrado en el tiempo del tipo de Schwinger-Keldysh. Se asigna a cada tramo horizontal una variedad AdS_3 (cuyos tiempos fluyen en dirección opuesta) y a cada tramo vertical media esfera H_3 , como se muestra en la Fig. (3.8b), donde también se define la nomenclatura que se usará para esta sección.

Como se describió en la sección 2.2.2, este formalismo tiene una matriz 2×2 de correladores que proviene de la duplicación de los grados de libertad al tomar una curva cerrada en el tiempo. Desde la dualidad, la duplicación de los grados de libertad se realiza considerando los campos Ψ_1 y Ψ_2 como grados de libertad independientes, además de imponer condiciones de contorno ψ_1 y ψ_2 sobre los bordes conformes de $\partial_r\mathcal{M}_1$ y $\partial_r\mathcal{M}_2$ también independientes una de otra. Luego, las distintas funciones de 2 puntos de la teoría se obtienen tomando la derivada funcional respecto de las fuentes ψ_1 y ψ_2 en distintos órdenes como se muestra en (2.31).

Para tener en cuenta dentro de la prescripción la región $\mathcal{M}_2$, donde el tiempo va en sentido inverso se puede definir, por ejemplo

$$t_C = \begin{cases} -i\tau_0 & \text{sobre } \mathcal{M}_0 & \tau_0 \in (-\infty, 0] \\ t_1 & \text{sobre } \mathcal{M}_1 & t_1 \in [0, T] \\ 2T - t_2 & \text{sobre } \mathcal{M}_2 & t_2 \in [T, 2T] \\ -i\tau & \text{sobre } \mathcal{M}_3 & \tau_3 \in [0, \infty) \end{cases}$$

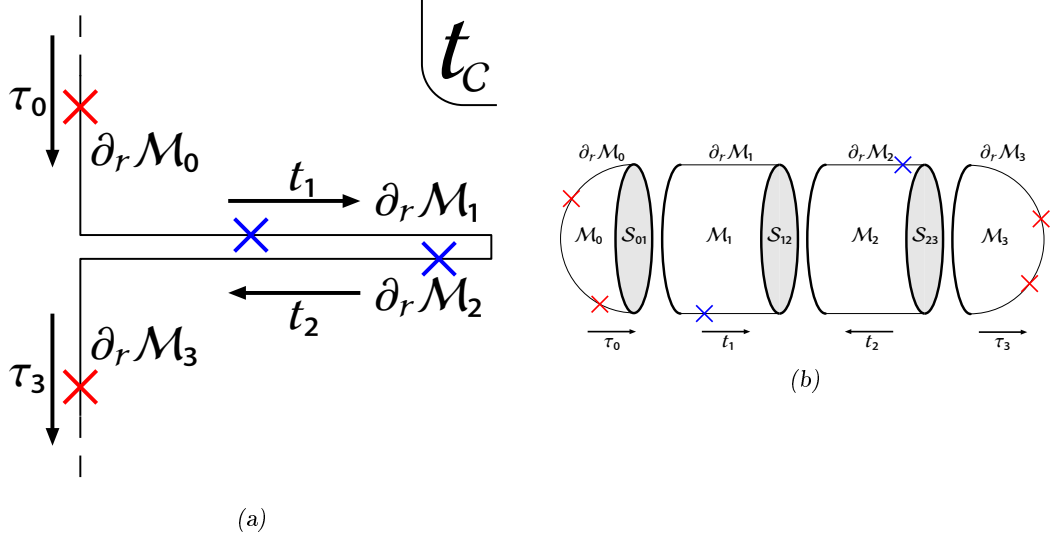


Fig. 3.8: Se muestra cómo se construye la interpretación holográfica del camino In-In. Cada tramo vertical y horizontal de (a) se asocia con una sección de H_3 y AdS_3 respectivamente en (b). Las regiones $\mathcal{M}_i$ tienen frontera conforme $\partial_r \mathcal{M}_i$ y se unen a otras en las superficies S_{ij} .

de forma que la acción para este formalismo se escribe

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + S_3 = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^0 d\tau_0 d\varphi_0 (1+r^2) \Psi_0 r \partial_r \Psi_0 - \frac{1}{2} \int_0^T dt_1 d\varphi_1 (1+r^2) \Psi_1 r \partial_r \Psi_1 \\ + \frac{1}{2} \int_T^{2T} dt_2 d\varphi_2 (1+r^2) \Psi_2 r \partial_r \Psi_2 + \frac{i}{2} \int_0^\infty d\tau_3 d\varphi_3 (1+r^2) \Psi_3 r \partial_r \Psi_3$$

Este cambio de signo al atravesar la superficie S_{12} afecta la condición II, dado que la derivada temporal de un lado adquiere un signo relativo respecto del otro. Lo mismo sucede en S_{23} , se pedirá continuidad de los campos y del momento conjugado, pero a este último se le agrega un signo negativo del lado lorentziano. Las condiciones de contorno sobre S_{12} y S_{23} son

$$\begin{aligned} \Psi_1 \Big|_{S_{12}} &= \Psi_2 \Big|_{S_{12}} & \Psi_2 \Big|_{S_{23}} &= \Psi_3 \Big|_{S_{23}} \\ \partial_t \Psi_1 \Big|_{S_{12}} &= -\partial_t \Psi_2 \Big|_{S_{12}} & i\partial_t \Psi_2 \Big|_{S_{23}} &= \partial_\tau \Psi_3 \Big|_{S_{23}}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

mientras que las condiciones de contorno sobre S_{01} son idénticas a las de la sección anterior

$$\begin{aligned} \Psi_0 \Big|_{S_{01}} &= \Psi_1 \Big|_{S_{01}} \\ \partial_\tau \Psi_0 \Big|_{S_{01}} &= -i\partial_t \Psi_1 \Big|_{S_{01}} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Dado que las variedades son las mismas en este formalismo que en la sección 3.3.1, la construcción de las soluciones para los campos es análoga al procedimiento llevado a cabo en dicha sección. Las soluciones sobre $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ son

$$\begin{aligned} \Psi_{1/2}(r, t_{1/2}, \varphi_{1/2}) &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{F}} d\omega \int dt' \int d\varphi' e^{-i\omega(t_{1/2}-t') + ik(\varphi_{1/2}-\varphi')} \psi_i(t', \varphi') f(\omega, |k|, r) \\ &\quad + \sum_{\pm} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{1/2;nk}^{\pm} e^{-i\omega_{n|k|}^{\pm} t + ik\varphi} g(\omega_{n|k|}^{\pm}, |k|, r) \end{aligned} \quad (3.48)$$

