

REDES DE ESKIRMIONES EN
SISTEMAS DE ESPINES
BIDIMENSIONALES

Redes de eskirmiones en sistemas de espines bidimensionales

Trabajo de Diploma de Licenciatura en Física

Autor: Santiago A. Osorio

Director: Daniel C. Cabra

*Departamento de Física, Fac. de Cs. Exactas,
Universidad Nacional de La Plata.
La Plata, Argentina*

Agradecimientos

A mi familia, papá, mamá y mi hermanito, por su apoyo incondicional y esfuerzo constante, especialmente en estos años de carrera.

A mi familia postiza, Diego, Marta, Alejandro, Fede, Anto y los abuelos, por todo el afecto y apoyo que siempre he recibido de su parte.

A los tíos, Fernanda y Héctor, a mis primitos, Fati, Trini y mi ahijadito Blas, que con su alegría logran sacarme una sonrisa en cualquier momento.

A mis viejos amigos, Diego, Manu, Seba, Bruno, Franco, Luciano, Jorge, Neri, Pablo y Maxi, por todos estos años de amistad.

A mis nuevos amigos, Pedro, Joaco, Brian, Daniel, Marco, Mati, Lau, Bruno, Roman, Ale, Jere, Bimbo, Tofi, Rober, de quienes he recibido ayuda a lo largo de la carrera y, entre física, comidas y risas, siempre logran divertirme.

A Daniel, mi director, por el apoyo y ayuda que recibí a lo largo del trabajo, y fundamentalmente por su paciencia.

A mis colegas del grupo de Teoría de Campos Estadística por su cálida bienvenida y principalmente a Diego Rosales, que me ayudó con el trabajo y atendió (y soportó) muchas de mis consultas.

Al Abuelo por sus paseos en tractor y carretilla, y al tío Tito por sus enseñanzas de electromagnetismo. Desde acá hasta allá, un abrazo enorme.

Resumen

El presente trabajo está dedicado al estudio de redes de eskirmiones en sistemas bidimensionales de espines. Se estudia, en particular, el efecto del campo magnético externo en un modelo clásico de ferromagneto no-centrosimétrico. En este modelo la interacción de Dzyaloshinski-Moriya y el campo magnético son fundamentales para estabilizar una fase de red de eskirmiones. Los estudios analíticos, a temperatura nula, conducen a un diagrama de fases que revela una secuencia de estados fundamentales, fase helicoidal \rightarrow red de eskirmiones \rightarrow fase ferromagnética, conforme el campo magnético crece. Estos análisis fueron complementados con simulaciones de Monte Carlo que confirman aquél esquema de fases incluso a temperatura no nula. Mediante estas simulaciones se predicen plateaux en las curvas de magnetizaciones que son correctamente explicadas en el marco de los estudios analíticos realizados.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	III
1. Introducción	1
1.1. Reseña histórica y motivación del trabajo	1
1.2. Interacciones en sistemas de espines	3
1.2.1. Interacción entre espines: intercambio	3
1.2.1.1. Origen del intercambio	3
1.2.1.2. Hamiltoniano de espines y modelo de Heisenberg	4
1.2.1.3. Interacción de intercambio antisimétrico	5
1.2.2. Interacción con campos externos: energía Zeeman	6
1.2.3. Modelos clásicos	6
1.3. Orden magnético	6
1.4. Objetivos	7
2. Límite al continuo	9
2.1. Modelo sigma no lineal como límite del modelo de Heisenberg	9
2.2. Términos de Dzyaloshinski-Moriya y Zeeman	11
3. Modelo sigma no lineal y eskirmiones	13
3.1. El modelo sigma no lineal $O(3)$	13
3.2. Estados de energía finita	15
3.3. Carga topológica	15
3.4. Soluciones estáticas	17
3.5. Estabilidad de las soluciones	20
4. Eskirmiones	25
4.1. Densidad de energía y ecuaciones de movimiento	25
4.2. Comportamientos asintóticos de la solución	26

4.3. Aproximación de Bogdanov	27
5. Redes de eskirmiones	31
5.1. Energía libre	31
5.2. Tamaño del eskirmión en una red	34
5.3. Diagrama de fases y campos críticos	35
5.4. Análisis por medio del Método de Monte Carlo	36
6. Conclusiones	43
Bibliografía	45

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo haremos una revisión histórica del término *eskirmión* empezando desde física de altas energías, donde se introduce el término, hasta materia condensada. Luego, en el contexto de materia condensada, describiremos las interacciones involucradas en la formación de los eskirmiones. Por último presentaremos los objetivos del presente trabajo.

1.1. Reseña histórica y motivación del trabajo

Los eskirmiones fueron originalmente propuestos por Skyrme (1922-1987) en física nuclear. Su primera publicación de 1954 [1] puede considerarse como fecha inicial del modelo de Skyrme [2]. En este trabajo propuso un modelo de *fluido mesónico* con el objeto de explicar datos experimentales de mediciones de radios nucleares. En los años siguientes continuó con el desarrollo de su teoría hasta arribar a un modelo para bariones en física nuclear [3], [4]. A partir de esta teoría es que se introduce el término “*eskirmión*” (del inglés “*skyrmion*”).

Skyrme entendía a los nucleones (protones y neutrones) como si se movieran en un medio no lineal clásico de piones. Su teoría, que surge del modelo de Yukawa, contenía tres campos escalares correspondientes a los tres piones (π^+ , π^- y π^0), y el eskirmión representaba al barión [5]. En este contexto los eskirmiones son configuraciones de mínima energía de campos estáticos clásicos no lineales.

En 1989 Bogdanov y colaboradores predijeron la existencia de redes de eskirmiones en ferromagnetos anisotrópicos *no-centrosimétricos* (que desarrollaremos en la sección 1.3) al aplicar campos magnéticos [6]. Estos eskirmiones se observaron por primera vez experimentalmente estudiando efecto

Hall cuántico entero en ferromagnetos. Sin embargo la existencia de eskirmiones formando redes fue verificada experimentalmente recientemente. En 2009 se encontró evidencia clara de que los eskirmiones aparecen formando una red en la llamada fase “A” del compuesto $MnSi$ (ferromagneto metálico) [7]. La evidencia proviene de experimentos de dispersión de neutrones a pequeños ángulos (SANS, de sus siglas en inglés) que revelan un patrón hexagonal de skyrmiones. Recientemente se han realizado observaciones directas, tanto de eskirmiones aislados como de redes de eskirmiones, mediante microscopía electrónica de transmisión de Lorentz (Lorentz TEM, de si siglas en inglés) [8].

En general, este tipo de texturas está asociada a la ausencia de simetría de inversión por lo que se presenta en sistemas *no centrosimétricos*, como es el caso de cristales magnéticos de $MnSi$ [7], $Fe_{0,5}Co_{0,5}Si$ [8] (y en general para semiconductores $Fe_{1-x}Co_xSi$ [9]), $FeGe$ [10], en semiconductores con estructura $B20$ [11] y el aislador Cu_2OSeO_3 [12]. Sin embargo, y como consecuencia del amplio significado del término “eskirmión”, estos se encuentran también en las paredes de dominio ferromagnéticos [13], incluso formando dominios magnéticos en ciertos ferromagnetos como el $La_{0,5}Ba_{0,5}MnO_3$ [14], en condensados de Bose-Einstein [15] y en cristales de espines [16].

Desde el punto de vista físico los eskirmiones han revelado la presencia de un nuevo tipo de orden magnético. Las teorías que describen estos sistemas conducen al estudio de excitaciones topológicas que desempeña un rol fundamental en muchas áreas de la física [16]. En el transcurso de las últimas décadas (en el contexto de materia condensada, y más precisamente en el estudio de fenómenos magnéticos y sistemas de espines), el término *eskirmión* ha ganado progresivamente aceptación para designar *cualquier* solución o configuración de campo que es localizada, topológicamente estable y tiene el aspecto de *vórtice* [17]. Debemos aclarar que estas soluciones *no* tienen ningún vínculo con el modelo de Skyrme mencionado antes, excepto por el hecho de que en ambos contextos las soluciones corresponden a solitones con propiedades topológicas análogas (que describiremos en capítulos siguientes).

En los años recientes este área de investigación ha crecido considerablemente no solo por sus interesantes propiedades físicas sino también por sus potenciales aplicaciones tecnológicas.

Los eskirmiones que se encuentran en ciertos tipos de materiales pueden ser creados, movidos y destruidos por medio de corrientes de muy bajas densidades [18], [19], [20]. Se requieren, por ejemplo, corrientes de $j_c \approx 10^6 Am^{-2}$ para mover eskirmiones en un cristal de $MnSi$, que son unas 10^5 veces más chicas que las necesarias para controlar eskirmiones en paredes de dominios ferromagnéticos [21]. En el estado actual de la tecnología es posible no solo crear eskirmiones aislados sino también redes bidimensionales de eskirmiones

por medio de la impresión de nanodiscos magnéticos sobre láminas magnetizadas [22].

Debido a estas características es que se los estudia en el campo de la espintrónica para el diseño de dispositivos de almacenamiento de información de bajo consumo.

1.2. Interacciones en sistemas de espines

En esta sección consideraremos los distintos tipos de interacciones magnéticas que se pueden presentar en el estudio de sistemas de espines. Estas interacciones vinculan a espines en distintos sitios y pueden eventualmente dar origen a orden de largo rango.

1.2.1. Interacción entre espines: intercambio

Las interacciones de intercambio desempeñan un rol central en los fenómenos de orden magnético de largo rango. Estas interacciones no son más que interacciones electrostáticas. Para explicar el orden magnético en sólidos es necesario abandonar la descripción de electrones independientes. Las interacciones de intercambio pueden ser clasificadas en [23]:

- *intercambio directo*: surge cuando dos iones magnéticos interactúan directamente por la repulsión Coulombiana entre los electrones de ambos iones,
- *super-intercambio*: es posible que dos iones magnéticos tengan interacciones magnéticas mediada por los electrones de un ión no magnético, vecino de ambos,
- *intercambio indirecto*: otra interacción magnética puede ocurrir debido a la interacción entre electrones de una capa f parcialmente llena. Además de interactuar directamente, los electrones de la capa f están acoplados por sus interacciones con electrones de conducción,
- *intercambio itinerante*: esta interacción proviene de la interacción entre electrones de conducción en metales.

1.2.1.1. Origen del intercambio

Consideremos un modelo simple con sólo dos electrones cuyas coordenadas son \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 respectivamente. La función de onda del estado de los dos electrones puede ser expresado como el producto de los estados de cada

electrón, de modo que si el primer electrón se encuentra en el estado $\psi_a(\mathbf{r}_1)$ y el segundo en el estado $\psi_b(\mathbf{r}_2)$, la función de onda correspondiente a los dos electrones juntos es $\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2)$. Sin embargo este estado no es simétrico ni antisimétrico frente a la permutación de los electrones. Los estados apropiados para describir al sistema deben ser adecuadamente simetrizados o antisimetrizados.

Para electrones, la función de onda *completa* debe ser antisimétrica (por tratarse de fermiones) de modo que la parte de espín de la función de onda puede ser un estado antisimétrico χ_S (singlete $S = 0$), en cuyo caso la parte espacial será simétrica, o simétrico χ_T (tripleto $S = 1$) y en este caso la parte espacial de la función de onda será antisimétrica. Por lo tanto podemos escribir la función de onda para el estado singlete ψ_S y el estado tripleto ψ_T como

$$\psi_S = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2) + \psi_a(\mathbf{r}_2)\psi_b(\mathbf{r}_1)]\chi_S \quad (1.1)$$

$$\psi_T = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2) - \psi_a(\mathbf{r}_2)\psi_b(\mathbf{r}_1)]\chi_T, \quad (1.2)$$

que contiene tanto la parte espacial como de espín de la función de onda. La energía de cada uno de estos estados es

$$E_S = \int \psi_S^* \hat{\mathcal{H}} \psi_S d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (1.3)$$

$$E_T = \int \psi_T^* \hat{\mathcal{H}} \psi_T d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (1.4)$$

en donde se usó que los estados χ_S y χ_T están normalizados. La diferencia entre las energías de los dos estados es

$$E_S - E_T = 2 \int \psi_a^*(\mathbf{r}_1)\psi_b^*(\mathbf{r}_2)\hat{\mathcal{H}}\psi_a(\mathbf{r}_2)\psi_b(\mathbf{r}_1)d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (1.5)$$

1.2.1.2. Hamiltoniano de espines y modelo de Heisenberg

De la ecuación (1.6) vemos que la diferencia entre los estados singlete y tripleto puede ser parametrizada usando $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$. Ahora, recordando que para cada uno de los electrones $\mathbf{S}_i^2 = 3/4$, tenemos que

$$\mathbf{S}^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2 = \frac{3}{2} + 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2. \quad (1.6)$$

Para el estado singlete tenemos entonces $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = -3/4$ mientras que para el triplete tenemos $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = 1/4$. Con esto podemos escribir el Hamiltoniano en la forma de un Hamiltoniano efectivo usando (1.5):

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{4}(E_S + 3E_T) - (E_S - E_T)\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2. \quad (1.7)$$

Esta expresión es una suma de un término constante y un término que depende del espín. La constante puede ser eliminada por medio de una redefinición del valor cero de la energía por lo que sólo conservaremos el segundo término y diremos que

$$\hat{\mathcal{H}}^{espin} = -(E_S - E_T)\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = -2J\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2, \quad (1.8)$$

donde la constante de intercambio J es

$$J = \frac{E_S - E_T}{2} = \int \psi_a^*(\mathbf{r}_1)\psi_b^*(\mathbf{r}_2)\hat{\mathcal{H}}\psi_a(\mathbf{r}_2)\psi_b(\mathbf{r}_1)d\mathbf{r}_1d\mathbf{r}_2. \quad (1.9)$$

Si $J > 0$, $E_S > E_T$ por lo que el estado triplete $S = 1$ se ve favorecido. Si $J < 0$, $E_S < E_T$ y es favorecido el estado singlete $S = 0$.

