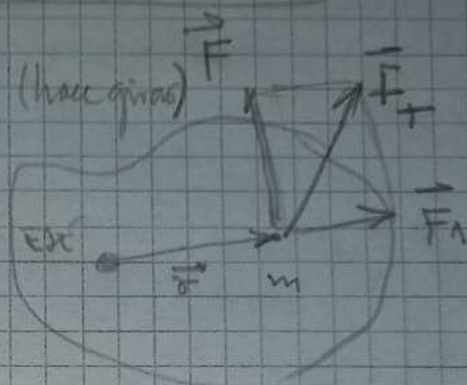
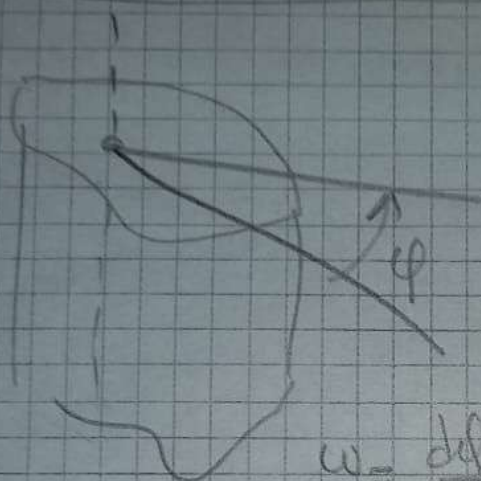


RESUMENROTACIONES

CUERPO RIGIDO : DISTANCIA ENTRE SUS PUNTOS
INVARIABLE

ROTACION ALREDEDOR DE UN EJE FIJO



$$\omega = \frac{d\phi}{dt} ; \quad \underline{N = \omega r} ; \quad \underline{a = \alpha r}$$

BRAZO DE PALANCA DE LA FUERZA

(DISTANCIA $\vec{r}$ DESDE DONDE ACTUA $\vec{F}$
HASTA EL EJE)

MOMENTO

$$N = r F$$

$$(\vec{N} = \vec{r} \wedge \vec{F})$$

$$N = r m a = r^2 m \alpha$$

CADA PARTICULA

$$N_i = r_i^2 m \alpha$$

(TODO α)
RIGIDO

$$[N = \sum_i N_i = \sum_i m_i r_i^2 \alpha = I \alpha]$$

$$I = \sum m_i r_i^2$$

: MOMENTO DE INERCIA

(DISTRIBUCION DE MASA)

b

HOJA N°

FECHA

$$N = I\alpha$$

(Rotacional)

$$F = ma$$

(Newton)

$$N = I\alpha = \frac{dL}{dt}$$

$$F = ma = \frac{dp}{dt}$$

$$\underline{L = I\omega} : \text{impulso angular}$$

$$N = 0 \Rightarrow L \text{ CONSTANTES CONSERVACION}$$

$$N = cte \Rightarrow \alpha = \frac{N}{I} = cte \text{ R.U.A.}$$

$$\left(\omega = \omega_0 + \frac{N}{I} t \right)$$

E.C. DE ROTACION

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$v_i = r_i \omega$$

$$\left(E_{c, \text{total}} = \frac{1}{2} m v^2 \right)$$

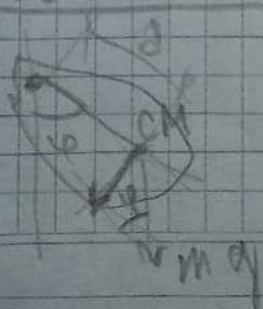
PENDULO DE TORSION

$$(N = -c\varphi) \text{ (lineal)}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\varphi = 0$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{c}}$$

PENDULO FISICO



$$\pm \frac{d^2\varphi}{dt^2} + mgd \varphi = 0$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

$$l'_{\text{eq.}} = \frac{I}{md}$$

NOTA

MOMENTOS DE INERCIA

PARALELISMO

MOV. PUNTO MATERIAL

m

a

r

ROTACION CUERPO RIGIDO

I

 α

L

MOMENTO DE INERCIA:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

DISTRIBUCION CONTINUA DE MASA

$$\sum_i \rightarrow \int \Rightarrow I = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \sigma dV$$

($\sigma = \frac{dm}{dV}$)