y las de $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{M}_3$ como

$$\begin{aligned} \Psi_{0/3}(r, \tau_{0/3}, \varphi_{0/3}) &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int d\omega \int dt' \int d\varphi' e^{i\omega(\tau_{0/3}-\tau') + ik(\varphi_{0/3}-\varphi')} \psi_{0/3}(\tau', \varphi') f(-i\omega, |k|, r) \\ &\quad + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{0/3;nk} e^{\pm i\omega_{n|k|} \tau_{0/3} + ik\varphi_{0/3}} g(\omega_{n|k|}, |k|, r), \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde los coeficientes han sido renombrados $C_{i;nk}$, donde i indica la región a la que pertenecen y el signo $\pm$ de las exponenciales reales en τ del segundo renglón en (3.49) corresponde a las variedades $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{M}_3$ respectivamente.

Al igual que en la sección 3.3.1, antes de imponer las condiciones de contorno (3.46) y (3.47), conviene notar que cerca de las superficies $\mathcal{S}_{ij}$ las integrales sobre ω en (3.48) y (3.49) pueden realizarse dependiendo si $\mathcal{S}_{ij}$ está ubicada *antes* o *después* de las fuentes para obtener expresiones análogas a (3.32), (3.33) y (3.35). El sistema de ecuaciones (3.46) y (3.47) determina los coeficientes de las soluciones como

$$\begin{aligned} C_{1;nk}^+ &= \frac{1}{4\pi^2} \bar{\psi}_E & C_{1;nk}^- &= \frac{1}{4\pi^2} \left(-e^{-i2\omega_{n|k|} T} \tilde{\psi}_2^+ + \bar{\psi}_E \right) \\ C_{2;nk}^+ &= \frac{1}{4\pi^2} \left(-\tilde{\psi}_2^+ + e^{i2\omega_{n|k|} T} \bar{\psi}_E \right) & C_{2;nk}^- &= \frac{1}{4\pi^2} \left(e^{-i2\omega_{n|k|} T} [\bar{\psi}_E + \tilde{\psi}_1^+] - \tilde{\psi}_2^- \right) \\ C_{0;nk} &= \frac{1}{4\pi^2} \left(\tilde{\psi}_1^- - e^{-i2\omega_{n|k|} T} \tilde{\psi}_2^+ + \bar{\psi}_E \right) & C_{3;nk} &= \frac{1}{4\pi^2} \left(\bar{\psi}_E + \tilde{\psi}_1^+ - e^{i2\omega_{n|k|} T} \tilde{\psi}_2^- \right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{1/2}^{\pm} &= \tilde{\psi}_{1/2}(R_0, \omega_{n|k|}^{\pm}, k) \equiv \int dt' d\varphi' \psi_{1/2}(R_0, t', \varphi') e^{ik\varphi + i\omega_{n|k|}^{\pm} t'} = R_0^{l-1} \tilde{\psi}_{1/2}^{\pm}(\omega_{n|k|}^{\pm}, k), \\ \bar{\psi}_0 &= \bar{\psi}_0(R_0, \omega_{n|k|}, k) = \int_{-\infty}^0 d\tau' \int d\varphi' e^{\omega_{n|k|} \tau'} \psi_0(R_0, \tau', \varphi') = R_0^{l-1} \bar{\psi}_0(\omega_{n|k|}, k) \\ \bar{\psi}_3 &= \bar{\psi}_3(R_0, \omega_{n|k|}, k) = \int_0^{\infty} d\tau' \int d\varphi' e^{-\omega_{n|k|} \tau'} \psi_3(R_0, \tau', \varphi') = R_0^{l-1} \bar{\psi}_3(\omega_{n|k|}, k) \end{aligned}$$

Repetiendo el procedimiento de la sección anterior, puede calcularse la contribución de ψ_2 sobre la función de 1 punto en $\mathcal{M}_1$

$$-\frac{2l}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int dt' d\varphi' \psi_2(t', \varphi') e^{-i\omega((2T-t_2)-t_1)+ik(\varphi-\varphi')} \alpha(\omega_{n|k|}, |k|, l). \quad (3.51)$$

Se observa que el factor que aparece en la exponencial es $2T-t_2 = t_C$, de forma que $(2T-t_2)-t_1 = \Delta_t$ es el intervalo temporal entre la inserción de la fuente $\psi_2(t', \varphi')$ y el tiempo de observación t_1 . Con esta interpretación, el factor $e^{-i2\omega T}$ no genera problemas al tomar el límite $T \rightarrow \infty$.

La función de 1 punto sobre $\mathcal{M}_1$ resulta

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(t, \varphi) \rangle &= \frac{\delta S}{\delta \psi_1(t, \varphi)} \\ &= \frac{l}{2\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{F}} d\omega dt' d\varphi' \psi_1(t', \varphi') e^{-i\omega(t-t')+ik(\varphi-\varphi')} \alpha(\omega, |k|, l) \beta(\omega, |k|, l) \\ &\quad + \frac{2l}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \{ \bar{\psi}_0(\omega_{nk}, k) e^{i\omega_{n|k|}t} + \bar{\psi}_2(\omega_{nk}, k) e^{-i\omega_{n|k|}t} \} e^{ik\varphi} \alpha(\omega_{n|k|}, |k|, l) \\ &\quad + \frac{2l}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int dt' d\varphi' \psi_2(t', \varphi') e^{-i\omega_{n|k|}\Delta_t+ik(\varphi-\varphi')} \alpha(\omega_{n|k|}, |k|, l). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Nuevamente, cualquier inserción de fuentes en otras regiones se pierde al calcular funciones de 2 puntos a causa de haber considerado teorías libres.