Este Hamiltoniano describe la interacción entre dos electrones y puede proponerse para describir interacciones entre átomos vecinos. Esto constituye el modelo de Heisenberg cuyo Hamiltoniano es:

$$\hat{\mathcal{H}}_H = - \sum_{i,j} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j, \quad (1.10)$$

donde J_{ij} es la constante de intercambio entre el espín i -ésimo y el j -ésimo. El factor 2 se omite debido a que la suma incluye dos veces a cada par de espines. Si $J_{ij} = J$ (que corresponde al caso de un sistema isótropo y homogéneo) entonces

$$\hat{\mathcal{H}}_H = -J \sum_{i,j} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j. \quad (1.11)$$

1.2.1.3. Interacción de intercambio antisimétrico

Es posible que la interacción espín-órbita desempeñe un papel similar al de un ión no magnético en superintercambio. Esta interacción es conocida como intercambio antisimétrico, o también interacción de Dzyaloshinsky-Moriya [24]. Cuando actúa entre dos espines \mathbf{S}_i y \mathbf{S}_j da lugar, en el Hamiltoniano, a términos de la forma:

$$\hat{\mathcal{H}}_{DM} = D \sum_{i,j} \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j, \quad (1.12)$$

donde \mathbf{r}_{ij} es el vector de posición desde el espín i -ésimo al espín j -ésimo. El factor D es nulo si el cristal tiene simetría de inversión respecto al centro de los dos iones magnéticos involucrados.

1.2.2. Interacción con campos externos: energía Zeeman

La interacción entre un ión magnético y un campo magnético externo \mathbf{B} da origen a la energía de Zeeman. El Hamiltoniano que describe esta interacción es:

$$\hat{\mathcal{H}}_Z = -g\mu_B \sum_j \mathbf{S}_j \cdot \mathbf{B}, \quad (1.13)$$

donde g es el factor de Landé y μ_B es el magnetón de Bohr.

1.2.3. Modelos clásicos

Un modelo clásico de espines se obtiene a partir de los anteriores Hamiltonianos reemplazando los operadores de espín \mathbf{S} por vectores de tres componentes $S\mathbf{n}$, donde el vector \mathbf{n} es unimodular $\mathbf{n}^2 = 1$. En términos de estos vectores tenemos que los anteriores Hamiltonianos se escriben como

$$H_H = -S^2 J \sum_{i,j} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j, \quad (1.14)$$

$$H_{DM} = S^2 D \sum_{i,j} \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_j, \quad (1.15)$$

$$H_Z = g\mu_B S \sum_i \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_i. \quad (1.16)$$

1.3. Orden magnético

Cada una de las interacciones antes mencionadas producen distintos tipos de estados fundamentales. Estos estados son distinguidos por una configuración particular de la magnetización que puede ser interpretada como un parámetro de orden del sistema. En este sentido decimos que un sistema se puede ordenar en distintas fases. Presentamos a continuación las distintas

fases que serán objeto de estudio en este trabajo y discutiremos brevemente las interacciones que las producen.

En el Hamiltoniano de Heisenberg, los distintos estados fundamentales ocurren debido a interacciones de intercambio. En particular, las configuraciones clásicas dependen del signo de J . Si $J < 0$ tendremos un orden antiferromagnético donde los vectores \mathbf{n} de sitios vecinos son antiparalelos (estado de Néel). Si $J > 0$ se presenta un orden ferromagnético en donde todos los momentos magnéticos se alinean paralelamente. En este último caso, al aplicar un campo magnético externo, todos los momentos se alinean paralelamente al campo.

En ferromagnetos isótropos bidimensionales existen estados metaestables [25] que corresponden a configuraciones del campo de magnetizaciones con forma de vórtice. Las distintas configuraciones de vórtice están caracterizadas por un invariante topológico. A este invariante se lo llama carga topológica y esta es nula en el estado ferromagnético (estado fundamental) y entero para los distintos tipos de vórtices. Por este motivo se dice que estos estados corresponden a excitaciones topológicas. En materia condensada dichas configuraciones son conocidas como *esquirmiones*.

En magnetos no-centrosimétricos, las interacciones del tipo de DM favorecen la rotación del vector de magnetización a lo largo de la muestra. Estas interacciones desestabilizan la estructura de magnetización homogénea e induce modulaciones de largo rango [17]. A campo magnético nulo, el mínimo absoluto del Hamiltoniano isótropo $H_H + H_{DM}$ corresponde a hélices. Las hélices tienen un sentido de rotación fijado por el signo de la constante D y son continuamente degeneradas con respecto a la dirección de propagación.

1.4. Objetivos

El objetivo del presente trabajo es estudiar la presencia y propiedades de fases magnéticas con texturas de esquirmión en un sistema bidimensional de espines. Consideraremos un modelo clásico de ferromagneto no-centrosimétrico bajo el efecto de un campo magnético externo. Estos sistemas son descritos por un Hamiltoniano en el que se presentan las tres interacciones mencionadas antes:

$$H = H_H + H_{DM} + H_Z. \quad (1.17)$$

Los análisis se llevarán a cabo siguiendo dos métodos complementarios. En primer lugar se considerará límite al continuo. Aquí las configuraciones del campo \mathbf{n} se determinarán por medio de una aproximación similar a la utilizada por Bogdanov y colaboradores [6] en el estudio de vórtices en cristales

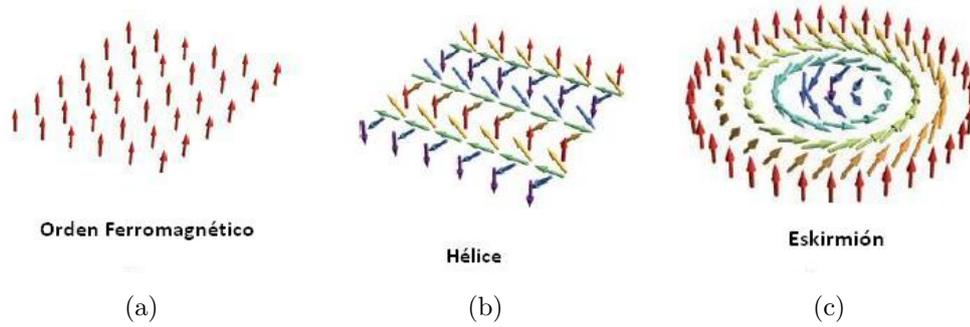


Figura 1.1: Los tres estados que se pueden presentar, dependiendo de las interacciones descritas en las secciones anteriores. (a) Orden de tipo ferromagnético, donde todos los momentos magnéticos son paralelos entre sí; (b) la interacción de DM estabiliza hélices que presentan una degeneración continua con respecto a la dirección de propagación y su sentido de rotación es fijado por el signo de la constante de DM (c) en el centro de un eskirmión el espín apunta hacia abajo (azul) mientras que en el exterior los spines apuntan en el sentido opuesto (rojo).

magnéticos. Con estas soluciones, el trabajo se centrará en la búsqueda de una fase de red de eskirmiones siguiendo un método empleado por Nagaosa y colaboradores [26]. En segundo lugar se realizarán simulaciones sobre una red discreta de espines por medio de métodos de Monte Carlo. En esta parte el trabajo estará dedicado a determinar la estructura y magnetización de cada fase.

Capítulo 2

Límite al continuo

A continuación estudiaremos el límite al continuo en la que los vectores en cada sitio de la red son reemplazados por vectores que son funciones suaves de las coordenadas espaciales. En este procedimiento veremos que el modelo de Heisenberg tiene como límite (continuo) al modelo sigma no lineal. También deduciremos los límites continuos de los términos de Dzyaloshinski-Moriya y Zeeman.

2.1. Modelo sigma no lineal como límite del modelo de Heisenberg

En esta sección reescribiremos el Hamiltoniano de Heisenberg de espines clásicos en la forma

$$H_H = -\frac{JS^2}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j, \quad (2.1)$$

donde con $\langle i, j \rangle$ tenemos en cuenta que la suma se efectúa sobre primeros vecinos y consideraremos en particular una red cuadrada.

Representaremos a los puntos sobre una red cuadrada por un vector \mathbf{x}

$$\mathbf{x}_{(m_1, m_2)} = \sum_{i=1}^2 m_i \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (2.2)$$

donde $\hat{\mathbf{e}}_i$ son los vectores de la base de la red cuadrada, y m_i son números enteros $m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

La función de partición asociada con el modelo de Heisenberg es

$$Z = \sum_{\{\mathbf{n}(x)\}} e^{-H_H[\{\mathbf{n}(x)\}]/k_B T}, \quad (2.3)$$

donde la suma es efectuada sobre todas la configuraciones del vector $\mathbf{n}(\mathbf{x})$. La suma de la forma $\sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j$ puede ser reescrita como

$$\sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j = \sum_{\langle i,j \rangle} [\mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{n}_j - \mathbf{n}_i) + 1] = 2 \sum_{\mathbf{x}} \sum_i \{\mathbf{n}(\mathbf{x})[\mathbf{n}(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{e}}_i) - \mathbf{n}(\mathbf{x})] + 1\} \quad (2.4)$$

El factor dos que aparece en la última igualdad se debe a que la sumatoria original se efectúa sobre todos los primeros vecinos, es decir sobre vectores \mathbf{x} de la forma

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^2 m_i \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (2.5)$$

donde $m_i = \pm 1$.

Estos vectores expanden una celda formada por el doble de vectores que tiene la base. Teniendo en cuenta esto llegamos entonces a

$$\sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j = - \sum_{\mathbf{x}} \left\{ \sum_i [\mathbf{n}(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{e}}_i) - \mathbf{n}(\mathbf{x})]^2 - 4 \right\}. \quad (2.6)$$

Introducimos ahora el *gradiente discreto*:

$$\nabla_i \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{1}{a} [\mathbf{n}(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{e}}_i) - \mathbf{n}(\mathbf{x})], \quad (2.7)$$

donde a es la constante de red. Podemos entonces escribir (2.6) como

$$\sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j = - \sum_{\mathbf{x}} \left\{ a^2 \sum_i [\nabla_i \mathbf{n}(\mathbf{x})]^2 - 4 \right\}. \quad (2.8)$$

Ignorando términos constantes ¹, podemos escribir la suma sobre todas las configuraciones en la función de partición (2.3) como producto de integrales sobre la esfera unidad en cada punto de la red

$$Z = \prod_{\mathbf{x}} \left\{ \int d\mathbf{n}(\mathbf{x}) \right\} \exp \left\{ \frac{J(aS)^2}{2k_B T} \sum_{\mathbf{x}} \sum_i [\nabla_i \mathbf{n}(\mathbf{x})]^2 \right\}. \quad (2.9)$$

En el límite continuo las sumas en (2.8) se reducen a integrales de la forma

¹El término constante ($\sum_{\mathbf{x}} 4$) es proporcional al área del sistema de espines.

$$\int d^2x [\nabla \mathbf{n}(\mathbf{x})]^2 = \int d^2x [\nabla_\mu n_j(\mathbf{x})]^2, \quad (2.10)$$

donde se sobreentiende la suma sobre los índices repetidos μ y j . La función de partición resulta ser entonces

$$Z = \prod_{\mathbf{x}} \left\{ \int d\mathbf{n}(\mathbf{x}) \right\} \exp \left\{ -\frac{J(aS)^2}{2k_B T} \int d^2x [\nabla \mathbf{n}(\mathbf{x})]^2 \right\}. \quad (2.11)$$

Reconocemos en la expresión anterior (2.11) a la función de partición del modelo σ no lineal con simetría $O(3)$ (que estudiaremos en el capítulo siguiente)

$$Z = \prod_{\mathbf{x}} \left\{ \int d\mathbf{n}(\mathbf{x}) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2g} \int d^2x \{[\nabla \mathbf{n}(\mathbf{x})]^2\} \right\}, \quad (2.12)$$

haciendo la siguiente identificación entre las constantes:

$$g = \frac{k_B T}{JS^2}. \quad (2.13)$$

2.2. Términos de Dzyaloshinki-Moriya y Zeeman

De forma análoga a la anterior, se puede determinar como es la contribución de la interacción de Dzyaloshinki-Moriya al Hamiltoniano continuo del sistema.

