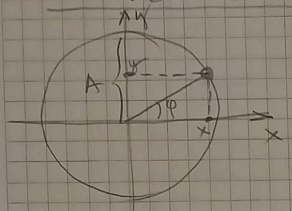
HOJA Nº

FECHA

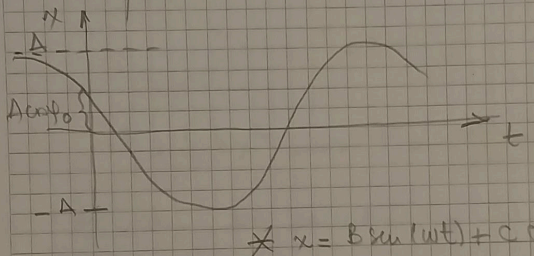
RESUMEN

OSCILADOR ARMONICO



PROYECCIONES $(\varphi = \varphi_0 + \omega t)$

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \\ y = A\sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$



$$\nexists\ x = B\sin(\omega t) + C\cos(\omega t)$$

$$B = -A\sin\varphi_0 \ ; \ C = A\cos\varphi_0$$

Si $t = 0 \Rightarrow x = x_0$ y $\frac{dx}{dt} = v_0$ (condiciones iniciales)

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi_0 \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi_0 \end{cases} \Rightarrow \quad tg\,\varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

$$\left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}\right) = A^2$$ amplitud

$$a_{cp} = -\omega^2 x = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$F = m\,a_{cp} = -m\omega^2 x = -kx \quad \begin{cases} \text{FUERZA ELASTICA} \\ \Downarrow \\ \text{MOVIMIENTO ARMONICO} \end{cases}$$

$$k = m\omega^2$$

NOTA

HOJA Nº

FECHA

$$ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0}$$ EC. DIFERENCIAL DEL OSCILADOR ARMONICO

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

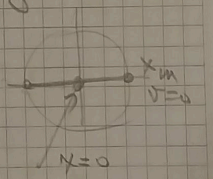
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \longrightarrow F = -\frac{dU}{dx} = -kx$$

$$\frac{dx}{dt} = v = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0) = -\omega y$$

x maxima $\Rightarrow$ $v = 0$

$x = 0$ $\Rightarrow$ v MAXIMA



$$E_T = E_c + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mk^2$$

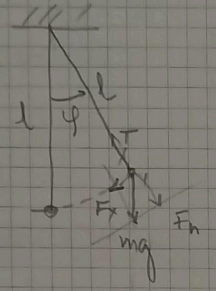
$$E_T = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \text{cte}$$

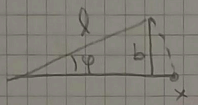
NOTA

HOJA Nº

FECHA

PENDULO SIMPLE





φ PEQUEÑO

$\sin\varphi \simeq \varphi = \frac{x}{l}$ $(b \simeq x$

$$-mg\frac{x}{l} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0$$

$\frac{k}{m} \rightarrow \frac{g}{l}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

ISOCRONISMO

INDEPENDIENTE

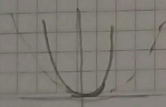
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

↓

MEDIR g

PEQUEÑAS OSCILACIONES

CUALQUIER OSCILACION PEQUEÑA ALREDEDOR DE UN PUNTO DE EQUILIBRIO ESTABLE ES APROXIMADAMENTE ARMONICA



$$F = -\frac{dU}{dx}$$

EQUILIBRIO $F=0 \rightarrow \frac{dU}{dx} = 0 \quad (x=0)$

NOTA

4

HOJA Nº

FECHA

$$\frac{d^2U}{dx^2} = k \qquad x = 0$$

x pequeño $\quad \frac{d^2U}{dx^2} = k \Rightarrow \frac{dU}{dx} = kx$

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$ Osc. Armónico

OSCILACIONES AMORTIGUADAS

$F_{am} = -cv \rightarrow$ CAIDA LIBRE

$$F = mg - cv = ma$$

$$a = g - \frac{c}{m}v$$

v aumenta $\rightarrow$ a disminuye

pero a: $v_L = \frac{m}{c}g \qquad a = 0$

OSCILADOR AMORTIGUADO

$$F_{el} + F_{am} = ma = -kx - cv$$

$$ma + kx + cv = 0$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$ Ec. diferencial

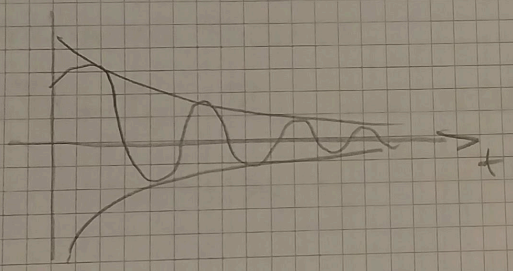
NOTA

HOJA N°

FECHA

$x = A(t)\cos(\omega' t + \varphi_0)$

$A(t) = A e^{-\gamma t}$; $\gamma = \frac{c}{2m}$; $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2}$



