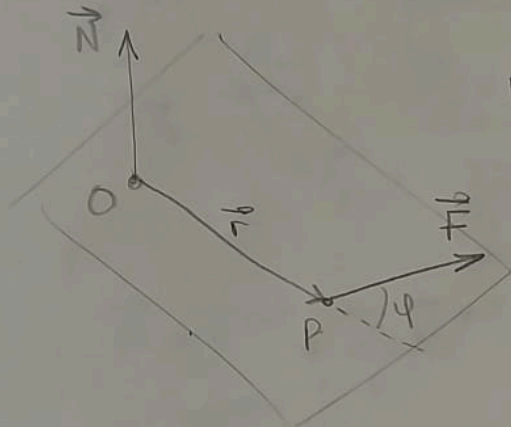


1) RESUMEN

DINAMICA DE LA ROTACION

ROTACION ALREDEDOR DE UN PUNTO



MOMENTO DE $\vec{F}$
RESPECTO DE $\underline{O}$

$$\vec{N} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Modulo:
 $N = r F \sin \varphi$

Por $\underline{O}$ EJE EN DIRECCION $\hat{u}$

$$N_u = \hat{u} \cdot \vec{N} = \hat{u} \cdot \vec{r} \wedge \vec{F}$$

VECTOR IMPULSO ANGULAR

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

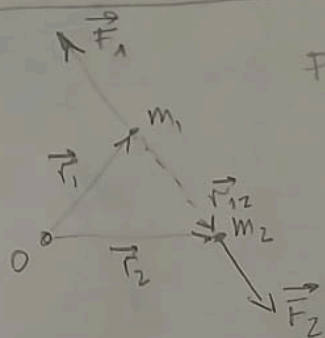
$$\begin{aligned} \left(\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \right) &\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = m \frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge \vec{v}) \\ &= m \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{v} + m \vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= m \vec{v} \wedge \vec{v} + m \vec{r} \wedge \vec{a} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{N} \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} ; \quad \vec{N} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cte}$$

SISTEMA DE PARTICULAS

$$\vec{N} = \sum_i \vec{N}_i = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i ; \quad \vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i$$

2)

CONSERVACION DE $\vec{L}$ FUERZAS INTERNAS $\Rightarrow$

MOMENTOS INTERNOS

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Rightarrow \vec{N}_2 = -\vec{N}_1$$

$$\sum_i \vec{N}_i^{\text{int}} = 0$$

$$\vec{N} = \vec{N}^{\text{ext}} = \sum_i \vec{N}_i^{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \text{si} \quad \sum_i \vec{N}_i^{\text{ext}} = 0$$

CONSERVACION DE $\vec{L}$ Giroscopo

CUERPO CON EJE DE SIMETRIA QUE ES EJE DE ROTACION

PESO $\Rightarrow$ MOMENTO

$$\vec{N} = \vec{R} \times M \vec{g}$$

$$\begin{aligned} \vec{N} \perp \vec{R} \\ \vec{N} \perp \vec{g} \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \vec{N} \text{ HORIZONTAL} \\ \vec{N} \perp \text{EJE} \end{array} \right.$$

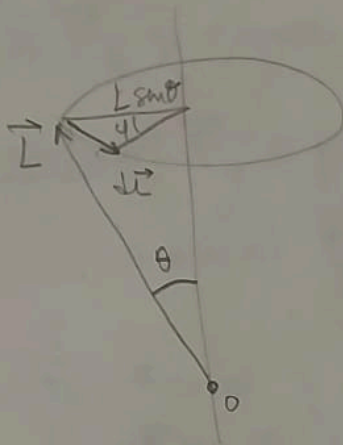
$$d\vec{L} = \vec{N} dt \quad \text{IGUAL DIRECCION}$$

$$\vec{N} \text{ HORIZONTAL} \Rightarrow N_z = 0 \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = 0 \Rightarrow \underline{L_z = \text{cte}}$$

$$\frac{d}{dt} L^2 = \frac{d}{dt} (\vec{L} \cdot \vec{L}) = 2 \vec{L} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = 2 \vec{L} \cdot \vec{N} \underset{(\perp)}{=} 0$$

$$\Rightarrow L^2 = \text{cte} \quad (\text{modulo etc})$$

3)