Escribiremos el término de DM de la siguiente manera:

$$H_{DM} = aDS^2 \sum_{\mathbf{x}} \sum_j [\mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{e}}_j) \cdot \hat{\mathbf{e}}_j], \quad (2.14)$$

donde estamos usando las mismas notaciones que en la sección anterior. Teniendo en cuenta que los vectores $\hat{\mathbf{e}}_j$ son unimodulares podemos reescribir la sumatoria $\sum_{\mathbf{x}} \sum_j [\mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{e}}_j) \cdot \hat{\mathbf{e}}_j]$ como

$$= \sum_{\mathbf{x}} \sum_j [\mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{e}}_j)]_j, \quad (2.15)$$

donde $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_j$ denota la j -ésima componente del producto vectorial entre \mathbf{a} y \mathbf{b} . En forma compacta puede expresarse como

$$\epsilon_{jik} n_i(\mathbf{x}) n_k(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{e}}_j) = -\epsilon_{ijk} n_i(\mathbf{x}) [n_k(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{e}}_j) - n_k(\mathbf{x})]. \quad (2.16)$$

Usando las definiciones del gradiente discreto (2.7) tenemos

$$-\epsilon_{ijk}n_i(\mathbf{x})[n_k(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{e}}_j) - n_k(\mathbf{x})] = -a\epsilon_{ijk}n_i(\mathbf{x})\nabla_j n_k(\mathbf{x}) = -a\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \times \mathbf{n}(\mathbf{x}). \quad (2.17)$$

Vemos entonces que las constante de acoplamiento de DM son descritas en el modelo continuo de materiales magnéticos por los invariantes conocidos como de Lifshitz

$$\Lambda_{ij}^{(k)} = n_i \partial_k n_j - n_j \partial_k n_i, \quad (2.18)$$

que son contribuciones lineales en las primeras derivadas de la magnetización y antisimétricas $D(\Lambda_{yx}^{(z)} + \Lambda_{xz}^{(y)} + \Lambda_{zy}^{(x)}) = D\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n}^2$.

Por lo tanto en el límite continuo la contribución del término de Dzyaloshinski-Moriya al Hamiltoniano es

$$H_{DM} = -DS^2 \int d^2x \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \times \mathbf{n}(\mathbf{x}). \quad (2.19)$$

El término de Zeeman conduce de modo análogo a una integral de la forma

$$Sg\mu_B \int d^2x \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}. \quad (2.20)$$

²Esta expresión para la contribución de la interacción de DM es válida para materiales que pertenecen a la clase cristalográfica T , como es el caso del $MnSi$ y compuestos con estructura $B20$ [?]. Para clases no-centrosimétricas y uniaxiales, la contribución de DM son dadas en [6].

Capítulo 3

Modelo sigma no lineal y eskirmiones

Los solitones son soluciones exactas de ecuaciones no lineales de campos clásicos. Estas soluciones son localizadas y tienen energía finita. Los modelos sigma no lineales constituyen un ejemplo de teorías en las que se encuentran soluciones solitónicas (en este contexto referidas como “*lumps*”)[27]. Estas soluciones se presentan físicamente en ciertos sistemas bidimensionales ferromagnéticos [25] y antiferromagnéticos al considerar el límite al continuo. Son interesantes desde el punto de vista matemático porque las soluciones estáticas son funciones racionales de una única variable compleja y pueden ser determinadas analíticamente [28].

3.1. El modelo sigma no lineal $O(3)$

El modelo sigma no lineal $O(3)$ consiste de tres campos escalares reales $\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) \equiv \{m_a(\mathbf{x}, t); a = 1, 2, 3\}$ con el vínculo

$$\sum_a m_a^2(\mathbf{x}, t) = 1. \quad (3.1)$$

La dinámica está determinada por el Lagangiano

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \sum_a \partial_{\mu} \phi_a \partial^{\mu} \phi_a, \quad (3.2)$$

donde los campos están sujetos a la condición (3.1).

¹En general un modelo sigma no lineal puede definirse a partir de un grupo de Lie compacto. En este caso la función de partición es $Z = \int Dg e^{-S[g]}$ donde $S[g] = \frac{1}{\lambda} \int d^d r Tr[\nabla g \nabla g^{-1}]$ [29].

El campo \mathbf{m} puede ser considerado como un vector del “espacio interno”, es decir, un campo vectorial de tres componentes (etiquetadas por el índice a en la ecuación (3.2)). En (3.2) el término $\partial_\mu \mathbf{m} \cdot \partial^\mu \mathbf{m}$ implica un producto escalar en el espacio de coordenadas (indicado mediante la contracción del índice μ) y un producto escalar en el espacio interno (introducido mediante el punto “.”).

Debemos notar que tanto el Lagrangiano (3.2) como la condición (3.1) son invariantes frente a rotaciones globales $O(3)$ en el espacio interno.

La condición (3.1) es considerada al momento de derivar las ecuaciones de movimiento introduciéndola en la acción mediante un multiplicador de Lagrange λ (donde $\lambda = \lambda(\mathbf{x}, t)$),

$$S = \int d^2x dt \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \mathbf{m} \cdot \partial^\mu \mathbf{m} + \lambda(\mathbf{m}^2 - 1) \right]. \quad (3.3)$$

De extremar la acción resultan las ecuaciones de movimiento

$$\partial_\mu \partial^\mu \mathbf{m} - 2\lambda \mathbf{m} = \square \mathbf{m} - 2\lambda \mathbf{m} = 0, \quad (3.4)$$

donde $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial_t^2}{c^2} - \nabla^2$.

Usando el vínculo (3.1) el multiplicador de Lagrange se resuelve en

$$\lambda = \frac{\mathbf{m} \cdot \square \mathbf{m}}{2}, \quad (3.5)$$

con lo que la ecuación (3.4) se reduce a

$$-\square \mathbf{m} + (\mathbf{m} \cdot \square \mathbf{m}) \mathbf{m} = 0. \quad (3.6)$$

Si nos restringimos al espacio bidimensional y a soluciones estáticas, se obtienen las ecuaciones de campo

$$\nabla^2 \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \nabla^2 \mathbf{m}) \mathbf{m} = 0. \quad (3.7)$$

Vemos que la no-linealidad del modelo se debe a la condición de unimodularidad $|\mathbf{m}|^2 = 1$ (en ausencia de este vínculo se obtendría la ecuación de Laplace, $\nabla^2 \mathbf{m} = \mathbf{0}$, para los campos estáticos).

3.2. Estados de energía finita

La energía de las soluciones estáticas ² se obtiene del Lagrangiano (3.2) y está dada por

$$E = \int d^2x \frac{1}{2} \partial_\sigma \mathbf{m} \cdot \partial_\sigma \mathbf{m}, \quad (3.8)$$

donde $\sigma = 1, 2$. La solución para energía nula satisface $\partial_\sigma \mathbf{m} = 0$ en todo el espacio por lo que $\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbf{m}^{(0)}$, es decir es independiente de \mathbf{x} y puede apuntar en cualquier dirección. Por lo tanto la solución con energía $E = 0$ es degenerada y todas estas soluciones están relacionadas entre sí por rotaciones $O(3)$ en el espacio interno.

Ahora consideramos las soluciones solitónicas en donde $E \neq 0$ y $E < \infty$. Reescribiendo (3.8) en coordenadas polares (r, θ)

$$E = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \|\nabla \mathbf{m}\| r dr d\theta, \quad (3.9)$$

observamos que la integral será convergente sólo si se satisface la condición

$$\|\nabla \mathbf{m}\| r \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

para $r \rightarrow \infty$, o equivalentemente:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{m}(\mathbf{r}) = \mathbf{m}^{(0)}. \quad (3.11)$$

El vector $\mathbf{m}^{(0)}$ no puede depender de la coordenada angular θ cuando $r \rightarrow \infty$ porque de lo contrario la componente angular del gradiente de \mathbf{m} no satisfaría (3.10).

Una consecuencia importante del vínculo (3.1) es la existencia de soluciones topológicamente estables (“solitones”) en dos dimensiones. Estas soluciones pueden ser clasificadas en sectores de homotopía, caracterizados por un índice topológico como veremos a continuación.

3.3. Carga topológica

Como se mencionó en la sección anterior el campo $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ toma el valor $\mathbf{m}^{(0)}$ en todos los puntos en el infinito. En consecuencia el espacio de coordenadas \mathbb{R}^2 se puede compactificar en una esfera (de radio $r = 1$ en virtud del vínculo $|\mathbf{m}|^2 = 1$), que llamaremos $S^{2(fis)}$, con los puntos de infinito identificados

²Esta energía puede identificarse con la masa de la solución ya que la solución es estática.

con el polo norte de la misma. Por lo tanto cualquier configuración estática representa un mapa de $S^{2(fis)}$ en $S^{2(int)}$ (espacio interno). Para analizar las implicancias de este mapa utilizaremos ideas fundamentales que provienen del campo de la topología.

Sean X e Y dos variedades sin fronteras, y consideremos mapas continuos entre ellas, $\phi : X \rightarrow Y$. Un mapa $\phi_0 : X \rightarrow Y$ se dice que es homotópico a otro mapa $\phi_1 : X \rightarrow Y$ si pueden ser deformados con continuidad uno en el otro.

Consideremos en particular el conjunto de campos ϕ que mapean la esfera unidad d -dimensional (S^d) en cierta variedad T

$$\phi : S^d \rightarrow T. \quad (3.12)$$

Denotamos la clase de equivalencia de todos los campos topológicamente equivalentes (homotópicos) a un campo representativo dado ϕ como $[\phi]$. El conjunto de todas las clases topológicamente equivalentes $[\phi]$ de los mapas $\phi : S^d \rightarrow T$ se estructura como grupo respecto de la operación de concatenación de mapas y es llamado “ d -ésimo grupo de homotopía de T ”.

En el caso puntual del modelo sigma no lineal $O(3)$ los campos \mathbf{m} representan mapas entre las esferas del espacio físico $S^{2(fis)}$, y el espacio interno $S^{2(int)}$: $\mathbf{m} : S^2 \rightarrow S^2$. El segundo grupo de homotopía de la esfera S^2 es el conjunto de los enteros \mathbb{Z} :

$$\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}. \quad (3.13)$$

Podemos definir entonces una carga topológica [30] $Q \in \mathbb{Z}$ en términos de una integral sobre el campo $\mathbf{m}(\mathbf{x})$:

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int dx^2 \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{m} \cdot (\partial_\mu \mathbf{m} \times \partial_\nu \mathbf{m}), \quad (3.14)$$

que nos permite distinguir los distintos elementos del grupo de homotopía $\pi_2(S^2)$ y clasificar los campos en distintos sectores topológicos de carga Q .

La carga topológica Q es una cantidad conservada en el sentido de que un campo con una carga dada no puede deformarse continuamente en otro de carga diferente. Por este motivo un solitón no puede decaer en otros solitones. La conservación de la carga Q no se debe al teorema de Noether sino a la estructura topológica del solitón. Para entender esto debemos notar que la carga (conservada) que se construye a partir de la corriente dada por el teorema de Noether (que la indicaremos con Q_N) se obtiene por transformaciones infinitesimales de los campos involucrados, es decir, continuas. Por lo tanto estas transformaciones no pueden alterar la topología del campo de donde se desprende la conservación de Q . Por otra parte la construcción de

la corriente conservada (y de la carga Q_N asociada a ella) requiere del conocimiento del Lagrangiano del sistema (ver [31] para una demostración del teorema de Noether). En este sentido diremos que Q_N contiene información sobre la dinámica del sistema. Sin embargo la carga topológica está definida sin hacer referencia explícita a ningún Lagrangiano, por lo que su valor es independiente de la dinámica del sistema.

3.4. Soluciones estáticas

En general el espectro de estados excitados de un sistema físico dado puede ser clasificado en dos grupos: excitaciones Hamiltonianas y excitaciones topológicas. Las primeras corresponden a estados excitados cuyas energías dependen de los operadores que definen al Hamiltoniano del sistema y tienen asociados números cuánticos, conservados como consecuencia de una simetría continua del sistema (teorema de Noether). Las excitaciones topológicas, por el contrario, tienen asociadas números cuánticos cuya conservación deriva de una estructura topológica no trivial del estado. En esta sección estudiaremos este tipo de excitaciones y determinaremos soluciones de (3.7) de energía finita para cada sector Q .

