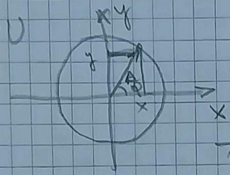
MOVIMIENTO OSCILATORIO

OSCILADOR ARMÓNICO

MCU



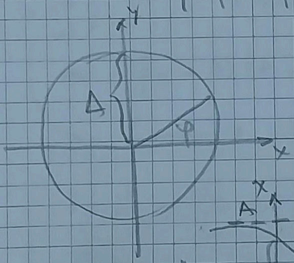
EN $\underline{x}$ Y EN $\underline{y}$

MOVIMIENTOS ARMÓNICOS

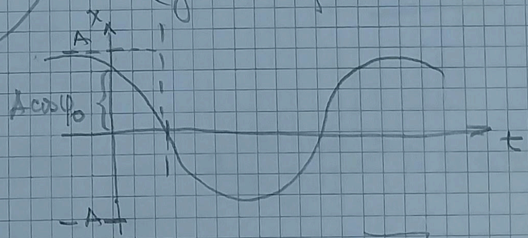
$$\vec{r}(t) = A\cos(\omega t)\,\hat{i} + A\,\text{sen}(\omega t)\,\hat{j}$$

MCU $\Rightarrow \begin{cases} \omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \text{cte} \\ \varphi = \varphi_0 + \omega t \end{cases}$ $\quad (\varphi(t=0) = \varphi_0)$

φ_0 : FASE INICIAL



$$\begin{cases} x = A\cos\varphi = A\cos(\omega t + \varphi_0) \\ y = A\,\text{sen}\,\varphi = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$



A : AMPLITUD $\quad$ [x entre A y −A]

$$\cos(\omega t + \varphi_0) = \cos(\omega t)\cos\varphi_0 - \text{sen}(\omega t)\,\text{sen}\,\varphi_0$$

$\Rightarrow$ OTRA EXPRESIÓN: $x = B\,\text{sen}(\omega t) + C\cos(\omega t)$

NOTA $\quad B = -A\,\text{sen}\,\varphi_0 \qquad C = A\cos\varphi_0$

2

Si $t=0 \Rightarrow x = x_0$; $v = \frac{dx}{dt} = v_0$

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi_0 \\ v_0 = -\omega A \sin\varphi_0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{v_0}{\omega x_0}}$$

$$\underline{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2}$$

FASE INICIAL

AMPLITUD.

PERIODO T: $\varphi \to \varphi + 2\pi \Rightarrow \varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi$

(tiempo)

$\left(T = \frac{2\pi}{\omega}\right)$

$\Rightarrow \varphi_0 + \omega(t+T) = \varphi_0 + \omega t + 2\pi$

$\rightarrow \omega T = 2\pi \rightarrow \underline{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

FRECUENCIA

$a_{cp} = \omega^2 \underset{(x)}{r} \longrightarrow a_{cp}\Big|_x = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0)$

$= -\omega^2 x$

$\boxed{F = ma = -m\omega^2 x = -kx}$ $(k = m\omega^2)$

FUERZA ELASTICA PRODUCE MOVIMIENTO ARMONICO

3

NEWTON: $ma = -kx$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

* ECUACION <u>DIFERENCIAL</u> DEL MOVIMIENTO ARMONICO

SOLUCION: $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\Downarrow$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$; $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

INDEPENDIENTE DE A! (<u>ISOCRONISMO</u>)

$F = -kx \Rightarrow U(x) = \frac{1}{2}kx^2$

$$\boxed{F = -\frac{dU(x)}{dx} = -kx}$$

U(x) MAXIMA PARA $x = A$
NULA $(=0)$ " $x = 0$

PROYECCION DE $\vec{v}$ SOBRE x

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{d}{dt}(A\cos(\omega t + \varphi_0)) = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$= -\omega y$$

$$\begin{cases} x \text{ MÁXIMO } (A) \Rightarrow v = 0 \\ x = 0 \quad\quad \Rightarrow v \text{ MÁXIMA} \end{cases}$$

$$E_T = E_c + U = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_T = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \underline{\text{sen}^2} (\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2} k A^2 \underline{\cos^2} (\omega t + \varphi_0)$$