$\vec{L}$ gira describiendo
CONO CIRCULAR
CON VERTICE EN EL
PUNTO DE APOYO
= PRECESSION

$$d\vec{L} = \vec{N} dt$$

NOTANDO $dL = N dt = Mg \sin \theta R dt$

$$d\varphi = \frac{dL}{L \sin \theta} = \frac{Mg \sin \theta R dt}{L \sin \theta}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega' = \frac{MgR}{L}$$

(PRECESSION)

$$L = I\omega \Rightarrow \omega' = \frac{MgR}{I\omega}$$

ESTATICA

EQUILIBRIO DE CUERPOS SOMETIDOS A FUERZAS

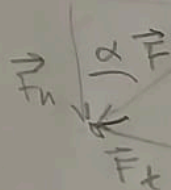
PUNTO MATERIAL

$$\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{F} = 0$$

FALTA CONOCER FUERZAS (VINCULOS) $(\vec{f})$ MOV. SOBRE
LINEAS O SUPERFICIES

$$\vec{F} + \vec{f} = 0$$



$$\vec{F}_n + \vec{f}_n = 0$$

$$\vec{F}_t + \vec{f}_t = 0$$

A) Si $\vec{F}_t >$ CIENTO VALOR $\Rightarrow \vec{F}_t$ NO LA PUEDE EQUILIBRAR

Equilibrio $\vec{F}_t \leq \mu \vec{F}_n$

(NOTA $f_r = \mu N_{normal}$)

(Máximo) $\frac{F_t}{F_n} \leq \mu$ (NOTA ESTÁTICO)

$F_n = F \cos \alpha$

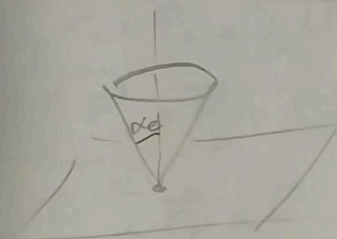
$F_t = F \sin \alpha$

$\frac{F_t}{F_n} = \tan \alpha$

$\tan \alpha_e = \mu$

$\alpha < \alpha_e$
(NOTA)

PARA EQUILIBRIO



$\vec{F}$ DEBE ESTAR
CONTENIDA EN EL CONO
DE ANGULO α_e

1 ESTADICA DEL CUERPO RIGIDO

* TRASLADA, ROTA, ROTOTRASLADA

NO LO HACE SI $\vec{F}=0$ y $\vec{N}=0$

↓
RESPECTO A
PUNTO DE BIENIDA

↓
 $\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_0$

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}'_i + \vec{r}_0) \wedge \vec{F}_i$$

$$= \sum_i \vec{r}'_i \wedge \vec{F}_i + \vec{r}_0 \wedge \sum_i \vec{F}_i$$

$$\vec{N} = \vec{N}' + \vec{r}_0 \wedge \vec{F}$$

$$\vec{F} \text{ y } \vec{N} \text{ NULOS} \Rightarrow \underline{\vec{N}': \text{NULO}}$$

VINCULOS i) PUNTO FIJO

ii) EJE FIJO

iii) APOYADO EN SUPERFICIE

⋮

VINCULOS REACCIONAN SOBRE EL CUERPO

↓ EQUILIBRIO

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{f} = 0 \\ \vec{N} + \vec{N}' = 0 \end{cases}$$