Otra observación acerca de (3.50) es que los coeficientes $C_{2;nk}^{\pm}$ son proporcionales a la fuente sobre la misma variedad $\psi_2(t', \varphi')$ y que esto no ocurre para ningún otro coeficiente. Un poco de análisis muestra que estos términos contribuyen al propagador sobre la región $\mathcal{M}_2$ dado que aportan términos cuadráticos en ψ_2 a la acción S_2 . Para interpretar esto, se debe regresar a la solución para el campo (3.25), donde aún no se había definido el camino de integración de Feynman para la integral sobre ω . La elección de un camino de integración particular es, en principio, arbitraria. Sin embargo, la elección de un camino determinado modifica también las ecuaciones que resultan de las condiciones I y II. Observando (3.38) puede comprobarse que los coeficientes $C_{nk}^{\pm}$ se anulan si $\psi_0 = \psi_2 = 0$, pero esto no sería así para ninguna otra elección de camino que no hubiese sido el de Feynman en (3.25). Dicho de otro modo, una elección particular de camino al integrar sobre ω “sugiere” un ordenamiento temporal dado. Si este ordenamiento es el correcto, como era el caso del camino de Feynman para el formalismo In-Out, los coeficientes de dicha región se anularán en ausencia de fuentes sobre otras regiones. En el caso de $\mathcal{M}_2$, ambos términos $-\bar{\psi}_2^{\pm}$ en (3.50) muestran que siempre que la integral sobre ω tome los polos negativos, estos se cancelarán con $-\bar{\psi}_2^{-}$, dejando solamente los polos $-\bar{\psi}_2^{+}$ y viceversa. Este comportamiento, enteramente opuesto al de Feynman, es conocido como camino de Dyson y es el esperado en (2.32) para un propagador sobre $\mathcal{M}_2$.

Los propagadores en $\mathcal{M}_2$ para fuentes sobre $\mathcal{M}_1$ dan propagadores avanzados [8], mientras que la inserción de una fuente en $\mathcal{M}_2$ se propaga a $\mathcal{M}_1$ de la forma

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{O}(t_2, \varphi_2) \mathcal{O}(t_1, \varphi_1) | 0 \rangle &= \frac{\delta^2 S}{\delta \psi_2(t_2, \varphi_2) \delta \psi_1(t_1, \varphi_1)} \\ &= \frac{l}{2\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_R d\omega e^{-i\omega(t-t')+ik(\varphi-\varphi')} \alpha(\omega, |k|, l) \beta(\omega, |k|, l) \\ &= \frac{2l}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{+i\omega_{n|k|}(t_2-t_1)+ik(\varphi_2-\varphi_1)} \alpha(\omega_{n|k|}, |k|, l) \\ &= \frac{l^2}{2^l \pi} [\cos((t_2 - t_1) + i\epsilon) - \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]^{-l-1}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

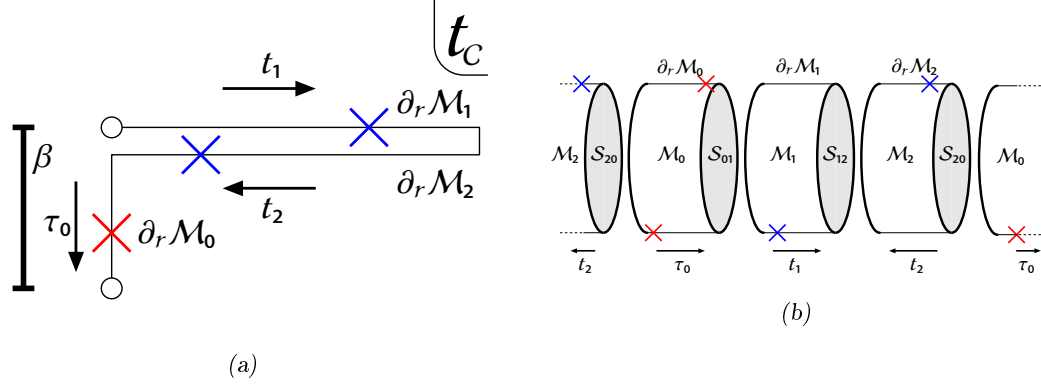


Fig. 3.9: Se muestra el camino del formalismo Térmico (a) y su espacio holográfico (b), creado según la prescripción. Los círculos en (a) indican que los puntos están identificados, cerrando el camino para este formalismo. Desde la teoría gravitacional, la variedad $\mathcal{M}_0$ conecta con ambas regiones lorentzianas.

donde el subíndice R en el segundo renglón indica que todos los polos sobre el eje real se evitan por encima[11]. El signo de la contribución $i\epsilon$ confirma que (3.53) es un propagador retardado.

3.3.3. Formalismo Térmico

El tercer ejemplo de aplicación se realiza sobre el formalismo Térmico. Como se explicó en la sección 2.2.2, este camino representa una teoría de campos a temperatura $T = \beta^{-1}$ no nula, donde β es la longitud del tramo euclídeo que se muestra en la Fig. 3.9a. La variedad dual, presentada en la Fig. (3.9b) requiere de una sección finita de signatura euclídea finita. Las funciones de 1 punto en este formalismo se interpretan como valores de expectación $\langle \mathcal{O} \rangle$ del operador $\mathcal{O}$ para la matriz densidad ρ generada por las fuentes sobre $\partial_r \mathcal{M}_0$. La hipótesis del trabajo indica que la ubicación de fuentes arbitrarias sobre esta región genera una matriz densidad de estados desplazada del equilibrio $\rho \neq e^{-\beta H}$. Las regiones $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ no presentan diferencias respecto de la sección anterior.

La coordenada t_C general para este formalismo puede definirse

$$t_C = \begin{cases} t_1 & \text{sobre } \mathcal{M}_1 & t_1 \in [0, T] \\ 2T - t_2 & \text{sobre } \mathcal{M}_2 & t_2 \in [T, 2T] \\ -i\tau_0 & \text{sobre } \mathcal{M}_0 & \tau_0 \in [0, \beta] \end{cases}$$

Las soluciones sobre $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$, son nuevamente de la forma (3.48). El hecho de que $\mathcal{M}_0$ no contenga los puntos $\tau = \pm\infty$, hace que la solución del campo $\mathcal{M}_0$ admita todos los modos normalizables $e^{\pm\omega_n|k|\tau}$. Luego, el campo sobre $\mathcal{M}_0$ es

$$\begin{aligned} \Psi_0(r, \tau, \varphi) = & \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int d\omega \int dt' \int d\varphi' e^{i\omega(\tau - \tau') + ik(\varphi - \varphi')} \psi_0(\tau', \varphi') f(-i\omega, |k|, r) \\ & + \sum_{\pm} \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{0, mk}^{\pm} e^{\pm\omega_m|k|\tau + ik\varphi} g(\omega_m|k|, |k|, r). \end{aligned}$$