Dentro de cada sector topológico existe una cota inferior para la energía de una configuración estática. Estos límites fueron determinados por Belavin y Polyakov [25] y por Bogomolny [32] y puede derivarse de la siguiente manera: consideremos la desigualdad

$$\int dx^2 [(\partial_\mu \mathbf{m} \pm \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{m} \times \partial_\nu \mathbf{m}) \cdot (\partial_\mu \mathbf{m} \pm \epsilon_{\mu\sigma} \mathbf{m} \times \partial_\sigma \mathbf{m})] \geq 0. \quad (3.15)$$

Esta desigualdad es válida ya que se trata de un producto escalar de vectores iguales. Luego de expandir y usar la condición $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1$ y su derivada, que implica $\mathbf{m} \cdot (\partial_\nu \mathbf{m}) = 0$, obtenemos la desigualdad

$$\int dx^2 (\partial_\mu \mathbf{m}) \cdot (\partial_\mu \mathbf{m}) \geq \pm \int dx^2 \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{m} \cdot (\partial_\mu \mathbf{m} \times \partial_\nu \mathbf{m}). \quad (3.16)$$

En el miembro de la izquierda reconocemos a la expresión para la energía (3.8) y en el de la izquierda a la carga topológica (3.14) con lo que la desigualdad se reduce a

$$E \geq 4\pi|Q|. \quad (3.17)$$

Esto impone una cota inferior para la energía en un dado sector. En cada sector Q la energía es minimizada cuando vale la igualdad (3.17) y esto sucede si y solo si es solución de

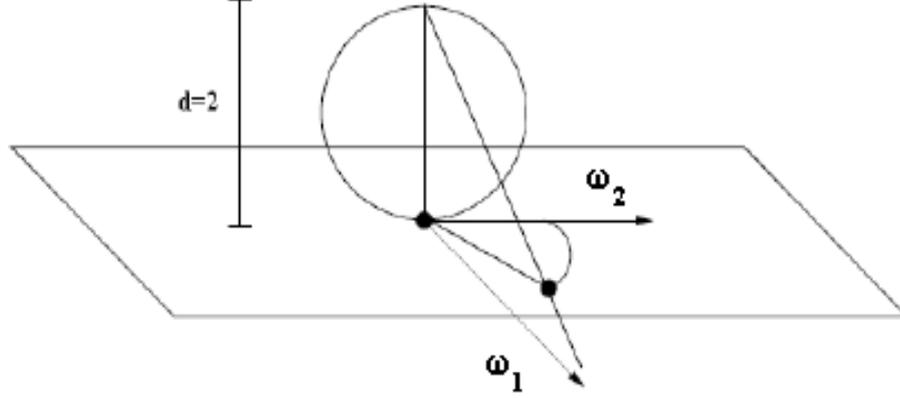


Figura 3.1: Proyección estereográfica de puntos en la esfera (de diámetro $d = 2$) sobre el plano $\omega_1\omega_2$.

$$\partial_\mu \mathbf{m} = \pm \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{m} \times (\partial_\nu \mathbf{m}). \quad (3.18)$$

Se puede verificar que si \mathbf{m} satisface (3.18) entonces será también solución de (3.7).

El problema de determinar las soluciones de (3.18) puede ser simplificado por medio de un cambio de variables apropiado. En este caso proyectaremos estereográficamente los puntos de la esfera sobre el plano (figura 3.1) y representaremos estos puntos por las coordenadas cartesianas ω_1 y ω_2 . Los puntos sobre el rayo que parte del polo norte de la esfera (de coordenadas $(0,0,2)$) hacia el plano cartesiano están representados por la ecuación

$$\mathbf{s} = \{(0, 0, 2) - [\mathbf{m} - (0, 0, 1)]\}\mu + (0, 0, 2), \quad (3.19)$$

al variar el parámetro $\mu \in [0, \infty)$. La intersección con el plano $\omega_1\omega_2$ se obtiene cuando $s_3 = 0$, por lo tanto $\mu = 2/(m_3 - 1)$. Por lo tanto las coordenadas ω_1 y ω_2 están dadas por $m_1 2/(1 - m_3)$ y $m_2 2/(1 - m_3)$ respectivamente.

Construimos a partir de las coordenadas ω_1 y ω_2 una variable compleja

$$\omega \equiv \omega_1 + i\omega_2 = \frac{2m}{1 - m_3}, \quad (3.20)$$

donde $m \equiv m_1 + im_2$

Usando la ecuación (3.18) obtenemos el par de ecuaciones

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} = \pm \frac{\partial\omega_2}{\partial x_2} \quad y \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2} = \mp \frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}. \quad (3.21)$$

Las ecuaciones (3.21) son las condiciones de Cauchy-Riemann para ω que indican que es una función analítica tanto de $z = x_1 + ix_2$ como de $\bar{z} = x_1 - ix_2$.

La formulación en términos de la variable compleja ω es muy útil ya que en esta formulación las soluciones estáticas toman una forma sencilla donde ω está dada por una función racional de z o \bar{z} . Por convención, el primer caso corresponde a instantones y el segundo a anti-instantones [33], que en adelante llamaremos respectivamente solitones y antisolitones estáticos. Un prototipo de solución para $Q > 0$ arbitrario está dado entonces por:

$$\omega(z) = [(z - z_0)/\lambda]^n, \quad (3.22)$$

donde n es un entero positivo, λ es un número real y z_0 es un número complejo arbitrario. Las constantes λ y $z_0 = (x_1)_0 + i(x_2)_0$ están relacionadas con el tamaño y la ubicación del solitón y están asociadas a la invarianza tanto de E como de Q frente a transformaciones de escala y traslaciones respectivamente. Si se calcula la carga topológica para los campos obtenidos a partir de (3.22) se obtiene que $Q = n$. Si en lugar de emplear $\omega(z)$ como solución usamos $\omega(\bar{z})$ los parámetros λ , z_0 y n siguen teniendo la misma interpretación que antes, pero en este caso $Q = -n$. Es decir que si los solitones tienen carga positiva n , los antisolitones tienen carga negativa $-n$.

Reescribiendo al campo \mathbf{m} en términos de las coordenadas (r, θ) y fijando $z_0 = 0$ se tiene

$$\mathbf{m} = (f(r)\cos(n\theta), f(r)\sen(n\theta), g(r)), \quad (3.23)$$

para el solitón y

$$\tilde{\mathbf{m}} = (-f(r)\sen(n\theta), f(r)\cos(n\theta), g(r)), \quad (3.24)$$

para el antisolitón. Las funciones $f(r)$ y $g(r)$ están dadas por

$$f(r) = \frac{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^n}{\left(\frac{1}{4}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{2n}\right) + 1} \quad y \quad g(r) = \frac{\left(\frac{1}{4}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{2n}\right) - 1}{\left(\frac{1}{4}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{2n}\right) + 1}. \quad (3.25)$$

Nos referiremos al tamaño de la solución como aquel valor r_0 de r para el cual $m_3 = 0$ y está dado por

$$r_0 = 2^{1/n} \lambda. \quad (3.26)$$

Ahora vemos que para $n \rightarrow \infty$ tenemos

- si $r < r_0$, entonces $g(r)$ tiende a 1 en el intervalo $[0, r_0)$;
- si $r = r_0$, entonces $g(r) = 0$;
- si $r > r_0$, entonces $g(r)$ tiende a 1 en el intervalo (r_0, ∞) .

Por otra parte $r_0 \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto para $n \rightarrow \infty$ las funciones $g(r)$ (ver figura 3.2) tienden a

$$2\theta(r-1) - 1 = \begin{cases} -1 & \text{si } r < 1, \\ 0 & \text{si } r = 1, \\ 1 & \text{si } r > 1, \end{cases}$$

donde $\theta(r)$ es la función escalón ($\theta(r) = 0$, si $r < 0$ y $\theta(r) = 1$, si $r > 0$).

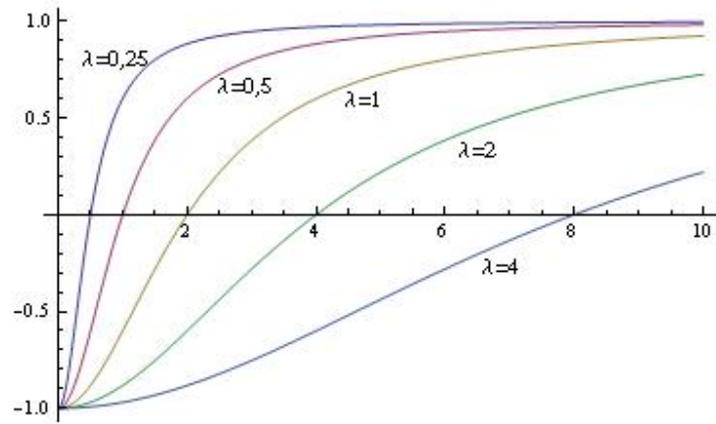
En general las soluciones de la ecuación (3.23) contienen una fase α arbitraria (reemplazando $(n\theta) \rightarrow (n\theta + \alpha)$). Esta fase está asociada a la invarianza $O(2)$ de la ecuación diferencial que define a \mathbf{m} una vez que se fijó el valor del campo en infinito (en este caso $O(2)$ corresponde a rotaciones del campo en torno al campo en infinito). Siendo ésta una transformación continua, la carga topológica del campo no varía.

Las densidades de energías de las soluciones para distintas cargas topológicas forman anillos centrados en el origen como puede verse en la figura 3.3. El hecho de que esta densidad sea no nula en una región acotada del espacio es un rasgo general de las soluciones solitónicas.

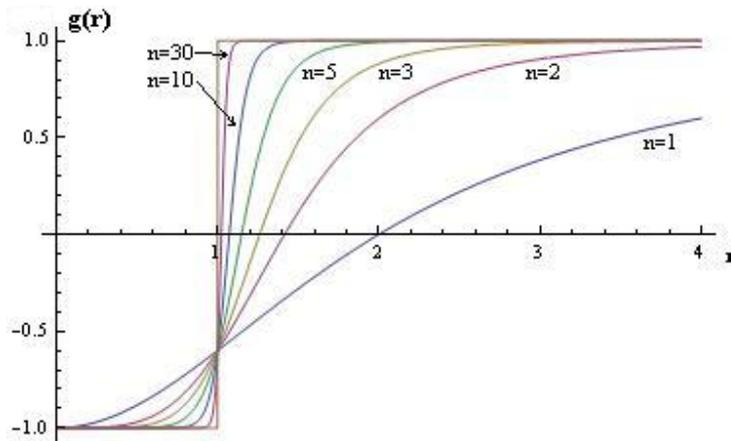
3.5. Estabilidad de las soluciones

Se observa que la energía (3.8) es invariante frente a traslaciones ($\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$, con \mathbf{a} vector fijo) y frente a transformaciones de escala ($\mathbf{x} \rightarrow \kappa \mathbf{x}$). De estas simetrías, la segunda indica que el modelo admite la existencia de solitones de tamaños arbitrarios. Es posible entonces que ante pequeñas perturbaciones los solitones puedan expandirse indefinidamente o contraerse hasta el colapso. Debemos observar que la inestabilidad de las soluciones está relacionada con la dimensionalidad del problema. Esta inestabilidad se puede remover por medio de la inclusión de términos adicionales en la expresión para la energía

estática. Es necesario para ello que estos términos no escaleen como $\partial_\sigma \mathbf{m} \cdot \partial_\sigma \mathbf{m}$ (de lo contrario la invarianza permanecería). Se introduce así una escala espacial definida y el modelo se estabiliza.



(a)



(b)

Figura 3.2: (a) gráfica de $g(r)$ para $n = 1$ y distintos valores de λ ; (b) gráfica de $g(r)$ con $\lambda = 1$ y distintos valores de n . En esta última puede observarse que $g(r)$ tiende a la función escalón conforme $n \rightarrow \infty$.