DENSIDAD CONSTANTE

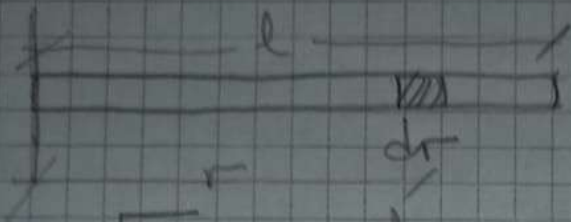
$$I = \sigma \int_V r^2 dV$$

EJ₁: MASA AISLADA A DISTANCIA r DEL EJE

$$\underline{I = m r^2}$$

EJ₂ : BARRA DE LONGITUD l

EJE l EN UN EXTREMO

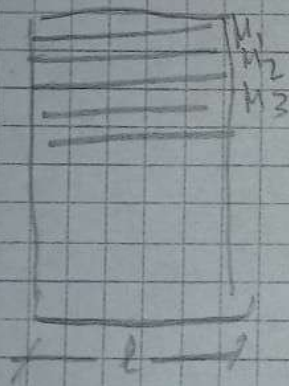


$$dV = s dr$$

s : SECCION NORMAL

$$I = \sigma s \int_0^l r^2 dr = \frac{\sigma s l^3}{3} = \frac{\sigma V l^2}{3} = \frac{M l^2}{3}$$

EJ₃ : PUERTA



SUPERPOSICION DE BARRAS
DE LONGITUD l

$$I = \sum_i \frac{l^2 m_i}{3} = \frac{l^2}{3} \sum_i m_i$$

$$I = \frac{M l^2}{3}$$

(M : MASA TOTAL DE LA PUERTA)

EJ₄ : CILINDRO LUECO



ODA MASA A DISTANCIA R DEL EJE

$$I = M R^2$$

Ej 5 CILINDRO MACIZO DE ALTURA h

CONTRIBUCIONES DE CILINDROS HUECOS
DE RADIOS $0 < r \leq R$

VOLUMEN DEL CILINDRO HUECO

$$dV = 2\pi r h dr$$

$$I = \sigma \int_V r^2 dV = \sigma \int_0^R r^2 2\pi h r dr$$

$$= 2\pi h \sigma \int_0^R r^3 dr$$

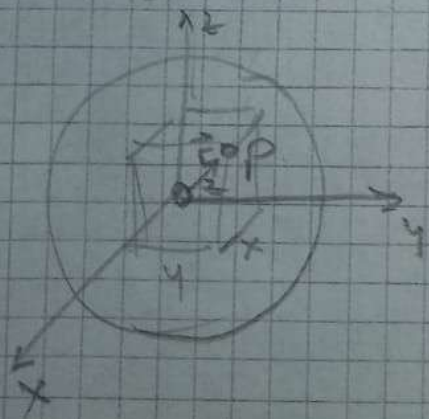
$$I = 2\pi h \sigma \frac{R^4}{4}$$

$$M = \frac{\pi R^2 h \sigma}{V}$$

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

Ej 6 ESFERA

EJE POR EL CENTRO



SIMETRÍA $\Rightarrow$ EJE X ó EJE Y
ó EJE Z
IGUALES

ρ AL EJE X: r

$$\sqrt{y^2 + z^2}$$

$$M_y : \sqrt{x^2 + z^2}$$

$$M_z : \sqrt{x^2 + y^2}$$

3 I (GUNDUS) $\Rightarrow$

$$\int_V (x^2 + y^2) dV = \int_V (y^2 + z^2) dV = \int_V (z^2 + x^2) dV$$

$$\Rightarrow \int_V x^2 dV = \int_V y^2 dV = \int_V z^2 dV$$

$$= \frac{1}{3} \int_V \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{r^2 \text{ (HIPOTENUSA)}} dV$$

$$I = \sigma \int_V (y^2 + z^2) dV = \frac{2\sigma}{3} \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dV$$

$$= \frac{2\sigma}{3} \int_0^R r^2 4\pi r^2 dr$$

(SUMA DE CASCOS DE RECTANGULOS)

$$I = \frac{8\pi\sigma}{3} \int_0^R r^4 dr = \frac{8\pi}{3} \sigma \frac{R^5}{5}$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$V\sigma = \frac{4\pi}{3} R^3 \sigma = M$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

TEOREMA DE STEINERCONOCIENDO I POR UN EJE QUE PASA POR C.M.CALCULAR I POR UN EJE $\parallel$ AL ANTERIOR* SIST. DE COORDENADAS CON ORIGEN EN EL CM* MOMENTO DE INERCIA RESPECTO A EJE Z :

$$I = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

(r_i^2 AL EJE Z)

 I' (RESPECTO A EJE $\parallel$ A Z A DISTANCIA l)