Las condiciones I y II para este formalismo puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\Psi_1(r, t = T, \varphi) &= \Psi_2(r, t = T, \varphi) & i\partial_t \Psi_1 \Big|_{t=T} &= -i\partial_t \Psi_2 \Big|_{t=T} \\
\Psi_2(r, t = 0, \varphi) &= \Psi_0(r, \tau = 0, \varphi) & i\partial_t \Psi_2 \Big|_{t=0} &= \partial_\tau \Psi_0 \Big|_{\tau=0} \\
\Psi_0(r, \tau = \beta, \varphi) &= \Psi_1(r, t = 0, \varphi) & i\partial_t \Psi_0 \Big|_{\tau=\beta} &= \partial_\tau \Psi_1 \Big|_{t=0}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Este sistema de ecuaciones determina los coeficientes como

$$\begin{aligned}
C_{1;mk}^+ &= \frac{n}{4\pi^2} \left(\bar{\psi}_0^- + \tilde{\psi}_1^+ - e^{i2\omega_{m|k|}T} \tilde{\psi}_2^- \right) \\
C_{1;mk}^- &= \frac{1}{4\pi^2} \left((n+1)\bar{\psi}_0^+ + n\tilde{\psi}_1^- + (n+1)e^{-i2\omega_{m|k|}T} \tilde{\psi}_2^+ \right) \\
C_{2;mk}^+ &= \frac{1}{4\pi^2} \left(e^{i2\omega_{m|k|}T} [(n+1)\bar{\psi}_0^+ + n\tilde{\psi}_1^-] - (n+1)\tilde{\psi}_2^+ \right) \\
C_{2;mk}^- &= \frac{1}{4\pi^2} \left(e^{-i2\omega_{m|k|}T} [n\bar{\psi}_0^- + (n+1)\tilde{\psi}_1^+] - (n+1)\tilde{\psi}_2^- \right) \\
C_{0;mk}^+ &= \frac{n}{4\pi^2} \left(\bar{\psi}_0^- + \tilde{\psi}_1^- - e^{i2\omega_{m|k|}T} \tilde{\psi}_2^+ \right) \\
C_{0;mk}^- &= \frac{1}{4\pi^2} \left(n\bar{\psi}_0^+ + (n+1)[\tilde{\psi}_1^+ - e^{-i2\omega_{m|k|}T} \tilde{\psi}_2^-] \right)
\end{aligned} \tag{3.55}$$

donde se define $n = (e^{\beta\omega_{m|k|}} - 1)^{-1}$ y donde en este caso

$$\bar{\psi}_0^\pm = \bar{\psi}_0^\pm(\omega_{m|k|}, k) = \int_0^\beta d\tau d\varphi \psi_0(\tau, \varphi) e^{\mp i\omega_{m|k|}\tau + ik\varphi}$$

Al igual que en la sección 3.3.2, se obtienen contribuciones a los coeficientes $C_{2;mk}^\pm$ que indican que el propagador sobre $\mathcal{M}_2$ es el de Dyson, en lugar del de Feynman. El valor de expectación de un operador sobre $\delta\mathcal{M}_1$ tiene la forma

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{O}(t, \varphi) \rangle &= \langle i|\mathcal{O}(t, \varphi)|i \rangle = \frac{\delta S}{\delta \psi_1(t, \varphi)} \\
&= \frac{l}{2\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{F}} d\omega dt' d\varphi' \psi_1(t', \varphi') e^{-i\omega(t-t') + ik(\varphi - \varphi')} \alpha(\omega, |k|, l) \beta(\omega, |k|, l) \\
&\quad + \frac{2l}{\pi} \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\int_{\mathcal{F}} d\omega dt' d\varphi' \psi_1(t', \varphi') n \alpha(\omega_{m|k|}, |k|, l) e^{\pm i\omega_{m|k|}(t-t') + ik\varphi} \right. \\
&\quad + \left\{ n\bar{\psi}_0^-(\omega_{m|k|}, k) e^{-i\omega_{m|k|}t} + (n+1)\bar{\psi}_0^+(\omega_{m|k|}, k) e^{i\omega_{m|k|}t} \right\} e^{ik\varphi} \alpha(\omega_{m|k|}, |k|, l) \cdot \\
&\quad \left. + \int dt' d\varphi' \psi_2(t', \varphi') \left\{ n e^{-i\omega_{m|k|}\Delta t} + (n+1) e^{i\omega_{m|k|}\Delta t} \right\} e^{ik(\varphi - \varphi')} \alpha(\omega_{m|k|}, |k|, l) \right]
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Este resultado sugiere que la inserción de fuentes sobre la sección euclídea genera matrices densidad distintas de la de equilibrio.

La función de 2 puntos sobre $\mathcal{M}_1$ es

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \mathcal{O}(t_1, \varphi_1) \mathcal{O}(t_2, \varphi_2) | 0 \rangle &= -2li \frac{S}{\delta\psi_1(t_2, \varphi_2) \delta\psi_1(t_1, \varphi_1)} \\
&= \frac{l}{2\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{F}} d\omega e^{-i\omega(t_2 - t_1) + ik(\varphi_2 - \varphi_1)} \alpha(\omega, |k|, l) \beta(\omega, |k|, l) \\
&\quad + \frac{2l}{\pi} \sum_{\pm} \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} n \alpha(\omega_m |k|, |k|, l) e^{\pm i\omega_m |k| (t_2 - t_1) + ik(\varphi_2 - \varphi_1)} \\
&= \frac{l^2}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{N}} [\cos((t_2 - t_1)(1 - i\epsilon) + im\beta) - \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]^{-l-1}.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

El factor $1 - i\epsilon$ indica que (3.57) es un propagador de Feynman, como se esperaba sobre $\mathcal{M}_1$ a partir de lo expuesto en la sección 2.2.2. Los términos en el tercer renglón, tienen la forma de un baño térmico sobre el sistema⁷. En el límite $\beta \rightarrow \infty$, la contribución del baño en (3.57) se anula, recuperando el propagador (3.45).

3.3.4. *AdS en Coordenadas de Poincaré*

Como último ejemplo de aplicación se presenta el formalismo In-Out en coordenadas de Poincaré. Esto permitirá observar la prescripción funcionar en dimensión d arbitraria además de obtener directamente la expresión (2.36) para el propagador del operador $\mathcal{O}$. Es conveniente resaltar que las variables t y τ usadas para esta sección refieren a las coordenadas de Poincaré presentadas en las secciones 2.1.1 y 2.1.2 y no son equivalentes a las usadas en los ejemplos anteriores.

