

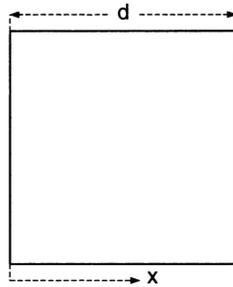
Probabilidad y Estadística en Física Experimental

Práctica 2

Distribuciones de probabilidad - Cambio de variables - Covarianza y correlación.

Ejercicios

1. Suponga que unas dadas partículas pueden caer aleatoriamente en un cuadrado de lado d como muestra la figura. Encuentre el valor esperado para x y su varianza.



Rta: $d/2$, $d^2/12$

2. Demuestre las siguientes propiedades:

- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
- $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- $\text{Var}(aX + bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) + 2ab\text{Cov}(X, Y)$

3. Se realizan N mediciones X_i sobre una misma distribución (es decir N repeticiones del mismo experimento) de esperanza μ y varianza σ . Muestre que la varianza del promedio $\bar{X} = \sum_i X_i/N$ es σ/\sqrt{N} si las mediciones son independientes. Discuta la diferencia entre la varianza de cada medición y la varianza del promedio. ¿Cuánto vale el varianza del promedio si las N mediciones están completamente correlacionadas?
4. Un modelo para poblaciones de organismos microscópicos en ambientes grandes es el de crecimiento exponencial. En $t = 0$ introducimos n_0 organismos en un gran tanque de agua, y sea x la tasa de crecimiento. Predecimos entonces que la población a un tiempo t tendrá un tamaño $n_0 e^{(xt)}$. Supongamos que x es desconocido, pero que tiene una pdf continua dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 3(1-x)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si otro caso} \end{cases} \quad (1)$$

Estamos interesados en las distribuciones para $n_0 = 10$ y $t = 5$, de modo que $a(x) = 10 e^{5x}$. ¿Cuál es la pdf $g(a)$?

Rta: $3/5a (1 - 0.2 \ln(a/10))^2$

5. Si x, y tienen la función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 3/4 + xy & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{si otro caso} \end{cases} \quad (2)$$

hallar (a) $f(y|x)$, (b) $P(y > 1/2|x = 1/2)$.

Rta: $(3 + 4xy)/(3+2x)$, $9/16$

6. La función de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias x, y está dada por $f(x, y) = c(2x + y)$, donde x, y pueden tomar valores reales tales que $2 < x < 6, 0 < y < 5$.

Para $c = 1/210$ determinar (a) $\text{Cov}(x, y)$, (b) ρ (quizás le sea útil ver `g2_integral.ipynb` para resolver y evaluar las distintas integrales).

Rta: $-0.05039, -0.03129$

Implementación de Herramientas Computacionales

1. Se lanza un dado con posibles resultados x 1, 2, 3, 4, 5, 6. Determinar el valor esperado de x , la varianza y skewness (ver definición en bibliografía) de la distribución, para un dado ideal simétrico y para un dado con $P1=P4=1/6, P2=P3=1/12, P5=P6=3/12$. Ver `g2_e_v_dado.py`.
2. Estudie la covarianza y la correlación de un dado conjunto de datos en base a los programas `g2_cov.py` y `g2_corr.py`.
3. Visualice las distribuciones marginales de una distribución de dos variables con `g2_marginal.py`.