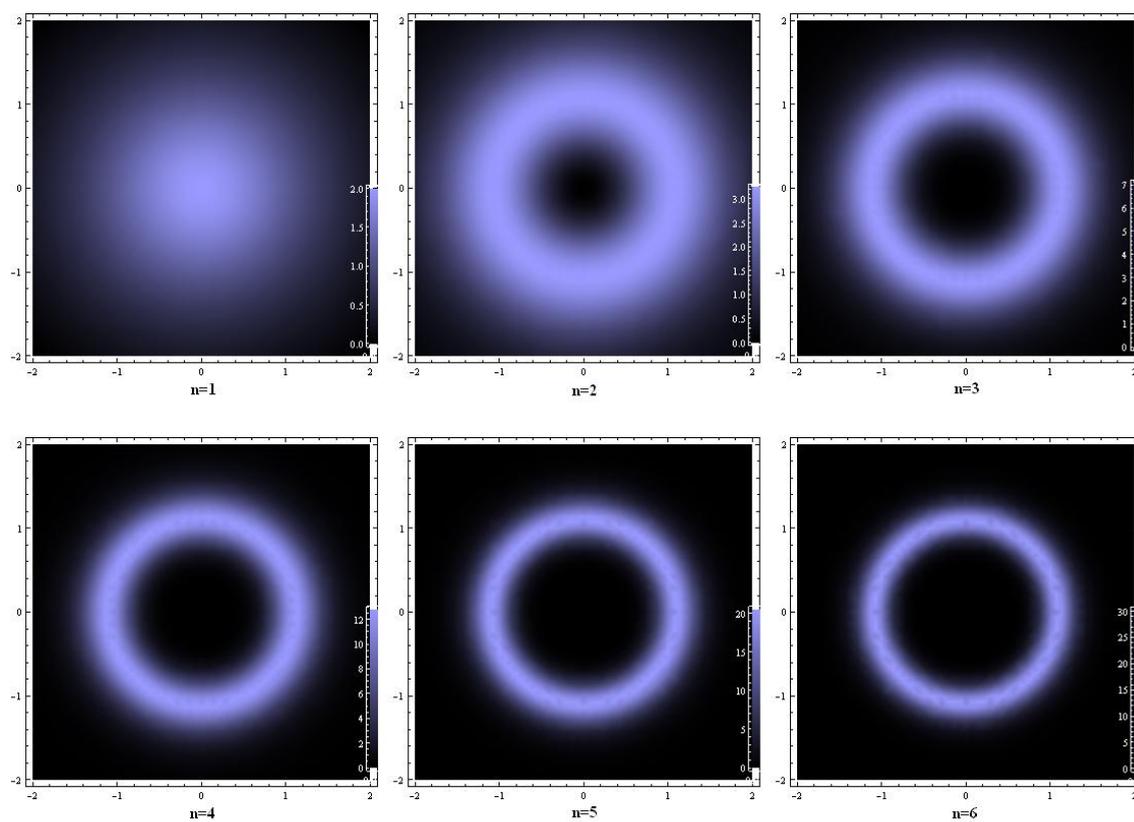


Figura 3.3: Densidades de energía para solitones con cargas topológicas $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 .

Capítulo 4

Eskirmiones

En este capítulo estudiaremos las ecuaciones de campo correspondientes al modelo en estudio (ecuación 1.17) y se analizarán las propiedades de un eskirmión aislado.

4.1. Densidad de energía y ecuaciones de movimiento

Al considerar el límite de sistema continuo para el modelo estudiado en este trabajo (ecuación (1.17) de la Introducción) el campo de magnetizaciones ($\mathbf{n}(x)$) es descrito por el Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = J \frac{1}{2} \sum_{\mu} \partial_{\mu} \mathbf{n} \cdot \partial^{\mu} \mathbf{n} - D \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}. \quad (4.1)$$

La densidad de energía estática correspondiente es:

$$\mathcal{E} = J \frac{1}{2} \partial_i \mathbf{n} \cdot \partial_i \mathbf{n} + D \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}, \quad (4.2)$$

donde el índice i corre sobre las coordenadas espaciales. Hay que recordar que $\partial^i = -\nabla_i$, $\partial_i = \nabla_i$ y que la energía es menos el Lagrangiano.

Si tomamos al vector \mathbf{n} representado en coordenadas esféricas, podemos elegir

$$\mathbf{n} = (-\sin[f(r)] \sin[n\theta], \sin[f(r)] \cos[n\theta], \cos[f(r)]). \quad (4.3)$$

Introduciendo esto en (4.2) la energía resulta

$$E = 4J\pi \int r dr \left[\left(\frac{1}{2} \frac{df}{dr} + \kappa \right)^2 - \kappa^2 + \frac{n\kappa}{r} \sin[f] \cos[f] + \frac{n^2}{4r^2} (\sin[f])^2 - \beta(\cos[f]) \right], \quad (4.4)$$

donde $\kappa = D/2J$ y $\beta = B/2J$. Con esto buscamos aquella $f(r)$ que haga estacionaria a la energía E . Usamos las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\delta E}{\delta f'} \right) - \frac{\delta E}{\delta f} = 0. \quad (4.5)$$

Haciendo el cálculo explícitamente nos queda:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} r f' + r \kappa \right) - (n\kappa [\cos(f)^2 - \sin(f)^2] + \frac{n^2}{2r} \sin(f) \cos(f) + \beta r \sin(f)) = (4.6)$$

$$= \frac{1}{2} r f'' + \frac{1}{2} f' + \kappa - n\kappa(1 - 2 \sin(f)^2) - \frac{n^2}{2r} \sin(f) \cos(f) - \beta r \sin(f) = 0 \quad (4.7)$$

A causa de la presencia del campo magnético se tiene que la componente $n_3 = \cos(f(r))$ de \mathbf{n} debe ser paralela a \mathbf{B} en infinito. Tomando a \mathbf{B} en la dirección del eje z se tienen las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} f(r) &\rightarrow \pi, \quad \text{para } r \rightarrow 0, \\ f(r) &\rightarrow 0, \quad \text{para } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.8)$$

En las secciones siguientes estudiaremos la solución de la ecuación (4.7) para $n = 1$. En este caso la ecuación se reduce a

$$f'' + \frac{f'}{r} + \frac{4\kappa}{r} (\sin f)^2 - \frac{1}{r^2} \sin f \cos f - 2\beta \sin f = 0. \quad (4.9)$$

4.2. Comportamientos asintóticos de la solución

Vamos a estudiar la ecuación en los límites $r \rightarrow 0$ y $r \rightarrow \infty$ haciendo uso de las condiciones de contorno (4.8).

Para $r \rightarrow 0$ tenemos que, haciendo un desarrollo lineal del $\sin[f(r)]$ en torno a π y conservando términos de primer orden en $f - \pi$,

$$f'' + \frac{f'}{r} - \frac{1}{r^2} [f - \pi] + 2\beta [f - \pi] = 0. \quad (4.10)$$

Definiendo $u = f - \pi$ nos queda la ecuación para u

$$u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} + 2\beta u = 0. \quad (4.11)$$

Haciendo el cambio de variables $r \rightarrow x = r\sqrt{2\beta}$ obtenemos la ecuación de Bessel:

$$u''(x) + \frac{u'(x)}{x} + \left[1 - \frac{1}{x^2}\right]u = 0. \quad (4.12)$$

Las soluciones de esta ecuación son las funciones de Bessel de primera especie $J_1(x)$ y de segunda especie $Y_1(x)$. De estas dos soluciones sólo $J_1(x)$ es regular en $r = 0$ cuyo comportamiento asintótico es $J_1(x) \approx \frac{1}{\Gamma(2)}\left(\frac{x}{2}\right)$. Es decir que, para $r \rightarrow 0$, f está dada por:

$$f(r) \approx C_0 J_1(r\sqrt{2\beta}) + \pi, \quad (4.13)$$

donde C_0 es una constante arbitraria.

Haciendo un análisis similar para $r \rightarrow \infty$ llegamos a la ecuación:

$$f'' + \frac{f'}{r} - \left[\frac{1}{r^2} + 2\beta\right]f = 0, \quad (4.14)$$

que nuevamente con el cambio de variables $r \rightarrow x = r\sqrt{2\beta}$ se lleva a la forma de la ecuación de Bessel modificada:

$$u''(x) + \frac{u'(x)}{x} - \left[1 + \frac{1}{x^2}\right]u = 0. \quad (4.15)$$

Esta ecuación tiene como soluciones a las funciones especiales $I_1(x)$ y $K_1(x)$. En $r \rightarrow \infty$, $I_1(x)$ diverge, mientras que $K_1(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp[-x]$. Es decir que queda para f :

$$f(r) \approx C_\infty K_1(r\sqrt{2\beta}), \quad (4.16)$$

con C_∞ otra constante arbitraria. Observar que en ambos casos las funciones dependen de $\sqrt{2\beta}r$.

4.3. Aproximación de Bogdanov

En virtud de lo discutido en la sección anterior, la solución del problema, para carga topológica $n = 1$, se puede aproximar a una recta en el origen, mientras que para $r \rightarrow \infty$ la solución decae exponencialmente. Con esto en

vista se puede considerar, como primera aproximación, una función definida a trozos (ver figura 4.1) de la forma

$$\theta(r) = \begin{cases} \pi(1 - \frac{r}{R}) & \text{si } r < R, \\ 0 & \text{si } r > R, \end{cases}$$

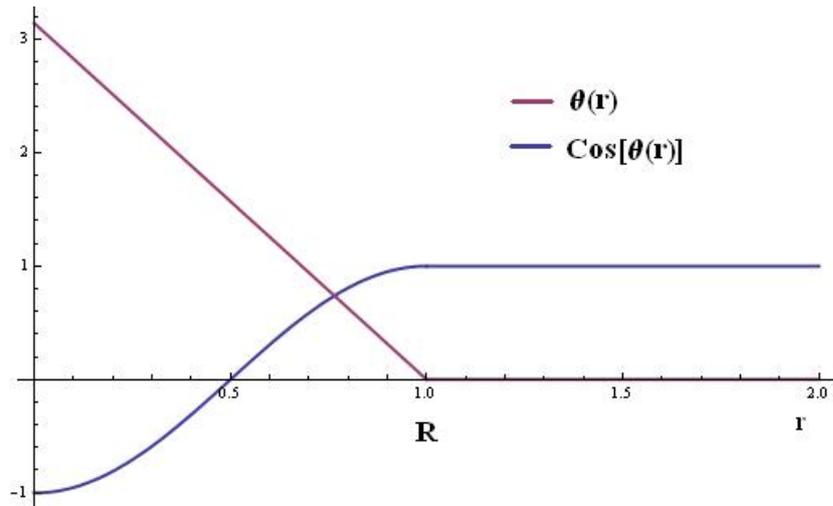
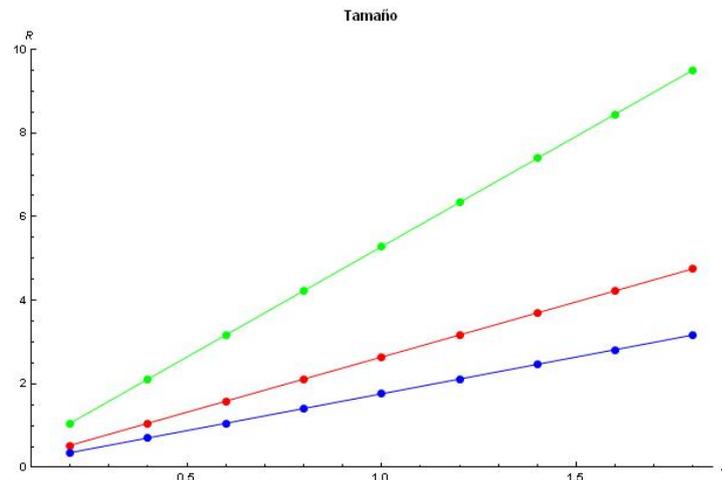
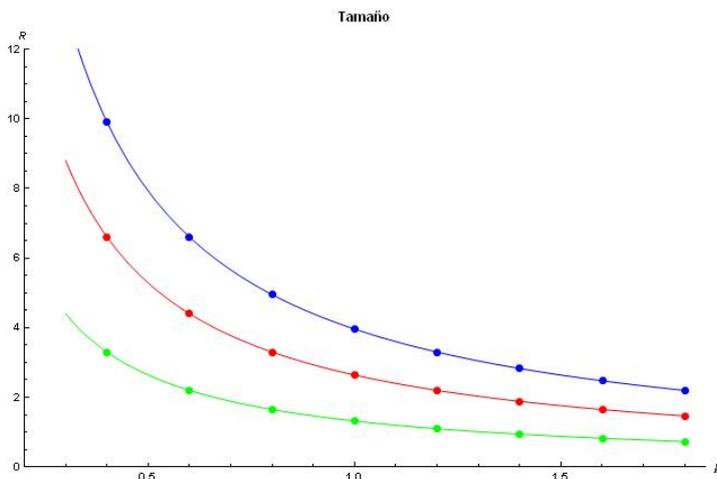


Figura 4.1: Gráficas de $\theta(r)$ y $\cos[\theta(r)]$ en la aproximación de Bogdanov [6], con $R = 1$.

El parámetro R puede interpretarse como el tamaño del eskirmión. Este tamaño puede obtenerse extremando (numéricamente) la energía para distintos valores de campo magnético y de la interacción de Dzyaloshinski-Moriya. Haciendo esto vemos que el tamaño es proporcional al cociente entre D y B , $R \approx D/B$ (figura 4.2).



(a)



(b)

Figura 4.2: (a) tamaño del eskirmión para distintos valores de β : en verde $\beta = 0,5$, en rojo $\beta = 1$ y en azul $\beta = 1,5$. Vemos que el tamaño crece proporcionalmente a κ . (b) El tamaño del eskirmión varía con la inversa de β : en azul $\kappa = 1,5$, en rojo $\kappa = 1$ y en verde $\kappa = 0,5$.