El camino In-Out se vuelve a mostrar en la Fig. 3.10a para ser comparado con la variedad sobre la que se describe la teoría gravitatoria dual, mostrada en la Fig. 3.10b. La sección lorentziana que representa $\delta\mathcal{M}_1$, es un segmento $t \in [-T, T]$ del parche de Poincaré. A la derecha del espacio dual en la Fig. 3.10b se muestra el espacio completo *AdS*, el parche de Poincaré en gris claro y la región $\mathcal{M}_1$ en un gris más oscuro.

La métrica para estos espacios es

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \frac{dz^2 - dt^2 + dx^2}{z^2} \quad \text{en } \mathcal{M}_1 \\
ds^2 &= \frac{dz^2 + d\tau^2 + dx^2}{z^2} \quad \text{en } \mathcal{M}_0 \text{ y } \mathcal{M}_2,
\end{aligned}$$

donde $dx^2 = \delta_{ab} dx^a dx^b$ con $a, b = 0, 1, \dots, d-1$. Sobre $\mathcal{M}_1$ la ecuación de movimiento es

$$(\square - m^2)\Psi = (z^{d-1} \partial_z \{z^{-d+1} \partial_z\} + z^2 \square_{\mathbb{M}^d} - m^2) \Psi = 0,$$

Proponiendo $\Psi_1(t, x, z) = e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{x}} f(\omega, k, z)$ la ecuación de movimiento se cumple si

$$f(\omega, k, z) = e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{x}} z^{d/2} \{A_1 K_l(qz) + A_2 I_l(qz)\},$$

⁷ A partir de este resultado, pareciera posible asociar trayectorias del tipo Schwinger-Keldysh con secciones imaginarias en el tiempo con sistemas físicos en presencia baños térmicos. Considerando caminos cerrados en el plano complejo de otras variables de la teoría de campos, aparecen sobre el propagador la contribución de distintos baños. Por ejemplo, considerar un camino cerrado en la variable φ genera un baño de potencial químico angular μ_φ [8]

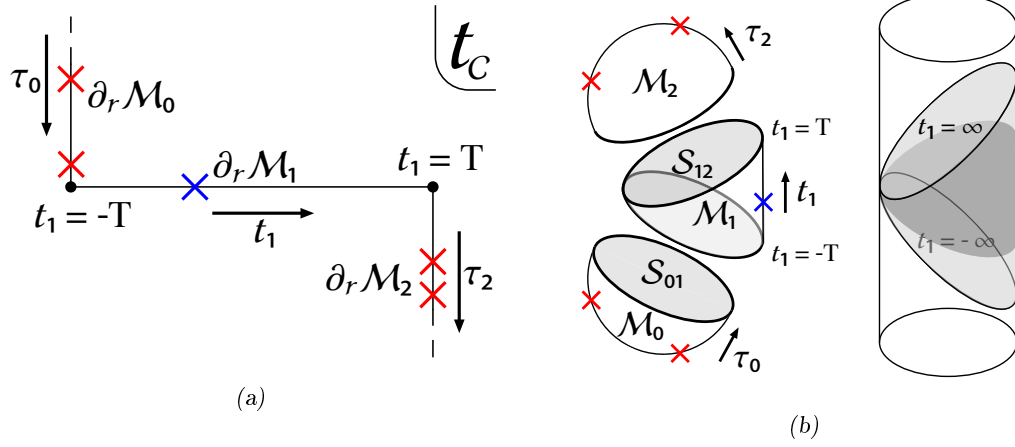


Fig. 3.10: Se muestra otra forma de armar una variedad que describa el formalismo In-Out. En (a) se muestra nuevamente el camino mencionado. El espacio holográfico está formado por dos medias esferas H_{d+1} , unidas por una sección Lorentziana. Esta última es la parte $t \in [-T, T]$ (en gris oscuro) de la región de Poincaré (en gris claro), sobre el espacio AdS global, como se indica a la derecha.

donde $K_l(qz)$ y $I_l(qz)$ son funciones de Bessel de primera y segunda especie y $q^2 = -\omega^2 + \vec{k}^2$. Al definir $q = \sqrt{q^2}$, debe ponerse dos cortes ramales sobre el plano ω , que garanticen que q sea univaluado sobre el plano complejo que se ubicarán sobre el eje real $\omega^2 > |k|^8$. Estas singularidades sobre el plano ω reemplazan, en esta métrica, a las singularidades de la función f de la sección 3.3.1, que generaban los modos normalizables.

Las soluciones Ψ_1 deben ser regulares en el interior de la variedad. El comportamiento asintótico en $z \rightarrow \infty$

$$z^{d/2} K_l(qz \rightarrow \infty) \approx \sqrt{\frac{\pi z^{d-1}}{2q}} e^{-qz} + \dots$$

$$z^{d/2} I_l(qz \rightarrow \infty) \approx \sqrt{\frac{z^{d-1}}{2\pi q}} [e^{qz} + e^{-qz - (l+1/2)i\pi}] + \dots$$

muestra que si $q < 0$ ninguna de las dos soluciones converge en este límite, a diferencia de lo que sucedía para las coordenadas globales. Luego, para obtener una solución regular dentro de la variedad, es necesario considerar una combinación lineal de ambas soluciones. Por otro lado, la expansión de estas soluciones en $z \sim 0$,

$$z^{d/2} K_l(qz \sim 0) \approx \Gamma(l) \frac{z^{-l+d/2}}{2^{l+1} q^l} + \dots$$

$$z^{d/2} I_l(qz \sim 0) \approx \frac{1}{\Gamma(l+1)} \frac{z^{l+d/2}}{2^l q^{-l}} + \dots$$

⁸ La función $\sqrt{a}$ siendo a una variable compleja requiere un corte ramal desde el origen con algún argumento θ_q . Luego, la función $z(\omega) = \sqrt{-\omega^2 + \vec{k}^2} = \sqrt{|k| - \omega} \sqrt{|k| + \omega}$, requiere dos cortes ramales en $\omega = \pm |k|$, que pueden ponerse cada uno con un argumento distinto. Dado que el camino de integración sobre el plano ω pasará por el origen, se elige poner los cortes ramales con argumentos opuestos $\theta_{+k} = 0$ y $\theta_{-k} = \pi$.