i) PUNTO FIJO: REACCION EQUILIBRA A $\vec{F}$
 $\vec{f} = -\vec{F}$

f PASA POR EL PUNTO ⇒

$$\vec{r} = 0$$

(BASTA DE MOMENTO NULO) ⇒ $\vec{N} = 0$

MOMENTO TOTAL
RESPECTO AL
PUNTO FIJO

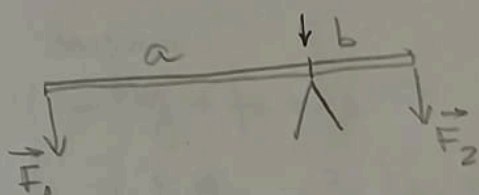
2

ii) EJE FIJO

NO HAY DESPLAZAMIENTO SOBRE EL EJE

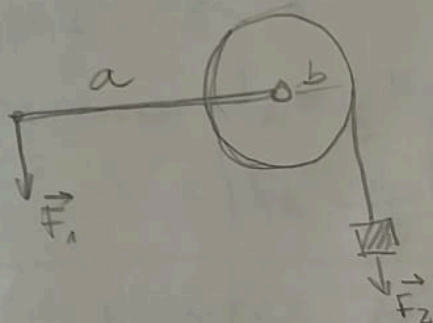
$$\vec{N} \perp \text{EJE}$$

EQUILIBRIO: $\vec{N} \cdot \vec{u} = N_m = 0$

 $\vec{u}$: DIRECCION
DEL EJEEJ: PALANCAS y Poleas.

$$N_m = 0 = F_1 a - F_2 b$$

$$\underline{\underline{F_1 = \frac{b}{a} F_2}}}$$



$$\underline{\underline{F_1 = \frac{b}{a} F_2}}}$$

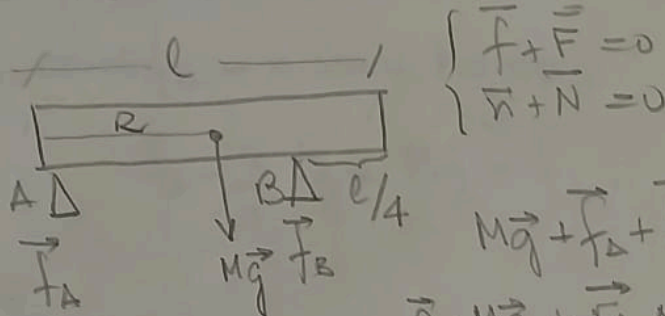
DEBEMOS CONSIDERAR EL PESO $\sum_i m_i \vec{g} = M \vec{g}$

$$\vec{N}_i = \vec{r}_i \wedge m_i \vec{g} = m_i \vec{r}_i \wedge \vec{g}$$

$$\vec{N} = \sum_i \vec{N}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \wedge \vec{g} = M \vec{R} \wedge \vec{g} = \underline{\underline{\vec{R} \wedge M \vec{g}}}$$

TODO EL PESO
CONSIDERABLE EN EL C.MCM $\equiv$ CENTRO DE GRAVEDAD

3

EJ VIGA DE MASA M APOYADA

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{F} = 0 \\ \vec{r} + \vec{N} = 0 \end{cases}$$

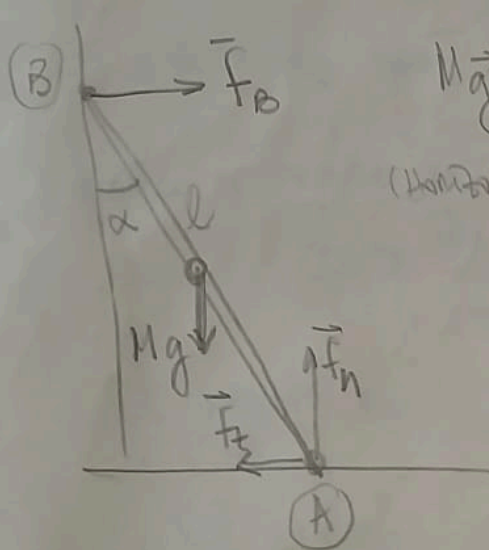
$$\begin{aligned} M\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_B &= 0 \\ \vec{r}_A \wedge M\vec{g} + \vec{r}_B \wedge \vec{F}_B &= 0 \\ (\text{RELECTO DE A}) \end{aligned}$$