Capítulo 5

Redes de eskirmiones

En este capítulo analizaremos las diferentes fases que se encuentran en el sistema en estudio (descrito por el Lagrangiano 4.1). En particular nos centraremos en la búsqueda de una red de eskirmiones. Los estudios se realizarán mediante métodos analíticos (similares a los empleados en el capítulo anterior) y mediante el método de Monte Carlo.

5.1. Energía libre

Para estudiar la presencia de las distintas fases será necesario considerar las energías libres de las correspondientes configuraciones.

La densidad de energía como funcional de \mathbf{n} , está dada por

$$\mathcal{F}[\mathbf{n}] = \frac{J}{2} \sum_{\mu} \partial_{\mu} \mathbf{n} \cdot \partial_{\mu} \mathbf{n} + D \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}, \quad (5.1)$$

donde las derivadas espaciales se calculan respecto a las coordenadas del plano, $\mu = x, y$ [26]. La energía total es la integral de \mathcal{F} : $F[\mathbf{n}] = \int d^2r \mathcal{F}[\mathbf{n}]$.

En la fase ferromagnética en la que todos los momentos están alineados con el campo, la energía será proporcional al campo

$$F_{FM} = 2J \int 2\pi r dr [-\beta] = 2JL \int dy [-\beta], \quad (5.2)$$

donde L es el tamaño de la muestra. Escribimos la energía F_{FM} en coordenadas polares y cartesianas porque en el cálculo de las energías para la red de eskirmiones será conveniente la primera, mientras que para el cálculo de la energía de la red de hélices, será conveniente la segunda. Dado que en lo que sigue lo que haremos será comparar las energías de las distintas fases consideraremos a F_{FM} como el estado que tiene energía nula.

Para un eskirmión con carga topológica $n = 1$ (representado por el vector $\mathbf{n} = (-\sin[f(r)] \sin[\theta], \sin[f(r)] \cos[\theta], \cos[f(r)])$) tenemos:

$$F_{Sk} = 2J \int 2\pi r dr \left[\left(\frac{1}{2} \frac{df}{dr} + \kappa \right)^2 - \kappa^2 + \frac{\kappa}{r} \sin[f] \cos[f] + \frac{1}{4r^2} \sin[f]^2 - \beta(\cos[f] - 1) \right]. \quad (5.3)$$

A campo magnético nulo, la configuración

$$\mathbf{n} = [\mathbf{n}_1 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{n}_2 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})], \quad |\mathbf{k}| = 2\pi/L_D, \quad L_D = 4\pi J/|D|, \quad (5.4)$$

con período L_D y vector de onda \mathbf{k} (figura 5.1), corresponde al mínimo absoluto del funcional isotrópico $H_H + H_{DM}$. En la ecuación (5.4) \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 son vectores directores ortogonales entre sí que expanden el plano de rotación de la magnetización. Las ondas en (5.4) tienen un sentido de rotación fijado por el signo de la constante D y son continuamente degeneradas con respecto a la dirección de propagación.

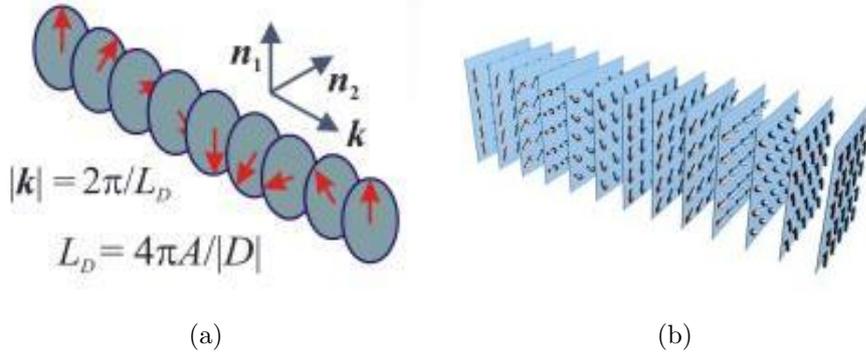


Figura 5.1: (a) La magnetización rota en un plano expandido por los vectores ortogonales \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 y el sentido de la rotación es determinado por el signo de D . (b) Arreglo de hélices propagándose en la misma dirección \mathbf{k} .

Para una hélice propagándose, por ejemplo, en la dirección del eje y la magnetización está representada por el vector $\mathbf{n} = (-\sin[f(y)], 0, \cos[f(y)])$. La energía está dada por:

$$\begin{aligned} F_H &= 2J \int_0^L \int_0^L dx dy \left[\left(\frac{1}{2} \frac{df}{dy} + \kappa \right)^2 - \kappa^2 - \beta(\cos[f] - 1) \right] = \\ &= 2JL \int_0^L dy \left[\left(\frac{1}{2} \frac{df}{dy} + \kappa \right)^2 - \kappa^2 - \beta(\cos[f] - 1) \right]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

La red de eskirmiones observada experimentalmente puede ser construida como un empaquetamiento compacto de eskirmiones no interactuantes que dan lugar a una red triangular de eskirmiones individuales. De este modo podemos expresar la energía total del cristal de eskirmiones como

$$F_{SkX} = \frac{L^2}{2\sqrt{3}R^2} F_{Sk}, \quad (5.6)$$

donde el factor $\frac{L^2}{2\sqrt{3}R^2}$ representa el número de eskirmiones en la muestra. El factor $\frac{1}{2\sqrt{3}R^2}$ es la densidad de eskirmiones que se obtiene observando que cada triángulo de lado $2R$, contiene medio eskirmión (figura 5.2), por lo tanto cada dos triángulos tendremos un eskirmion. La superficie ocupada por un eskirmion es entonces $2\sqrt{3}R^2$.

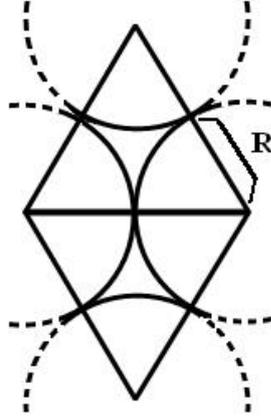


Figura 5.2: Cada triángulo de la red de eskirmiones contiene medio eskirmión.

La configuración de equilibrio del cristal debe minimizar F_{SkX} , por lo tanto también debe minimizar la densidad de energía libre $F_{Sk}[f(r)]/R^2$ (como funcional de f). Por lo tanto es posible determinar $f(r)$ extremando $F_{Sk}[f(r)]/R^2$.

Para ver cómo varía la energía libre de la hélice con el campo consideramos una hélice propagándose en la dirección y (como antes). La energía libre de esta fase será

$$F_H = \frac{2JL^2}{l} \int_0^l dy \left[\left(\frac{1}{2} \frac{df}{dy} + \kappa \right)^2 - \kappa^2 - \beta(\cos[f] - 1) \right], \quad (5.7)$$

con la condición de contorno $f(0) = \pi$ y $f(l) = 0$, donde $2l$ es el período de la hélice. Esta energía resulta de multiplicar la energía de una semiespira por el número de semiespiras a lo largo de la longitud de la muestra (L/l).

De modo análogo al de la red de eskirmiones, podemos determinar el valor óptimo de l minimizando esta energía libre para obtener la configuración de la red de hélices.

En general determinar la configuración de equilibrio, para cada una de las fases anteriores, requiere extremar numéricamente las correspondientes energías libres (como funcional de $f(r)$). Sin embargo haciendo uso de la aproximación de Bogdanov, el cálculo de las energías libres (5.6) y (5.7) puede realizarse de forma analítica prescindiendo de métodos numéricos. En esta aproximación el único parámetro libre es el tamaño del eskirmión (R) o de la hélice (l). Por lo tanto al evaluar las energías para los eskirmiones y las hélices obtendremos funciones de R y l respectivamente. La configuración de equilibrio estará dada por aquellos valores de los parámetros que anulen la primera derivada de las energías,

$$\frac{dF_H(l)}{dl} = 0, \quad (5.8)$$

$$\frac{dF_{SkX}(R)}{dR} = 0. \quad (5.9)$$

5.2. Tamaño del eskirmión en una red

A partir de las ecuaciones (5.8) y (5.9) podemos determinar el tamaño de las hélices y eskirmiones. Obtenemos para las hélices

$$l = \frac{\pi}{2\kappa} = \frac{1,5708}{\kappa}, \quad (5.10)$$

mientras que para los eskirmiones el tamaño es

$$R = \frac{\gamma + \pi^2 - Ci(2\pi) + \ln(2\pi)}{2\pi\kappa} = \frac{1,95876}{\kappa}, \quad (5.11)$$

donde $\gamma = 0,57721566490\dots$ es la constante de Euler-Mascheroni¹ y $Ci(x)$ es la función *coseno integral*².

Vemos que tanto el tamaño de las hélices como el de los eskirmiones decrece de manera inversamente proporcional a la interacción de Dzyaloshinski

¹La constante de Euler-Mascheroni está definida como

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln(n) \right) \right]. \quad (5.12)$$

²La función $Ci(x)$ está definida por medio de la integral

y es independiente del campo magnético. En principio es de esperar que esto sea así, puesto que del análisis dimensional de la expresión de la energía se deduce que J/D tiene unidades de longitud. Sin embargo, debemos notar que estos resultados contrastan notablemente con lo discutido sobre el tamaño de *un eskirmión aislado*, donde éste depende tanto de β como de κ .

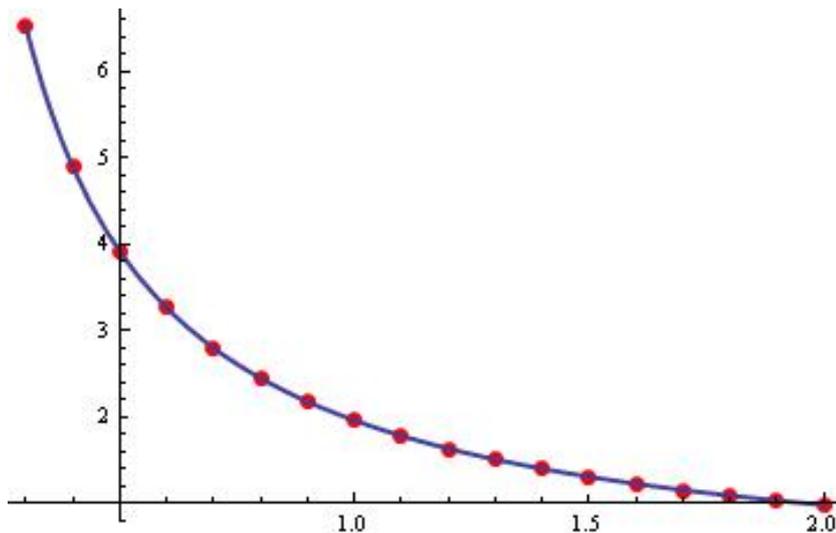


Figura 5.3: Tamaño de los eskirmiones en una red.

5.3. Diagrama de fases y campos críticos

La energía libre, para κ fijo, de H y SkX crecen de forma lineal con el campo (en las aproximaciones consideradas) desde valores negativos (ver figura (5.4(a))). La pendiente de la recta para la fase H es mayor que la de la fase SkX . Por lo tanto tiene lugar una transición entre estas fases. Estudiando la energía libre para distintos valores de κ se construyó el diagrama de fases de la figura (5.4(b)). Éste muestra que las tres fases en competencia

$$Ci(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos(t)}{t} dt, \quad (5.13)$$

y su desarrollo en serie es

$$Ci(x) = \gamma + \ln(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{2k(2k)!}. \quad (5.14)$$

son: fase helicoidal (H), la de red de eskirmiones (SkX) y la ferromagnética (FM). Dado que H es la solución exacta para campo magnético nulo es de esperar que la región de pequeños campos esté dominada por esta fase. Esto es precisamente lo que puede observarse en el diagrama de fases. En el extremo opuesto, grandes campos, el sistema se ordena en una fase FM a causa de la energía de Zeeman. En la región intermedia se observa la red de eskirmiones. En cada eskirmión domina la interacción de DM y en la región entre ellos domina el término de campo magnético. Por este motivo el empaquetamiento compacto de una red triangular de eskirmiones se ve favorecido por estas dos energías y se establece como una configuración de equilibrio. En los puntos de transición coexisten distintas fases de tal modo que en β_{c1} encontramos hélices y eskirmiones aislados. En β_{c2} la red de eskirmiones desaparece dando lugar a eskirmiones aislados en un fondo ferromagnético.