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{l}$$

$$\vec{r}'_i{}^2 = \vec{r}_i{}^2 + \vec{l}{}^2 - 2\vec{r}_i \cdot \vec{l}$$

$$I' = \sum_i m_i \vec{r}'_i{}^2 = \sum_i m_i r_i^2 + \sum_i m_i l^2 - 2 \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{l}$$

$$I' = I + M l^2 - 2 \vec{l} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i$$

CM EN EL ORIGEN $\Rightarrow \sum_i m_i \vec{r}_i = M \vec{R}_{CM} = \underline{\underline{0}}$

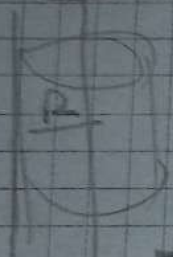
$$I' = I + M l^2$$

STEINER

ENUNCIADO

El Momento de Inercia respecto a un eje cualquiera (I') es igual al momento de inercia respecto a un eje paralelo que pasa por el CM (I) más el producto de la masa total del cuerpo por la distancia entre el eje y el CM.

EJ



I' DE UN CILINDRO MACIZO
CON RESPECTO A UN EJE
QUE CONTIENE UNA GENERATRIZ

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

$$l = R$$

$$\underline{\underline{I' = I + M R^2 = \frac{1}{2} M R^2 + M R^2 = \frac{3}{2} M R^2}}$$

EJ

~~EJE~~ RESPECTO DE EJE TANGENTE



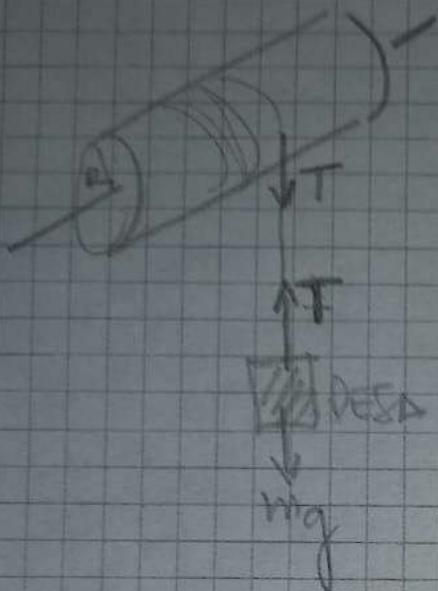
$$I' = \frac{1}{2} M R^2 + M R^2$$

$$\underline{\underline{I' = \frac{3}{2} M R^2}}$$

IIJ

MOVIMIENTO ROTACIONAL

$$N = I \alpha$$



ACTUA

$$mg - T = ma = m \frac{dv}{dt}$$

sin aceleración

$$N = TR$$

$$N = TR = I \alpha = I \frac{d\omega}{dt}$$

$$T = m(g - a)$$

$$m(g - a)R = I \alpha$$

$$v(PESA) = \omega R$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \alpha R$$

$$m(g - \alpha R)R = I \alpha$$

$$I \alpha + mR^2 \alpha = mgR$$

$$\alpha = \frac{mgR}{I + mR^2}$$

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

$$\alpha = \frac{g R}{R^2 \left(1 + \frac{M}{2m}\right)} \quad \underline{\text{cte}} \quad \text{U.A.}$$



$$a = \alpha R = \frac{g}{1 + \frac{M}{2m}}$$



$$\boxed{T = m(g - a) = \frac{m M g}{1 + \frac{M}{2m}}}$$

ROTACIONES GENERALES

TRANSLACIONES Y ROTACIONES ALREDEDOR DE
EJE FIJO

(distancia)

(ángulo)

(1D)

x

φ

UN GRADO DE LIBERTAD

BASTA UNA COORDENADA

PARA DESCRIBIRLO.

MOVIMIENTO GENERAL DE UN CUERPO RIGIDO

DANDO LA POSICION DE 3 PUNTOS DEL SOLIDO
QUEDA DETERMINADA SU POSICION

UN PUNTO: (EJ) C.M. $\Rightarrow$ 3 COORDENADAS: 3

OTRO PUNTO: FIJO AL CUERPO (SIEMPRE A
DISTANCIA FIJA DEL C.M. $\Rightarrow$

SE NECESITAN 2 COORDENADAS

TERCER PUNTO: DISTANCIA CONSTANTE A CM
Y AL OTRO PUNTO $\Rightarrow$

1 VARIABLE LIBRE

$3 + 2 + 1 = \underline{6}$ GRADOS DE LIBERTAD
(SE NECESITAN 6 COORDENADAS)