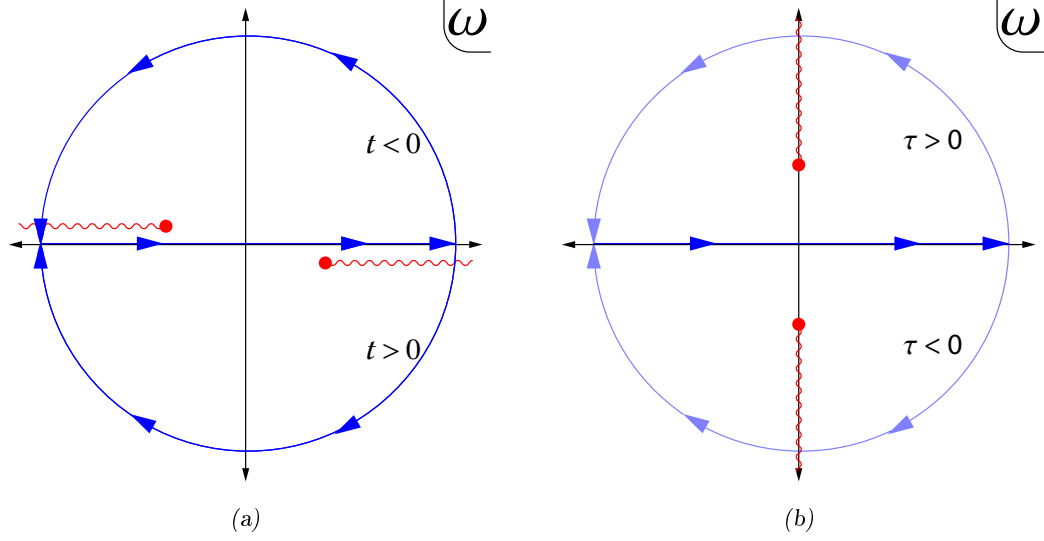


Fig. 3.11: En estas coordenadas para el plano ω , no hay un conjunto discreto de polos sobre el eje real, sino dos cortes ramales sobre el plano ω para definir un momento q univaluado. En (a) se muestra la forma de correr los cortes ramales que llevará al propagador de Feynman. En (b) se muestra cómo se corren los polos respecto del caso lorentziano para el espacio H_d . Al igual que antes, las singularidades quedan fuera del eje real, de forma que el propagador definido es único.

permite observar que las soluciones $z^{d/2}I_l(qz)$ son regulares, mientras que $z^{d/2}K_l(qz)$ divergen en el borde conforme. El primer grupo se identificará con los modos normalizables de la solución, mientras que el segundo se usará para satisfacer las condiciones de contorno en $z = \epsilon \ll 1$

$$\Psi_1(t, x, \epsilon) = \epsilon^{-l+d/2} \psi_1(t, x).$$

Se definen las funciones

$$\mathcal{K}_K(q, z) = \frac{z^{d/2}K_l(qz)}{\epsilon^{d/2}K_l(q\epsilon)} \quad \mathcal{K}_I(q, z) = \frac{z^{d/2}I_l(qz)}{\epsilon^{d/2}I_l(q\epsilon)}$$

para escribir las soluciones sobre $\mathcal{M}_1$ de la forma

$$\begin{aligned} \Psi_1 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathcal{F}} d\omega d\vec{k} dt' d\vec{x}' e^{-i\omega(t-t') + i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \psi_1(t', x') \mathcal{K}_K(q_\epsilon, z) \\ + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathcal{F}} d\omega d\vec{k} e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{x}} C_1(\omega, k) \mathcal{K}_I(q_\epsilon, z). \end{aligned}$$

donde se define $q_\epsilon = \sqrt{-\omega^2 + \vec{k}^2 - i\epsilon}$ de forma que las integrales sobre ω se realicen automáticamente sobre el camino de Feynman como muestra la Fig. 3.11a y las constantes $C_1(\omega, k)$ no son completamente arbitrarias, sino que deben hacer que la solución sea un modo normalizable.

Las soluciones sobre las regiones $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{M}_2$ con fuentes ψ_0 y ψ_2 puede extenderse del análisis anterior y de las consideraciones en las secciones 3.1 y 3.3.1 de forma que

$$\begin{aligned} \Psi_{0/2} = & \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\omega \int d\vec{k} e^{+i\omega(\tau-\tau') + i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \psi_{0/2}(\tau', x') \mathcal{K}_K(-iq, z) \\ & + \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\omega \int d\vec{k} e^{+i\omega\tau + i\vec{k}\cdot\vec{x}} C_{0/2}(\omega, k) \mathcal{K}_I(-iq, z). \end{aligned}$$

Al igual que para los ejemplos anteriores, se mantiene la dependencia oscilatoria en ω para $\Psi_{0/2}$, lo que corre los polos de las soluciones radiales como se muestra en la Fig. 3.11b.

Las condiciones de contorno son

$$\begin{aligned} \Psi_0(r, 0, \varphi) &= \Psi_1(r, -T, \varphi) & \Psi_1(r, T, \varphi) &= \Psi_2(r, 0, \varphi) \\ \partial_\tau \Psi_0(r, \tau, \varphi) \Big|_{\tau=0} &= -i\partial_t \Psi_1(r, t, \varphi) \Big|_{t=-T} & -i\partial_t \Psi_1(r, t, \varphi) \Big|_{t=T} &= \partial_\tau \Psi_2(r, \tau, \varphi) \Big|_{\tau=0}. \end{aligned}$$

que, a pesar de tener la misma forma que (3.36), describen superficies $\mathcal{S}_{ij}$ distintas, debido a que las coordenadas temporales son distintas. Sobre las regiones $\mathcal{S}_{ij}$ en $\mathcal{M}_1$, el signo de los exponentes de $e^{-i\omega(t-t')}$ y $e^{-i\omega t}$ queda definido y las integrales en ω pueden realizarse explícitamente. Razonamientos análogos pueden realizarse para las variedades $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{M}_2$. El resultado es un sistema de ecuaciones similar al encontrado en la sección 3.3.1, con la salvedad de que ω no está cuantizada y cuya solución es

$$\begin{aligned} C(\omega > 0, \vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^d} e^{-iT\omega} \bar{\psi}_0 & C_0(\omega, \vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^d} e^{-iT\omega} \tilde{\psi}_1^- + \frac{1}{(2\pi)^d} e^{-2iT\omega} \bar{\psi}_2 \\ C(\omega < 0, \vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^d} e^{-iT\omega} \bar{\psi}_2 & C_2(\omega, \vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^d} e^{-iT\omega} \tilde{\psi}_1^+ + \frac{1}{(2\pi)^d} e^{-2iT\omega} \bar{\psi}_0 \end{aligned}$$

donde las magnitudes $\bar{\psi}_0$, $\tilde{\psi}_1^\pm$ y $\bar{\psi}_2$ fueron también definidas en la sección 3.3.1.