Del diagrama de fases puede observarse que existen dos campos críticos, uno para la transición $H \rightarrow SkX$ y otro para $SkX \rightarrow FM$ que los denotaremos por β_{c1} y β_{c2} respectivamente. Estos campos pueden ser determinados fácilmente a partir de la intersección de la curva para la energía del eskirmión con las curvas correspondientes a las otras dos fases. Las ecuaciones para los campos críticos como función de la constante de Dzyaloshinki son

$$\beta_{c1} = \frac{\kappa^2 \pi}{(\pi^2 - \pi - 4)} \left[-1 - \frac{\pi^5 - \pi^3(\gamma - Ci(2\pi) + \ln(2\pi))}{(\gamma + \pi^2 - Ci(2\pi) + \ln(2\pi))^2} + \frac{2\pi^3}{(\gamma + \pi^2 - Ci(2\pi) + \ln(2\pi))} \right], \quad (5.15)$$

$$\beta_{c2} = \frac{\kappa^2 \pi^4}{(\pi^2 - 4)[\gamma + \pi^2 - Ci(2\pi) + \ln(2\pi)]}. \quad (5.16)$$

Evaluando los constantes y retomando las unidades apropiadas obtenemos los dos campos críticos:

$$B_{c1} = 0,296 \frac{D^2}{J}, \quad (5.17)$$

$$B_{c2} = 0,674 \frac{D^2}{J}. \quad (5.18)$$

Por lo tanto la formación de redes de eskirmiones en este tipo de sistemas se observa en el rango de campos del orden de D^2/J .

5.4. Análisis por medio del Método de Monte Carlo

Se realizaron simulaciones de Monte Carlo a los efectos de corroborar los resultados de las secciones anteriores y profundizar en el estudio del sistema

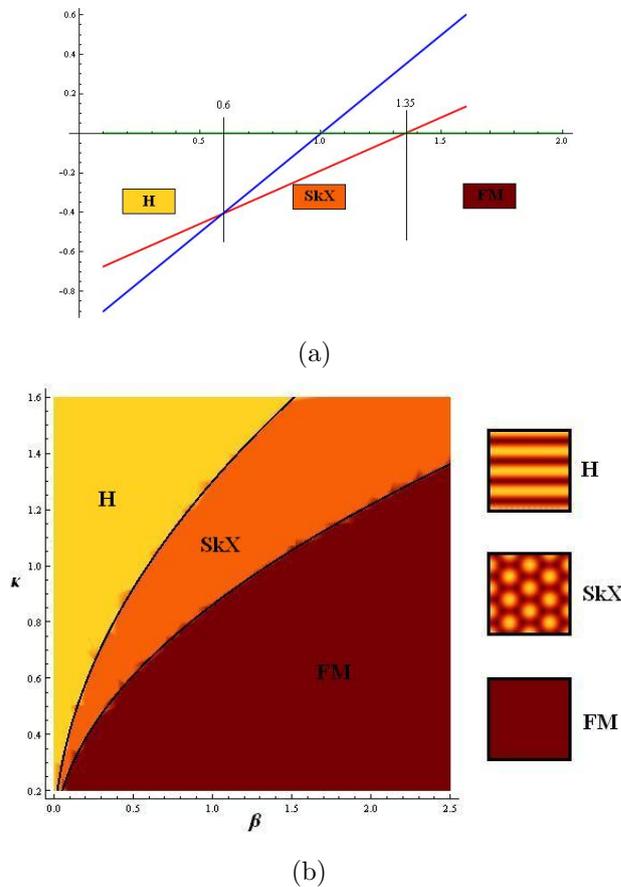


Figura 5.4: (a) energía libre de las tres fases como función de β para $\kappa = 1$; (b) diagrama de fases construido a partir de las energías de cada fase. En este se muestran las curvas de campos críticos como función de la constante de DM .

en consideración. La temperatura a la que se realizaron las simulaciones fue $T/J = 0,1$. Veremos que los resultados de estas simulaciones son comparables a los resultados de los análisis realizados en las secciones anteriores en los que la temperatura es nula.

Por medio de las simulaciones de Monte Carlo es posible determinar la configuración del campo de espines y confirmar el esquema discutido en la sección anterior. Se obtienen hélices para pequeños campos, conforme el campo crece se observa la presencia de eskirmiones formando una red, y para campos aún mayores esta textura se destruye originando un fondo ferromagnético. Se observa que la red de eskirmiones es triangular, como se mencionó antes (fig. 5.5), similar a la que forman los vórtices de Abrikosov en un superconductor de tipo II. En general puede observarse que el tamaño de los eskirmiones no

cambia con el campo magnético pero sí con la magnitud de la interacción de Dzyaloshinski. Al ser más intensa esta interacción los eskirmiones se reducen en tamaño sin que la estructura de la red se vea afectada. Esto puede inferirse a partir de un conteo de eskirmiones sobre una malla de 20×20 spines. Para $\kappa = 1,6$ observamos 12 eskirmiones mientras que para $\kappa = 2,8$ la cuenta asciende a 18 eskirmiones, por lo que el tamaño de los eskirmiones se reduce. Este resultado coincide, al menos cualitativamente, con lo mencionado en la sección anterior.

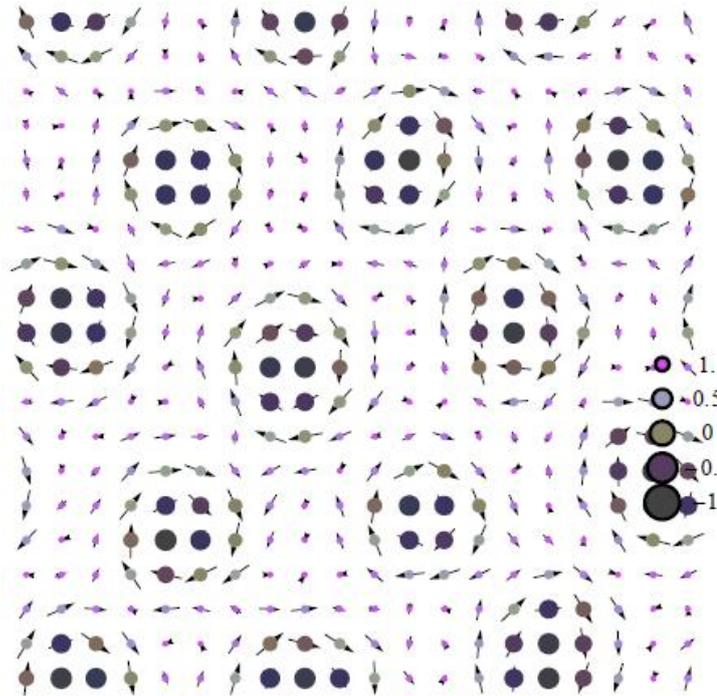


Figura 5.5: Campo de espines en una malla de 20×20 espines. Puede observarse el patrón triangular de la red de eskirmiones.

En la figura 5.6 se muestran el grado de colinealidad G_c de la magnetización (que lo definiremos más adelante), la componente M_z de la magnetización y la carga topológica Q del campo de espines ³. Se observa que la carga topológica permanece constante en cada una de las fases. En la fase de hélices esta carga es aproximadamente nula y crece al alcanzar la fase de eskirmiones donde la carga topológica es máxima. Se mantiene constante en todo el rango de campos para los que se encuentra esta fase hasta llegar al campo crítico

³Para una red cuadrada y discreta la carga topológica puede definirse como $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} \times \mathbf{S}$. En el límite continuo esta expresión es proporcional a la carga topológica definida para el caso continuo.

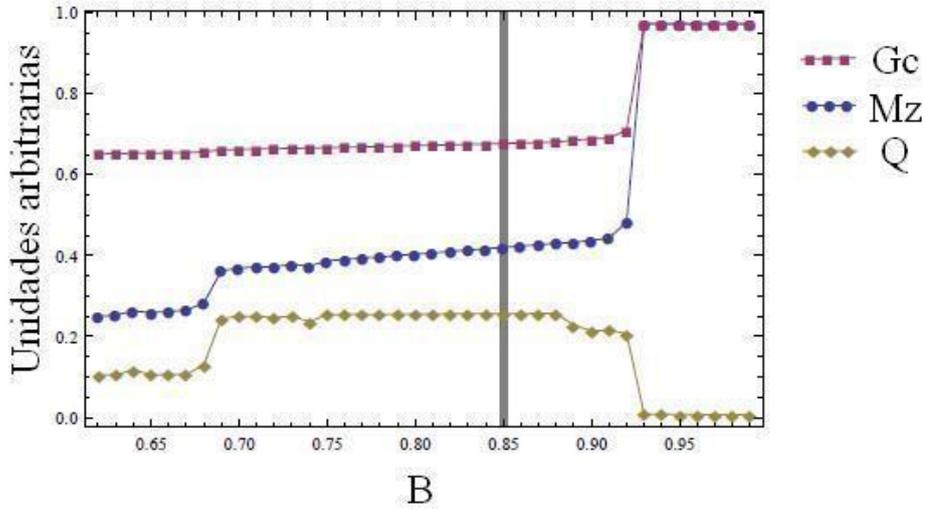


Figura 5.6: Gráficos de G_c , M_z y Q en función del campo magnético obtenidas por MC. La franja gris corresponde al valor de campo magnético en el que fue realizada la captura de la figura 5.5.

β_{c2} donde desaparece esta fase para dar lugar al orden FM con una carga topológica nula. Esto evidencia una de las características distintivas de los eskirmiones; la presencia de una propiedad topológica no trivial.

La magnetización (total) de la muestra, normalizada con respecto a su valor de saturación, es paralela al eje z (en la que se aplica el campo magnético). Las simulaciones muestran saltos en la magnetización al alcanzar los campos críticos en los que el sistema pasa de una fase a la otra. Esto da lugar a una curva de magnetización que consta de tres tramos. El primero de ellos (para $\beta < \beta_{c1}$) corresponde a la magnetización del estado de red de hélices. En este tramo la magnetización crece en forma aproximadamente lineal con una pequeña pendiente. En el marco de los análisis realizados en las secciones anteriores esta magnetización debería ser estrictamente nula si la configuración del campo de magnetizaciones corresponde a una hélices. Sin embargo el efecto del campo magnético es el de distorsionar estas hélices dando lugar a una helicoides [17]. En esta configuración la simetría de reflexión respecto al plano del sistema desaparece dando origen a una magnetización neta paralela al campo externo. En el segundo tramo $\beta_{c1} < \beta < \beta_{c2}$ se encuentran los eskirmiones. La magnetización varía de forma aproximadamente lineal con una pequeña pendiente centrada en un valor $\approx 0,44$. En el tercer tramo, para $\beta > \beta_{c2}$, el campo de magnetizaciones se ha polarizado completamente según el campo externo y se mantiene constante en su valor de saturación

para cualquier valor del campo.

Definiremos el grado de colinealidad como la integral del módulo de M_z ⁴ y lo denotaremos por G_c :

$$G_c = 2\pi \int r^2 dr |M_z|. \quad (5.20)$$

Observamos que en G_c no se aprecian cambios significativos en las regiones en las que se encuentran hélices y eskirmiones (figura 5.6). El valor mínimo es de 0,65 y el máximo 0,70, variando de forma aproximadamente lineal en esta región. Al alcanzar β_{c2} , G_c adquiere su valor de saturación y en esta región $G_c = M_z$.

En el modelo considerado en la sección 5.1 las magnetizaciones de cada fase pueden ser estimadas exactamente. Debido a que ni el tamaño de las hélices ni el de los eskirmiones varía con el campo magnético, es de esperar que el gráfico de M_z y G_c conste de tramos en los que la magnetización permanece constante. Efectivamente esto es lo que puede apreciarse en el gráfico de la figura 5.7.

Para la fase hélice, el vector de magnetización es nulo puesto que el campo de magnetizaciones está distribuido uniformemente sobre la circunferencia de una espira. En la fase ferromagnética los momentos magnéticos se alinean en forma paralela al campo externo dando como resultado una magnetización neta en la dirección del eje z ($\mathbf{M} = (0, 0, M_z)$). Dado que el campo de magnetizaciones es unimodular, esta magnetización (de saturación) es proporcional al área de la muestra, es decir $M_z = L^2$. Por lo tanto en lo siguiente consideraremos los valores de magnetización con respecto al valor de saturación. Para la red de eskirmiones tenemos

$$\mathbf{M}_{\text{skx}} = \frac{L^2}{2\sqrt{3}R^2} 2\pi \int_0^R r dr (0, 0, \cos[f(r)]) + \mathbf{M}_{\text{fFM}}. \quad (5.21)$$

Al integrar sobre el ángulo θ , las componentes x e y de la magnetización se anulan por lo que en adelante sólo consideraremos la componente M_z de la magnetización. La integral presente en el primer término de la ecuación (5.21) representa la magnetización de un eskirmión. La magnetización de la red de eskirmiones es la magnetización de cada eskirmión multiplicada por el número de eskirmiones ($L^2/2\sqrt{3}R^2$). En el cálculo de la integral se usa la

⁴Para el caso de una red discreta el grado de colinealidad es

$$G_c = \sum_i |M_z|_i, \quad (5.19)$$

donde la sumatoria se extiende a todos los sitios de la red.