MOVIMIENTO

a) TRASLACION (TODOS LOS PUNTOS CON $\vec{v}$)

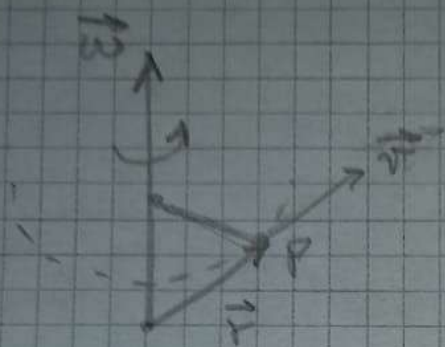
b) ROTACION PUNTO ALREDEDOR DE UN EJE

c) ROTOTRASLACION: SUPERPOSICION a) + b)

a) CARACTERIZADA POR EL MOVIMIENTO DEL C.M.

b) ROTACION:

LOS PUNTOS REALIZAN MOVIMIENTO CIRCULAR
ALREDEDOR DEL EJE CON $\vec{\omega}$ (SEGUN EL EJE)



$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

+ TRASLACION CON $\vec{v}_0 \Rightarrow$ (ROTOTRASLACION)

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

(6 FUNCIONES)

(6 GRADOS DE LIBERTAD)

$\vec{v}_0$: VELOCIDAD DE LOS PUNTOS DEL EJE

(SI $P \in \text{EJE} \Rightarrow \vec{r} \parallel \vec{\omega} \Rightarrow \vec{v}_{\text{ep}} = \vec{v}_0$)

$\vec{v}_0 \perp \vec{\omega} \Rightarrow$ PUNTOS INSTANTANEAMENTE EN ROLLO

PUNTOS $\vec{R}$ SATISFACEN $\vec{v} = 0 = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{R}$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{R} = -\vec{v}_0$$

$\vec{R}$ EN UNA $\perp$ A $\vec{\omega}$ Y A DISTANCIA $\omega R = v_0$

ESTA RECTA: EJE INSTANTANEO DE ROTACION

⇒ MOV. = ROTACION PARA ALREDEDOR DE LA
GENERATRIZ DE CONTACTO CON $\vec{\omega}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

($\vec{r}'$ DE LA GEN. DE CONTACTO A UN PUNTO CUALQUIERA)

CILINDRO QUE QUEDA SIN DESLIZAR

$M\vec{g}$ // al PLANO : $Mg \sin \varphi$

MOMENTO DE ESTA FUERZA : $N = R Mg \sin \varphi$
(RESPECTO DE LA G. de C.)

$$N = I' \alpha \quad I' \text{ (RESPECTO A G. de C.)}$$

STEINER $\Rightarrow I' = I + MR^2$
(TEOREMA DE STEINER)

$$N = (I + MR^2) \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{R Mg \sin \varphi}{I + MR^2}$$

CILINDRO MUY FINO $I = \frac{1}{2} MR^2$

$$\boxed{\alpha = \frac{R Mg \sin \varphi}{\frac{3}{2} MR^2} = \frac{\frac{2}{3} g \sin \alpha}{R}}$$

$$a = \alpha R = \frac{2}{3} g \sin \alpha < a_0 = \underbrace{g \sin \alpha}_{\text{SIN ROTAR}}$$

ENERGIA CINÉTICA EN ROTACIÓN

CONVIENE REFERIR EL MOVIMIENTO AL C.M.

POSICION DE m_i ($\vec{r}_i$) : $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i$

(REPECTO AL EJE)

$\vec{R}$: POSICION DEL CM

$\vec{r}'_i$: $\checkmark$ DE m_i REPECTO AL CM



$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}'_i$$



$$\sum m_i \vec{r}'_i = 0$$

$$\sum m_i \vec{v}'_i = 0$$

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{V} + \vec{v}'_i)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{V}^2 + \vec{v}'_i{}^2 + 2 \vec{V} \cdot \vec{v}'_i)$$

$$E_c = \underbrace{\frac{1}{2} M V^2}_{\text{TRANSLACION}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}'_i{}^2}_{\text{ROTACION ALREDEDOR DEL CM}} + 2 \vec{V} \cdot \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}'_i}_0$$

(TODA LA MASA EN CM
SE MUEVE CON $\vec{V}$)

$\vec{\omega}$ VELOCIDAD DE ROTACION ALREDEDOR DEL C.M

$$\vec{v}'_i = \vec{\omega} \wedge \vec{r}'_i ; \quad \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 = \frac{1}{2} \underbrace{I}_{\text{REPECTO CM}} \omega^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

