Probabilidad y Estadística en Física Experimental

Práctica 4

Incerteza y Propagación de Errores. Estimación de parámetros. Máxima Verosimilitud. Cuadrados Mínimos.

Ejercicios

1. Suponga que dos medidas x_1 y x_2 tienen incerteza aleatorias individuales σ_1 y σ_2 y tienen una incerteza sistemática común S. Esto se puede tratar considerando que x_1 esta compuesto de dos partes x_1^r con incerteza aleatoria y x_1^s con incerteza sistemática S, de manera similar para x_2. Con esta definición x_1^r y x_2^r son independiente entre ellos y con x_1^s , x_2^s, pero x_1^s y x_2^s están completamente correlacionadas. Mostrar que la matriz de covarianza queda:

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + S^2 & S^2 \\ S^2 & \sigma_2^2 + S^2 \end{pmatrix}$$

2. En general, que t sea un estimador no sesgado de θ, no implica que t^2 sea no sesgado para θ^2. (a) Convénzase intuitivamente que ésto es cierto, sin hacer cuentas, para el caso que $\theta =$ E(x) y $t = \bar{x}$, con $f_x(t)$ simétrica alrededor de $t = 0$. (b) Sea k una variable aleatoria con distribución binomial $B_k(n;p)$, muestre que $\frac{k}{n}$ es un estimador no sesgado de p, mientras que $(\frac{k}{n})^2$ no lo es para p^2. Halle el bias de $(\frac{k}{n})^2$, y a partir de éste encuentre un estimador no sesgado de p^2.

   Rta: Estimador no sesgado $= \frac{k^2-k}{n(n-1)}$

3. Encuentre los estimadores de máxima verosimilitud conjuntos para la esperanza y la varianza de una gaussiana y obtenga su matriz de covarianza asintótica a partir de las derivadas segundas del logaritmo de la verosimilitud.

   Rta:

$$Cov(\hat{\mu}, \hat{\sigma^2}) = \begin{pmatrix} \hat{\sigma^2}/n & 0 \\ 0 & 2\hat{\sigma^4}/n \end{pmatrix}$$

4. Muestre que la aplicación del principio de máxima verosimilitud al ajuste de una función $y = f(x)$ sobre puntos x_i, y_i, donde los y_i tienen distribución doble exponencial, conduce al método de "módulos mínimos", en vez de cuadrados mínimos.

5. Considere N mediciones (x_i,y_i), donde los y_i son independientes, todos con la misma incerteza σ y Cov(y_i, y_j) = $\delta_{ij}\sigma^2$. Los parámetros de la recta y = a_1 + $a_2 x$ que mejor se ajusta a los datos surgen de minimizar la suma $[y_i$ - (a_1 + a_2 x_i)$]^2$, obteniéndose la fórmula de cuadrados mínimos (ver por ejemplo Ec. 10.10 Frodesen). Usando la fórmula de propagación de errores muestre que la matriz de covarianza de los parámetros de la recta es

$$Cov(\hat{a_1}, \hat{a_2}) = \frac{\sigma^2}{\Delta} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & N \end{pmatrix}$$

   con Δ = N $\sum x_i^2$ - $(\sum x_i)^2$

Implementación de Herramientas Computacionales

1. Reproduzca el gráfico y los resultados correspondientes a la Figura 6.2 del Libro de Cowan siguiendo cada uno de los pasos del programa g4_ml_exp_fit.py .

2. Para una variable aleatoria x que asumimos esta normalmente distribuida con μ y σ, discuta y estime los valores de los parámetros de la dada muestra en base a la técnica de Mayor Verosimilitud según el programa g4_mle_mu_sd.py .

3. Encuentre los valores de los parámetros de la parábola del Ejemplo 10.2.5 del libro de Frodesen realizando un ajuste por Cuadrados Mínimos con g4_ls_fit.py .

4. Encuentre los valores de χ^2 que se discuten en la Figrua 7.2 del libro de Cowan para los distintos órdenes de polinomios, tomando como referencia g4_ls_fit_chi2.py .

5. En base al programa g4_fit_line_with_error.py discuta la opción correcta para determinar la incerteza de la curva cuyos parámetros se determinan por un ajuste.