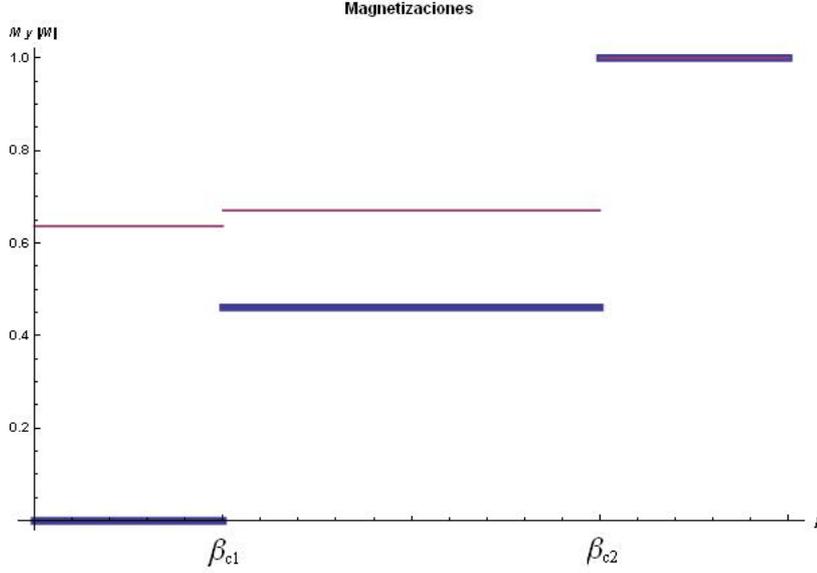


Figura 5.7: Gráficos de G_c (violeta) y M_z (azul) en función del campo magnético obtenidas por medio del modelo discutido en la sección 5.1.

aproximación de Bogdanov ($f(r) = \pi(1 - r/R)$) que da un valor de magnetización $M_z = 2L^2/\sqrt{3}\pi$. El vector \mathbf{M}_{fFM} corresponde a la magnetización del fondo ferromagnético en el cual se encuentran inmersos los eskirmiones. Esta magnetización es proporcional a la superficie del fondo ferromagnético A_{fFM}

$$A_{\text{fFM}} = L^2 - \frac{L^2}{2\sqrt{3}R^2}\pi R^2, \quad (5.22)$$

de modo que

$$\mathbf{M}_{\text{fFM}} = L^2\left[1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right](0, 0, 1). \quad (5.23)$$

Con esto tenemos que en la fase de red de eskirmiones la magnetización es

$$\mathbf{M}_{\text{SkX}} = L^2\frac{2}{\sqrt{3}\pi}(0, 0, 1) + L^2\left[1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right](0, 0, 1) \approx L^2(0, 0, 0,46). \quad (5.24)$$

Debemos observar que para esta fase la magnetización (normalizada) el valor de $M_z \approx 0,46$ se aproxima al valor obtenido por Monte Carlo $M_z = 0,44$.

Podemos repetir el análisis para calcular G_c . Haciendo esto obtenemos para cada una de las fases:

$$G_c^H = 0,64, \quad (5.25)$$

$$G_c^{SkX} = 0,67, \quad (5.26)$$

$$G_c^{FM} = 1. \quad (5.27)$$

Vemos que G_c permanece aproximadamente constante entre las fases H y SkX como se pudo ver en los resultados de Monte Carlo. Los valores obtenidos son consistentes con los resultados mostrados en la figura 5.6 donde observamos que G_c está centrada en un valor de 0,68 .

Capítulo 6

Conclusiones

Este trabajo estuvo centrado en la búsqueda de una fase de red de eskirmiones en sistemas de espines bidimensionales. Hemos estudiado un modelo en el que tanto las interacciones entre espines (acoplamiento ferromagnético e interacción de Dzyaloshinski), como el efecto del campo externo, desempeñan un rol fundamental en la estabilidad de la red de eskirmiones.

Los análisis realizados en torno a las aproximaciones consideradas (Bogdanov) han permitido corroborar la presencia de una red triangular de eskirmiones en el rango de campos magnéticos $B \approx \frac{D^2}{J}$. A su vez la posibilidad de una red cuadrada de eskirmiones ha sido descartada. Estas conclusiones se obtuvieron sobre la base de estudios de energía libre y magnetizaciones del sistema bajo la hipótesis de una red triangular y cuadrada.

Si bien la mayor parte del trabajo se centró en el estudio de las propiedades del sistema a $T = 0$, los análisis con Monte Carlo, a T no nula, han demostrado que la fenomenología del problema es correctamente interpretada por el esquema correspondiente a $T = 0$. Prueba de ello es el hecho de que, al incrementar el campo aplicado, el sistema evoluciona desde la fase H hacia la red de eskirmiones SkX hasta alcanzar la fase ferromagnética FM tal como se observa por medio de los dos métodos estudiados. El modelo estudiado en este trabajo es adecuado para describir el campo de magnetizaciones en láminas de $Fe_{0,5}Co_{0,5}Si$ [8] (y en general para semiconductores $Fe_{1-x}Co_xSi$ [9]) y $MnSi$ [7]. Experimentalmente, las fases del sistema evolucionan $H \rightarrow SkX \rightarrow FM$ [8] al incrementar gradualmente el campo magnético.

La dimensionalidad del sistema desempeña un papel central en la estabilidad del cristal de eskirmiones. Trabajos experimentales [7] muestran que para magnetos quirales 3D como el $MnSi$, en el rango de campos donde se encuentra la fase SkX (fase A), el estado de baja temperatura corresponde a una estructura cónica de espines. Para estabilizar la fase de eskirmiones es

necesario entonces reducir la dimensionalidad del sistema así como aplicar un campo magnético externo. En este trabajo se ha demostrado que es posible hallar una fase de eskirmiones en sistemas 2D a temperatura cero y cercanas a cero.

En el presente trabajo se estudió un modelo particular de sistema de espines y pudo demostrarse la presencia de redes de eskirmiones. Sin embargo han quedado fuera de discusión algunas consideraciones referidas a la temática de redes de eskirmiones. Mencionaremos a continuación algunas de las posibles extensiones del trabajo para desarrollos posteriores.

Las propiedades de las redes de eskirmiones han sido estudiadas sobre la base de un sistema de eskirmiones no interactuantes. Una posible línea de continuación estaría dedicada al estudio de estas interacciones y el efecto que puedan tener tanto en la estabilidad de la fase de redes eskirmiones así como en sus propiedades magnéticas.

En este trabajo estudiamos el modelo de ferromagneto no-centrosimétrico con interacción de DM. El efecto de esta interacción es el de rotar los espines originando una fase helicoidal. Esta fase compite con el orden ferromagnético; lo que da lugar a la formación de redes de eskirmiones. Una posible continuación del presente trabajo consiste en estudiar modelos antiferromagnéticos con interacciones de DM. En estos sistemas la frustración magnética juega un rol fundamental para dar origen a fases no triviales en bajas dimensiones. Proponemos aquí estudiar en qué medida la frustración magnética favorece la estabilidad de la fase de red de eskirmiones en distintos sistemas bidimensionales de espines como las redes triangular, cuadrada-frustrada, hexagonal-frustrada, etc.

Existe, en la literatura sobre eskirmiones, una serie de trabajos que estudian los efectos que tienen las corrientes eléctricas sobre los eskirmiones. En este contexto nos proponemos estudiar propiedades de transporte electrónico en entornos magnéticamente modulados por redes de eskirmiones.

Bibliografía

- [1] T. H. R. Skyrme, “*A New Model for Nuclear Matter*”, Proc. Roy. Soc. London, **A226**, 521 (1954).
- [2] V. G. Makhankov, Y.P. Rybakov y V. I. Sanyuk, “*The Skyrme Model*”, Springer Series in Nuclear and Particle Physics, Springer-Verlag, 1993.
- [3] T. H. R. Skyrme, “*A Nonlinear Field Theory*”, Proc. Roy. Soc. London, **A260**, 127 (1961).
- [4] T. H. R. Skyrme, “*A Unified Field Theory of Mesons and Baryons*”, Nucl. Phys., **31**, 556 (1962).
- [5] N. S. Manton, “*Geometry of Skyrmions*”, Commun. Math. Phys., **11**, 469 (1987).
- [6] A. N. Bogdanov y D. A. Yablonsky, “*Thermodynamically stable vortices in magnetically ordered crystals. The mixed state of magnets*”, Zh. Eksp. Teor. Fiz., **95**, 178 (1989).
- [7] S. Mülbauer *et al.*, “*Skyrmion Lattice in a Chiral Magnet*”, Science, **323**, 915 (2009).
- [8] X. Z. Yu *et al.*, “*Real-space observation of a two-dimensional skyrmion crystal*”, Nature (London), **465**, 901 (2010).
- [9] T. Adams *et al.*, “*Skyrmion Lattice Domains in $Fe_{1-x}Co_xSi$* ”, J. Phys.: Conf. Series, **200**, 032001 (2010).
- [10] X. Z. Yu *et al.*, “*Near room-temperature formation of skyrmion crystal in thin-films of the helimagnet $FeGe$* ”, Nature Materials, **10**, 106 (2011).
- [11] C. Pleiderer *et al.*, “*Skyrmion lattices in metallic and semiconducting $B20$ transition metal compounds*”, J. Phys.: Condens. Matter, **22**, 164207 (2010).

- [12] S. Seki *et al.*, “*Formation and rotation of skyrmion crystal in the chiral-lattice insulator Cu_2OSe_3* ”, arXiv:1206.5220v1, (2012).
- [13] S. D. Bader, “*Duality, quantum skyrmions, and the stability of a $SO(3)$ two-dimensional quantum spin glass*”, *Rev. Mod. Phys.*, **78**, 1 (2006).
- [14] M. Nagao *et al.*, “*Direct observation and dynamics of spontaneous skyrmion-like magnetic domains in ferromagnet*”, *Nature Nanotechnology*, **8**, 325 (2013).
- [15] J. Choi *et al.*, “*Observation of Topologically Stable 2D Skyrmions in an Antiferromagnetic Spinor Bose-Einstein Condensate*”, *Phys. Rev. Lett.*, **108**, 035301 (2012).
- [16] C. M. S. da Conceição y e. C. Marino, “*Duality, quantum skyrmions, and the stability of a $SO(3)$ two-dimensional quantum spin glass*”, *Phys. Rev. B.*, **80**, 064422 (2009).
- [17] U. K. Röβler, A. A. Leonov, A. N. Bogdanov, “*Chiral Skyrmionic matter in non-centrosymmetric magnets*”, *J. Phys.: Conf. Series*, **303**, (2011) 012105.
- [18] Ye-Hua Liu y You-Quan Li, “*A mechanism to pin skyrmions in chiral magnets*”, *J. Phys. Condens. Matter*, **25**, 076005 (2013).
- [19] Shi-Zeng Lin, C. Reichhardt y A. Saxena, “*Manipulation of skyrmions in nanodisks with a current pulse and skyrmion rectifier*”, *Appl. Phys. Lett.*, **102**, 222405 (2013).
- [20] X. Z. Yu *et al.*, “*Skyrmion flow near room temepature in an ultralow current density*”, *Nature Communications*, **3**, 988 (2012).
- [21] T. Schultz *et al.*, “*Emergent electrodynamics of skyrmions in a chiral magnet*”, *Nature Physics*, **8**, 301 (2012).
- [22] L. Sun *et al.*, “*Creating an Artificial Two-Dimensional Skyrmion Crystal by Nanopatterning*”, *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 167201 (2013).
- [23] N. W. Ashcroft y N. D. Mermin, “*Solid State Physics*”, Harcourt, 1976.
- [24] S. Blundell, “*Magnetism in Condensed Matter*”, OUP Oxford, 2001.
- [25] A. A. Belavin y A. M. Polyakov, “*Metastable states of two-dimensional isotropic ferromagnets*”, *JETP Lett.*, **22**, 245 (1975).

- [26] J. H. Han *et al.*, “*Skyrmion Lattice in Two-Dimensional Chiral Magnet*”, arXiv:10063973v2 (2010).
- [27] N. Manton, “*Topological Solitons*”, Lecture notes for the XIII Saalburg summer school, 2007.
- [28] N. Manton y P. Sutcliffe, “*Topological Solitons*”, Cambridge University Press, 2004.
- [29] A. Altland y B. Simons, “*Condensed Matter Field Theory*”, Cambridge University Press, 2010.
- [30] R. Rajaraman, “*Solitons and Instantons*”, North Holland, 1987.
- [31] M. E. Peskin y D. V. Schroeder, “*An Introduction to Quantum Field Theory*”, Perseus Books, 1995.
- [32] E. B. Bogomolny, “*The stability of classical solutions*”, Sov. J. Nucl. Phys., **24**, 449 (1975).
- [33] W. J. Zakrsewski, “*Soliton-like scattering in the $O(3)$ sigma-model in $(2+1)$ dimensions*”, Nonlinearity, **4**, 429 (1991).