AMORTIGUAMIENTO CRITICO

$\gamma^2 = \frac{c^2}{4m} = \frac{k}{m}$ $\Rightarrow \omega' = 0$

NO MAS OSCILATORIO

11

HOJA Nº

FECHA

OSCILADOR FORZADO

AGREGAR $\vec{F}_f$ PARA COMPENSAR AMORTIGUAMIENTO (HACERLO ARMÓNICO)

⇒ OSCILADOR FORZADO:

$F_T = F_f + F_{el} + F_{am} \Rightarrow \underline{x(t) = B\cos(\omega_f t)}$

ω_f: IMPUESTA POR F_f

x: PROYECCIÓN DE CIRCULAR

y: PROYECCIÓN ORTOGONAL $y = B\,\mathrm{sen}(\omega_f t)$

$v = \frac{dx}{dt} = -B\omega_f \,\mathrm{sen}(\omega_f t) = -\omega_f y$

$a = \frac{dv}{dx} = -\omega_f^2 x$

$F_T = F_f - kx - cv = \underline{F_f - kx + c\omega_f y = ma}$

$F_f = ma + cv + kx$

$F_f = -m\omega_f^2 x - c\omega_f y + kx$ $\quad \downarrow k_f = m\omega_f^2$

$* \quad \underline{F_f = (k - k_f)x - c\omega_f y}$

NOTA

12

HOJA Nº

FECHA

$$F_f = A\cos(\omega_f t + \varphi_0)$$ FUERZA ARMÓNICA

YA QUE

$$F_f = A\cos\varphi_0 \cos(\omega_f t) - A\sin\varphi_0 \sin(\omega_f t)$$

$$* \begin{cases} F_f = \frac{A}{B}\cos\varphi_0\, x - \frac{A}{B}\sin\varphi_0\, y \\ F_f = (k - k_f)x - c\omega_f y \end{cases}$$

$x(t) = B\cos(\omega_f t)$

$y(t) = B\sin(\omega_f t)$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \frac{A}{B}\cos\varphi_0 = (k - k_f) \\ \frac{A}{B}\sin\varphi_0 = c\omega_f \end{cases} \rightarrow \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{c\omega_f}{k - k_f}$$

CUADRADO Y SUMA

$$\frac{A^2}{B^2} = (k - k_f)^2 + c^2\omega_f^2$$

$$B^2 = \frac{A^2}{(k - k_f)^2 + c^2\omega_f^2}$$

NOTA

13

HOJA Nº

FECHA

i) APLICAR F_f ARMONICA $\Rightarrow$ MOVIMIENTO ARMONICO CON LA FRECUENCIA DE F_f

ii) $\tan\varphi_0 = \dfrac{c\omega_f}{k - k_f} \neq 0$

$\Rightarrow$ F_f y x no simultáneos

desfasaje φ_0 función de

$$k - k_f = m\omega^2 - m\omega_f^2$$

si $\omega_f = \omega \Rightarrow \varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$

(ONLINE)

iii) $F_f = A\cos(\omega_f t + \varphi_0)$

A RELACIONADA CON B

$$B^2 = \frac{A^2}{m^2(\omega^2 - \omega_f^2) + c\omega_f^2}$$

si $\omega_f \gg \omega \longrightarrow$ B DISMINUYE CON ω_f

iv) Si $\omega_f \approx \omega \Rightarrow$ DENOMINADOR MINIMO

$\Rightarrow$ B SE HACE MAXIMA

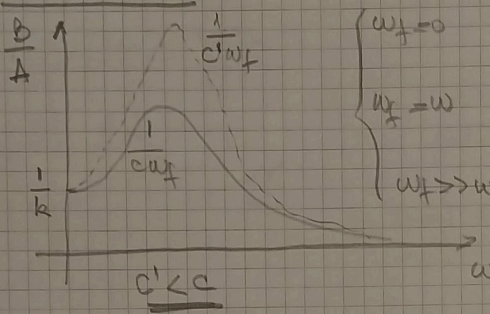
(RESONANCIA)

NOTA

HOJA Nº

FECHA

RESONANCIA



MENOR AMORTIGUAMIENTO ⇒ PICO DE RESONANCIA MÁS AGUDO

RESONANCIA ≡ F_f IGUAL CON LA FRECUENCIA NATURAL DEL OSCILADOR ARMÓNICO

* EN RESONANCIA $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

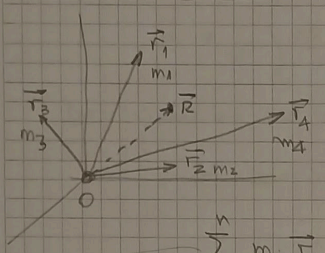
NOTA

HOJA Nº

FECHA

SISTEMAS DE PARTÍCULAS

CENTRO DE MASA



$$\begin{cases} \vec{r}_i & (i=1,2,3,\ldots) \\ m_i & (i=1,2,3,\ldots) \end{cases}$$