La función de 1 punto para el operador $\mathcal{O}$ en estas coordenadas resulta

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(t, \varphi) \rangle &= \langle f | \mathcal{O}(t, \varphi) | i \rangle = \frac{\delta S}{\delta \psi_1(t, \varphi)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathcal{F}} d\omega d\vec{k} dt' d\vec{x}' e^{-i\omega(t-t') + i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \psi_1(t', x') \frac{(-1)^l}{2^{2l-1}\Gamma(l)^2} q_\epsilon^{2l} \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left\{ \int_{-\infty}^0 d\omega e^{-i\omega t} \bar{\psi}_2(\omega_{nk}, k) + \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega t} \bar{\psi}_0(\omega_{nk}, k) \right\} \frac{(-1)^l}{2^{2l-1}\Gamma(l)^2} q_\epsilon^{2l}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

El propagador puede obtenerse diferenciando (3.58) respecto de la fuente

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y) | 0 \rangle &= \frac{i}{(2\pi)^d} \int_{\mathcal{F}} d\omega \int d\vec{k} e^{-i\omega(t_x-t_y) + i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \frac{(-1)^l}{2^{2l-1}\Gamma(l)^2} q_\epsilon^{2l} \\ &= 2l\pi^{-d/2} \frac{\Gamma(l+d/2)}{\Gamma(l)} \left[-(t_x - t_y)^2 + (\vec{x} - \vec{x}')^2 + i\epsilon(t_x - t_y) \right]^{-l-\frac{d}{2}}. \end{aligned}$$

Dado que $l + \frac{d}{2} = \Delta$ la dimensión conforme del operador $\mathcal{O}$, estas coordenadas permiten obtener directamente el propagador de la forma (2.36).

4. RESUMEN, CONCLUSIONES Y VISIÓN A FUTURO

El objetivo principal de este trabajo era el de comprobar si la inserción de fuentes dentro de las regiones de signatura euclídea dentro de la prescripción de Skenderis y van Rees [7, 8] se correspondían con estados distintos del fundamental (o fuera del equilibrio en el caso del formalismo Térmico) dentro de la teoría de campos dual. Los resultados obtenidos para las geometrías estudiadas sugieren que esta interpretación es correcta, al menos para excitaciones duales a un campo escalar libre en la teoría de gravedad. Se mostró además que las excitaciones se corresponden con los modos normalizables del campo escalar en la teoría de gravedad dual.

A estos efectos, en el Capítulo 2 se estudiaron los espacios AdS y H , se presentaron algunas propiedades elementales de una teoría de campos conforme y lo que estas implican sobre los correladores de los observables de estas teorías, además de los formalismos In-Out, In-In y Térmico, para finalmente introducir la dualidad AdS/CFT.

En el Capítulo 3 se presentan las prescripciones GKPW y de Skenderis y van Rees. Se reproduce un ejemplo para la prescripción GKPW sobre un campo escalar en un fondo gravitatorio de constante cosmológica negativa. Para la prescripción de Skenderis y van Rees se calculan las funciones de 1 y 2 puntos para los formalismos In-Out (en coordenadas globales y de Poincaré), In-In y Térmico, comprobando que la inserción de fuentes sobre las fronteras conformes de las regiones de signatura euclídea modifica el valor de la función de 1 punto, arrojando valores no nulos incluso en ausencia de fuentes sobre la región lorentziana, como se espera de un valor de expectación entre estados distintos del fundamental. La información de estas fuentes no es observable en las funciones de 2 puntos. Esto es producto de que los casos estudiados tienen una acción cuadrática que anula las contribuciones de orden superior. De haber considerado una teoría con interacciones, la información de estas fuentes debiera, en principio, ser observable a cualquier orden.

Actualmente, se están estudiando geometrías más complejas dentro de la prescripción de Skenderis y van Rees que comprenden agujeros negros y su relación con otras prescripciones propuestas anteriormente para estos espacios como la de Son y Herzog [6]. Estas geometrías poseen un número superior de parámetros libres correlacionados entre sí, además de un mayor número de regiones sobre las cuales se pueden insertar fuentes. La interpretación de estas regiones no siempre es clara y por ende tampoco lo es la inserción de fuentes sobre las mismas. Estas geometrías son el próximo objetivo de estudio en el futuro.

Apéndice

A. CAMPO ESCALAR MASIVO SOBRE H EN COORDENADAS GLOBALES

En este apéndice se muestra el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon para un espacio H_3 en las coordenadas globales, donde la frontera está parametrizada por regiones $\rho = cte$, donde ρ es la coordenada radial.

La métrica y ecuación de movimiento son

$$ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2(\rho) d\Omega_2^2 \quad (\square - m^2)\kappa = 0$$

En estas coordenadas

$$\square = \frac{1}{\sinh^2(\rho)} \partial_\rho (\sinh^2(\rho) \partial_\rho) + \frac{\Delta_{\Omega_2}}{\sinh^2(\rho)},$$

donde Δ_{Ω_2} es la parte angular del operador laplaciano en 3 dimensiones. La parte angular de la solución se expande en armónicos esféricos $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ que cumplen $\Delta_{\Omega_2} Y_{lm}(\theta, \varphi) = -l(l+1)Y_{lm}(\theta, \varphi)$. La ecuación radial queda

$$\frac{1}{\sinh^2(\rho)} \partial_\rho (\sinh^2(\rho) \partial_\rho f(\rho)) - \left(\frac{l(l+1)}{\sinh^2(\rho)} + m^2 \right) f(\rho) = 0$$

La solución general a esta ecuación diferencial es una combinación lineal de dos funciones hiperbólicas

$$f_{k,\omega}(r) = \frac{\tanh^l(\rho)}{\cosh^{1+\sqrt{1+m^2}}} (A_1 F\left(\frac{1}{2}(-l + \sqrt{1+m^2}), \frac{1}{2}(1-l + \sqrt{1+m^2}); \frac{1}{2} - l; \tanh^2(\rho)\right) + A_2 \tanh^{-1-2l} \rho F\left(\frac{1}{2}(1+l + \sqrt{1+m^2}), \frac{1}{2}(2+l + \sqrt{1+m^2}); \frac{3}{2} - l; \tanh^2(\rho)\right)).$$