$(m\omega^2 = k)$

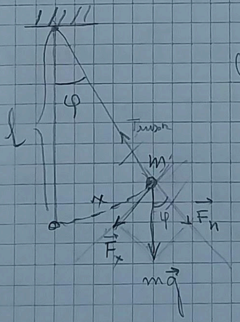
$$\boxed{E_T = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2}$$

CONSTANTE

$\propto A^2$

PÉNDULO SIMPLE (MATEMÁTICO)

EJEMPLO DE OSCILACIONES

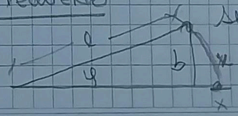


$x = l\varphi$
(ARCO)

$F_x = m a_x$

$-mg \,\text{sen}\,\varphi = m a_x$

φ PEQUEÑO



$\text{sen}\,\varphi = \dfrac{b}{l} \simeq \dfrac{x}{l}$

$\text{sen}\,\varphi \sim \varphi = \dfrac{x}{l}$

5

$$-mg\underbrace{\frac{x}{l}}_{\operatorname{sen}\varphi} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0}$$ OSCILADOR ARMONICO

$$\frac{k}{m} \rightarrow \frac{g}{l}$$

SOLUCION

$$\underline{x = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\underline{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}} \rightarrow \underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

OSCILACION COMPLETA

ISOCRONISMO PARA φ PEQUEÑO

$$\operatorname{sen}\varphi \rightarrow \varphi$$

* PENDULOS METALICOS l CAMBIA POR TEMPERATURA *
(DILATACION)

MIDIENDO T → MEDIR g

ADEMAS SI $T = 1$ s.

$$\boxed{l = \frac{T^2}{4\pi^2}g = 0{,}994 \text{ m}}$$

→ HUYGENS LO PROPUSO COMO PATRON DE LONGITUD

PEQUEÑAS OSCILACIONES

COMO EN EL PENDULO CUALQUIER OSCILACION PEQUEÑA (ALREDEDOR DE UN PUNTO DE EQUILIBRIO ESTABLE) ES APROXIMADAMENTE ARMONICA

$$F = -\frac{dU}{dx} \longrightarrow \text{EQUILIBRIO} \Rightarrow F = 0 \quad (\text{ELEGIMOS EN } x=0)$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dx} = 0 \quad (\text{EN } x=0)$$

PERO EN GENERAL

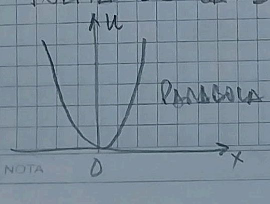
$$\frac{d^2U}{dx^2} \neq 0 \quad \text{en } x=0$$

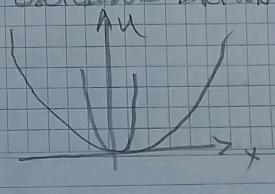
$$\frac{d^2U}{dx^2} = k \quad (\text{CONSTANTE})$$ VALIDO PARA PEQUEÑOS x

$$\Rightarrow \frac{dU}{dx} = kx \qquad \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{d^2u}{dx^2}\,dx = \frac{du}{dx} \\ \int k\,dx = kx \end{array} \right.$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2} k x^2}$$

EN LA VECINDAD DE UN PUNTO DE EQUILIBRIO ESTABLE, LA ENERGIA POTENCIAL TIENE LA FORMA DE LA DE UN OSCILADOR ARMONICO





HOJA N°

FECHA

OSCILACIONES AMORTIGUADAS

ROZAMIENTO $\Rightarrow$ A DISMINUYE

$\Rightarrow$ OSCILACIONES AMORTIGUADAS

E_T VA DISMINUYENDO (SE DISIPA)
(CALOR AL AMBIENTE)

FUERZA AMORTIGUAMIENTO

$$F_{am} \propto v$$

$$F_{am} = -cv$$

EJ CAIDA LIBRE

$$F = mg - cv = ma$$

$$a = g - \frac{c}{m} v$$

REPOSO INICIAL $a = g$
LUEGO a DISMINUYE YA QUE v AUMENTA
PERO v NO PUEDE SUPERAR EL LIMITE

$$\boxed{v_L = \frac{m}{c} g} \qquad a \to 0$$

VELOCIDAD LIMITE

HOMBRE CAYENDO EN EL AIRE $v_L \simeq 50 \frac{m}{s}$
CON PARACAIDAS $v_L \simeq 7 \frac{m}{s}$