SI TODAS ESTUVIESEN EN $\vec{R}$

$(\vec{r}_i = \vec{R})$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = \vec{R} \sum_{i=1}^{n} m_i = \vec{R} M$$

$$\left(M = \sum_{i=1}^{n} m_i\right)$$

SI TODAS EN POSICIONES DIFERENTES

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$: DEFINE CENTRO DE MASA

SUMA VECTORIAL ! (≠ en CM SOLO SE TRATA DE EL CONJUNTO)

SUBDIVIDIMOS EL SISTEMA EN 2 SUBCONJUNTOS

$$M\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n'} m_i \vec{r}_i + \sum_{i=n'}^{n} m_i \vec{r}_i$$

$$= M' \vec{R}' + M'' \vec{R}''$$

① ②

⇓

C.M. TOTAL A PARTIR DE C.M DE SUBCONJUNTOS

NOTA

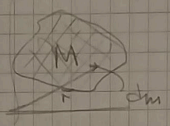
b

HOJA Nº

FECHA

DISTRIBUCION DE MASA CONTINUA

(NO DISCRETA)



$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\, dm$$

DENSIDAD DE UN CUERPO: $\sigma = \frac{M}{V}$

SI DENSIDAD VARIABLE

$$\sigma = \frac{dm}{dV}$$

$$\Rightarrow \vec{R} = \frac{1}{M}\int_V \sigma \vec{r}\, dV$$

$$M = \int_V dm = \int_V \sigma\, dV$$

MASA TOTAL

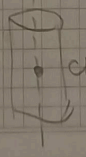
DISTRIBUCION DE MASA CON CENTRO DE SIMETRIA

EN ESFERA

ES CENTRO DE MASA

POR CADA dm EN $\vec{r}$
EXISTE OTRO dm EN $-\vec{r}$ } AL SUMAR $\vec{R}=0$

EJE DE SIMETRIA $\Rightarrow$ CM EN EL EJE



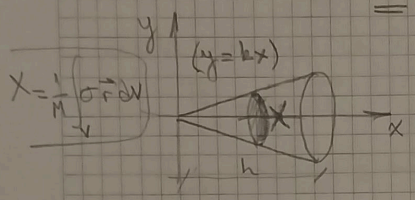
NOTA

HOJA Nº

FECHA

Ej CM DE UN CONO CIRCULAR RECTO DE ALTURA h

$$X = \frac{1}{M}\int_V \sigma\, \vec{r}\, dV$$



MASA EN EL CILINDRO ELEMENTAL:

$$\sigma \pi y^2 dx = \sigma\pi k^2 x^2 dx$$

$$C.M.\quad X = \frac{\sigma\pi k^2 \int_0^h x^3 dx}{\sigma\pi k^2 \int_0^h x^2 dx}$$

(masa × distancia al origen)

$$X = \frac{\frac{x^4}{4}\Big|_0^h}{\frac{x^3}{3}\Big|_0^h} = \frac{3}{4}h$$

MOVIMIENTO DEL C.M.

PARTICULAS SE MUEVEN $\Rightarrow$ $CM = CM(t)$

$$M\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

$$M\frac{d\vec{R}}{dt} = M\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

IMPULSO (CANTIDAD DE MOVIMIENTO) $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$

$$P_{CM} = M\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

SUMA DE IMPULSOS DE LAS PARTICULAS = IMPULSO DEL C.M

NOTA

HOJA Nº

FECHA

d

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \boxed{M\vec{A} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i}$$

CON N DENAMOS LA PARTICULA i ⇒

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$$

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}$$

RESULTANTE DE TODAS LAS $(j \neq i)$

ACCION Y REACCION $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{int} = 0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{ext} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{int} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{ext} = \vec{F}^{ext}$$

SOLO EXTERNAS

$$\vec{F}^{ext} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i$$

$$= M\vec{A}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}^{ext} = M\vec{A}}$$

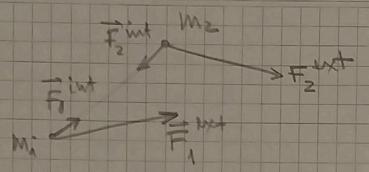
CM SE MUEVE OBEDECIENDO NEWTON COMO SI FUERA UNA PARTICULA DE MASA M (MASA TOTAL) SOBRE LA QUE ACTUA $\vec{F}^{ext}$

NOTA

e

HOJA Nº

FECHA



$$\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_1^{int} = m_1 \vec{a}_1$$

$$+ \quad \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_2^{int} = m_2 \vec{a}_2$$

$$\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} + 0 = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = M\vec{A}$$

$$\vec{F}^{ext} = M\vec{A}$$

CASO IMPORTANTE $\quad \vec{F}^{ext} = 0 \Rightarrow M\vec{A} = 0$

$$\vec{A} = \frac{d}{dt}(M\vec{V}) = 0 \Rightarrow M\vec{V} = cte$$

CM MOV. UNIFORME

$$M\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \vec{P} = cte$$

$\vec{P}$ TOTAL CONSTANTE : TEOREMA DE CONSERVACION

$$\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{P} = cte$$

NOTA