Normal

$$\begin{cases} -Mg + f_A + f_B = 0 \\ \frac{1}{2} l Mg - \frac{3}{4} l f_B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\vec{r}| = \frac{1}{2} \\ |\vec{r}_B| = \frac{3}{4} l \end{cases}$$

Solucion $\begin{cases} f_A = \frac{1}{3} Mg \\ f_B = \frac{2}{3} Mg \end{cases}$

EJ : ESCUERA APOYADA EN LA PARED
RODE NULO EN LA PARED

$$M\vec{g} + \vec{f}_t + \vec{f}_n + \vec{F}_B = 0$$

(HORIZONTAL Y VERTICAL)

$$-Mg + f_n = 0 \Rightarrow f_n = Mg$$

$$f_B - f_t = 0 \Rightarrow f_B = f_t$$

x: DISTANCIA DEL CM
AL SUELO (ESCUERA
+USANTE)

4

MOMENTOS RESPECTO DE (A)

$$l \cdot \cos \alpha f_B - x \sin \alpha Mg = 0$$

$$f_B = \frac{x}{l} \tan \alpha Mg = f_t$$

Condición: $\frac{F_t}{F_n} \leq \mu$

$$F_t \leq \mu F_n$$

$$\frac{x}{l} Mg \tan \alpha \leq \mu Mg$$

Condición
Equilibrio $\frac{x}{l} \leq \frac{\mu}{\tan \alpha} = \frac{\tan \alpha_e}{\tan \alpha} \left(\tan \alpha_e = \mu \right)$

- Si $\alpha < \alpha_e \Rightarrow \frac{\tan \alpha_e}{\tan \alpha} > 1$

$\Rightarrow$ CONDICIÓN VALIDA PARA CUALQUIER POSICIÓN EN LA ESCALERA

- Si $\alpha > \alpha_e \Rightarrow \frac{\tan \alpha_e}{\tan \alpha} < 1$

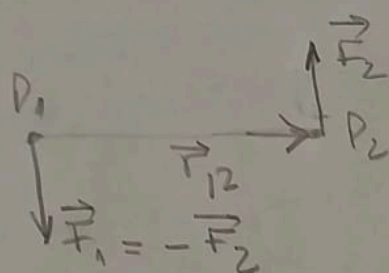
PARA x CERCA DE LA PARED ($x \approx l$)

$$\frac{x}{l} > \frac{\tan \alpha_e}{\tan \alpha} \text{ NO SE CUMPLE}$$

Por encima de $x = \frac{l \tan \alpha_e}{\tan \alpha}$

LA ESCALERA SE DESLIZA Y CAE!

5 PAR DE FUERZAS $\equiv$ CUPLA



FUERZAS IGUALES
Y OPUESTAS
C/ DIFERENTE LECTA
DE ACCION

$$\underline{\underline{\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \underline{\underline{0}}}}$$

PUNTO P_1 : $\vec{N} = \vec{r}_{12} \wedge \vec{F}_2$

PUNTO P_2 : $\vec{N} = \vec{r}_{21} \wedge \vec{F}_1$

$$(\vec{F}_2 = -\vec{F}_1)$$

SIEMPRE EL RESULTADO IGUAL

CUPLA ($\vec{N}$) : $\vec{C} = \vec{r}_{12} \wedge \vec{F}_2 = \vec{r}_{21} \wedge \vec{F}_1$

- * $\perp$ AL PLANO DE LAS FUERZAS
- * NO TIENE PUNTO DE APLICACION
- * SENTIDO : TIRA BUZON (mano derecha)

} SISTEMA DE FUERZAS SOBRE UN CUERPO RIGIDO
 } SIEMPRE REDUCIBLE A UNA $\vec{F}$ RESULTANTE
 } POR UN PUNTO ARBITRARIAMENTE ELEGIDO
 } MAS UNA CUPLA RESULTANTE