NOTA

HOJA Nº

FECHA

$$a = g - \frac{c}{m} v = \frac{dv}{dt} = -\frac{c}{m}\left(v - \frac{m}{c} g\right)$$

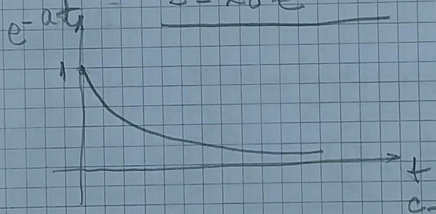
$$z = v - \frac{m}{c} g$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dv}{dt} \longrightarrow \frac{dz}{dt} = -\frac{c}{m} z$$

FUNCION CUYA DERIVADA ES PROPORCIONAL A ELLA

$$\left(\frac{d}{dx} e^{-ax} = -a e^{-ax}\right)$$

$$z = z_0 e^{-\frac{c}{m}t}$$



$$\Rightarrow \quad v - \frac{m}{c} g = z_0 e^{-\frac{c}{m}t}$$

$$t \to \infty \Rightarrow v_L = \frac{m}{c} g$$

LIMITE

NOTA

9

HOJA Nº

FECHA

OSCILADOR AMORTIGUADO

(ROCE SOBRE OSCILADOR)

$F_{el} = -kx$ y $F_{am} = -cv$

$F_{el} + F_{am} = ma$

$-kx - cv = ma$

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0}$$

OSCILADOR ARMONICO AMORTIGUADO

SOLUCION

$$x(t) = A(t)\cos(\omega' t + \varphi_0)$$

$A(t) = Ae^{-\gamma t}$ $\gamma = \frac{c}{2m}$

$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2}$

$\left(c=0 \rightarrow \gamma = 0 \rightarrow A(t) = A \rightarrow \omega' = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$

DEMOSTRACION

($\varphi_0 = 0$, $A = 1$ PARA SIMPLIFICAR)

$x(t) = e^{-\gamma t}\cos(\omega' t)$

$\frac{dx}{dt} = -\gamma e^{-\gamma t}\cos(\omega' t) - \omega' e^{-\gamma t}\,\mathrm{sen}(\omega' t)$

NOTA

10

$$\Downarrow \quad v(t) = -\gamma x(t) - \omega' e^{-\gamma t} \operatorname{sen}(\omega' t)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega'\gamma e^{-\gamma t} \operatorname{sen}(\omega' t) - \omega'^2 e^{-\gamma t} \cos(\omega' t)$$

$$a = -\gamma v + \gamma(-\gamma x - v) - \omega'^2 \underbrace{e^{-\gamma t} \cos(\omega' t)}_{x}$$

$$\left[-\gamma x - v = \omega' e^{-\gamma t} \operatorname{sen}\omega' t\right]$$

$$a = -2\gamma v - \gamma^2 x - \omega'^2 x$$

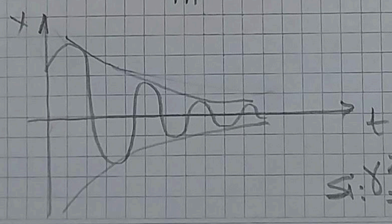
vimos $\quad m a + \overbrace{cv + kx}^{-F_R - F_{am}} = 0$

$$m(-2\gamma v - \gamma^2 x - \omega'^2 x) + cv + kx = 0$$

$$\gamma = \frac{c}{2m} \Rightarrow \underbrace{(k - m\gamma^2 - m\omega'^2)}_{=0} x = 0$$

$$\omega'^2 = \frac{k}{m} - \gamma^2 = \omega^2 - \gamma^2 \Rightarrow \omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

$$\left[\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right]$$



Si: $\gamma^2 = \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega' = 0$

NOTA AMORTIGUAMENTO CRÍTICO: NO OSCILACIÓN