La regularidad de los campos en el interior de la variedad exige $A_2 = 0$. El comportamiento asintótico de esta solución sobre $\rho \rightarrow \infty$ es

$$f_{k,\omega}(r) \sim \cosh^{\sqrt{1+m^2}-1}(\rho) [\dots].$$

En ausencia de fuentes sobre el borde, el campo debe cumplir $\kappa(\rho \rightarrow \infty) = 0$. Dado que el comportamiento de la solución es divergente para cualquier valor de $m > 0$ la única solución posible es $\kappa \equiv 0$. En presencia de fuentes $\kappa(\theta, \varphi)$, la variedad debe regularizarse imponiendo una distancia de corte ρ_0 donde el campo κ cumpla la condición de contorno

$$\kappa(\rho_0, \theta, \varphi) = \cosh^{\sqrt{1+m^2}-1}(\rho_0) \kappa(\theta, \varphi).$$

El cambio de coordenadas entre globales y e-globales, mezcla la información de la variable ρ tanto en r como en t , de forma que la renormalización usada en el cuerpo central del trabajo es no equivalente a la tradicional.

B. CAMBIO DE COORDENADAS PARA EL PROPAGADOR DE $\mathcal{O}$

En la sección 3.3.1 se llegó a la expresión (3.45) para el propagador del operador $\mathcal{O}$ en una teoría conforme en 2 dimensiones, mientras que en la sección 2.2.3 se demostró que todo propagador de una teoría de campos conforme debe tener la forma (2.36). En este apéndice se demuestra que ambos propagadores son equivalentes a menos de un cambio de coordenadas.

Tomando $y = 0$ en (3.45) y usando t_G para la variable temporal en coordenadas globales

$$\langle 0 | \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(0) | 0 \rangle = \frac{1}{2^l \pi} \frac{l^2}{[\cos(t_G(1 - i\epsilon)) - \cos(\varphi)]^{l+1}}, \quad ds^2 = -dt_G^2 + d\varphi^2,$$

Definiendo $t_G = u - v$ y $\varphi = u + v$, se obtiene

$$\langle 0 | \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(0) | 0 \rangle = \frac{1}{2^{2l+1} \pi} \frac{l^2}{[\sin(u - i\eta) \sin(v + i\eta)]^{l+1}}, \quad ds^2 = 4dudv$$

con $\eta = \epsilon(u - v)$ y $\epsilon \ll 1$. El siguiente paso es aplicar una transformación de Weyl $g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega(u, v) g_{\mu\nu}$ con $\Omega(u, v) = \frac{1}{\cos^2(u) \cos^2(v)}$. El cambio sobre el propagador puede calcularse directamente como el cambio de ambos operadores por separado, siendo que el propagador debe ser covariante frente a cualquier transformación conforme,

$$\mathcal{O}(u, v) \rightarrow (\cos^2(u) \cos^2(v))^{l+1}.$$

El operador $\mathcal{O}(0) \rightarrow (\cos^2(0) \cos^2(0))^{l+1} \mathcal{O}(0) = \mathcal{O}(0)$ y queda invariante frente a la transformación. El propagador puede escribirse

$$\langle 0 | \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(0) | 0 \rangle = \frac{1}{\pi} \frac{2l^2}{[\tan(u - i\eta) \tan(v + i\eta)]^{l+1}}, \quad ds^2 = \frac{4dudv}{\cos^2(u) \cos^2(v)}.$$

El denominador $\cos^2(u) \cos^2(v)$ en la métrica acota los dominios de las variables u y v ¹. Los dominios de las nuevas variables son $-\pi/2 < u, v < \pi/2$. Usando que $\epsilon \ll 1$,

$$\tan(u - i\eta) \tan(v + i\eta) \sim \tan(u) \tan(v) + i\epsilon.$$

Finalmente, si $x + y = \tan(u)$ y $x - y = \tan(v)$ se obtiene

$$\langle 0 | \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(0) | 0 \rangle = \frac{1}{\pi} \frac{2l^2}{[-y^2 + x^2 + i\epsilon]^{l+1}}, \quad ds^2 = -dy^2 + dx^2,$$

que es la forma (2.36) con $d = 2$.

¹ Esto podía esperarse, dado que las coordenadas de Poincaré cubren una región menor de la variedad que las coordenadas globales, como se mostró en la sección 2.1.1.

Bibliografia

- [1] J.M. Maldacena, *The large N limit of superconformal field theories and supergravity*, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 231 (1998), [hep-th/9711200].
- [2] S.S. Gubser, I.R. Klebanov and A.M. Polyakov, Phys. Lett. B428, 105 (1998).
- [3] E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 253 (1998), [hep-th/9802150].
- [4] V. Balasubramanian, P. Kraus and A.E. Lawrence, *Bulk vs. boundary dynamics in anti-de Sitter space-times*; Phys. Rev. D 59 (1999) 046003 [hep-th/9805171]
- [5] V. Balasubramanian, P. Kraus, A.E. Lawrence and S.P. Trivedi, *Holographic probes of anti-de Sitter space-times*; Phys. Rev. D 59 (1999) 104021 [hep-th/9808017]
- [6] C. P. Herzog and T. Son, *Schwinger-Keldysh Propagators from AdS/CFT Correspondence*; [hep-th/0212072v4].
- [7] K. Skenderis and B. C. van Rees *Real-time gauge/gravity duality* ; [hep-th/0805.0150v2].
- [8] K. Skenderis and B. C. van Rees *Real-time gauge/gravity duality: prescription, renormalization and examples* ; [hep-th/0812.2909]
- [9] J.B. Hartle and S.W. Hawking, *Wave function of the universe*, Phys. Rev. D 28 (1983) 2960
- [10] C. A. Ballon Bayona, Nelson R. F. Braga, *Anti-de Sitter boundary in Poincare coordinates* [hep-th/0512182v3]
- [11] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* Ch.4. Addison-Wesley 1995
- [12] A. Kamenev *Field Theory of Non-Equilibrium Systems*, Cambridge University Press, 2011. ISBN 9780521760829
- [13] R. van Leeuwen, N.E. Dahlen et. al. *Time-Dependent Density Functional Theory*, Ch.3
- [14] E.S. Fradkin and M.Y. Palchik *Conformal Quantum Field Theory in D-Dimensions*. Mathematics and Its Applications. Springer, 1996 ISBN 9780792341581
- [15] O. Aharony, S.S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz, *Large N Field Theories, String Theory and Gravity*, [hep-th/9905111]