Álgebra Lineal: Aplicaciones Físicas - 2025

Práctica 4 - Transformaciones Lineales y Problema de Autovalores.

1. Construir los polinomios característicos de las siguientes matrices y calcular sus autovalores.

$$\textbf{A.}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \quad \textbf{B.}\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \textbf{C.}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{D.}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \textbf{E.}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & i/4 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \quad \textbf{F.}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   ¿Alguna de las matrices tiene autovalores degenerados?

2. Suponiendo que la matrices del ejercicio anterior son representaciones de operadores lineales, determinar conjuntos de autovectores linealmente independientes que sean bases de los espacios vectoriales sobre los que estos operadores actúan. Realizar un cambio de base apropiado para escribir a los operadores del inciso anterior en forma diagonal.

3. Una matriz A representa, en alguna base, a un operador lineal que tiene autovalores $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$. En esta misma base, dos autovectores asociados a dichos autovalores se representan por las siguientes coordenadas, $(1 \quad 2)^T$ y $(2 \quad 3)^T$, respectivamente. Escribir la forma de la matriz A en términos de:

   a) la base compuesta por estos autovectores
   b) la base $(1 \quad 0)^T$ y $(0 \quad 1)^T$
   c) la base $(1 \quad 1)^T$ y $(3 \quad 4)^T$

4. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el operador definido por $F(x, y, z) = (x, 2x + z, -z)$.

   a) Hallar la matriz asociada a F en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
   b) Escribir el polinomio característico.
   c) Determinar los autovalores de F y sus correspondientes autovectores, indicando una base para cada autoespacio.

5. Sea $D : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ el operador definido por $D(p(t)) = \frac{d(t\ p(t))}{dt}$.

   a) Hallar la matriz asociada a D en la base canónica $\{1, t, t^2\}$.
   b) Determinar los autovalores de D y sus correspondientes autovectores, indicando una base para cada autoespacio.

6. Probar que dos matrices diagonalizables, A y B de $n \times n$ comparten el mismo conjunto de autovalores si y sólo si son *similares*, es decir, $\exists S$ no singular tal que $B = S^{-1}AS$.

7. Sea $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ una trasformación lineal, representada por una matriz A de $n \times n$.

   a) Probar que el polinomio característico de A es independiente de la base elegida para representar a F
   b) Demostrar que el coeficiente de la potencia $(n-1)$-ésimo del polinomio característico de una matriz A está dado por $(-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)$ y que $\mathrm{Tr}(A) = \sum_i \lambda_i$ donde los λ_i son los autovalores de A.

8. Dos matrices A y B de $n \times n$ se dicen simultáneamente diagonalizables si existe una matris S no singular tal que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ son matrices diagonales.

   a) Mostrar que dos matrices simultánemente diagonalizables conmutan: $[A, B] = AB - BA = 0$.

   b) Probar que el inverso también es válido si una de las matrices tiene todos sus autovalores no degenerados.

   c) Suponga que v es un autovector asociado a un autovalor de A, digamos λ, que es m veces degenerado, observar que sólo se puede afirmar que Bv pertenece al subespacio propio correspondiente a λ. Se prueba entonces que cualquier subespacio propio de A es invariante bajo la acciöon de B

9. *a*) Sean $\lambda_1, ..., \lambda_n$ los autovalores del operador $F : K^n \to K^n$, y $v_1, ..., v_n$ los correspondientes autovectores. Hallar los valores y vectores propios del operador F^2.

   b) Si F es un operador no singular, mostrar que los valores propios de F^{-1} son los recíprocos de los valores propios de F, ¿cómo se relacionan los autovectores de F y los de F^{-1}?

10. Para A, matriz diagonalizable calcule las siguientes exponenciales,

    a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, e^{At} con t un parámetro real.

    b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, e^{At} con t un parámetro real.

11. El ascensor de un edificio con bajo y dos pisos realiza viajes de uno a otro piso. Se sabe que la mitad de los viajes que parten del bajo se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25 % de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en el bajo. ¿Cuál es la probabilidad de que, a largo plazo, el ascensor se encuentre en cada uno de los tres pisos?

12. Leonardo Pisano (también llamado Fibonacci), es famoso por haber introducido el cero en Europa, cuando trabajaba en la corte de Federico II, y por haber aplicado la sucesión que lleva su nombre, estudiando el modo de reproducción de los conejos. Suponiendo que en la situación inicial se tiene una pareja de conejos en un corral y sabiendo que, a partir del segundo mes, cada mes se genera una nueva pareja, la cual se reproduce del mismo modo a partir de su segundo mes de vida, se tiene, para el número de parejas en un dado mes, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ con $n \geq 1$.

    a) Hallar el número a_n de parejas en los meses 1 a 12 a partir de $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

    b) Definiendo el vector $(a_n \quad a_{n-1})^T$, es posible escribir la relación de recurrencia en forma matricial y resolverla para n arbitrario. Calcular, en particular, el número de parejas en el mes 100.

13. A velocidades suficientemente pequeñas, las fuerza de resistencia que sufre un cuerpo al moverse a través de un fluido resulta proporcional a su velocidad v. La determinación del coeficiente de proporcionalidad exige cálculos complejos. En el caso particular de una esfera, la fuerza de resistencia puede expresarse como:

    $$F = 6\pi\eta r v \qquad \text{(Ley de } \textit{Stokes)}$$

    donde r representa el radio de la esfera y η a la viscosidad de fluido. Considere la posibilidad de que dicha esfera (de masa m) se encuentre sobre el fondo de un recipiente, y que su movimiento se encuentre limitado por un resorte de constante elástica k (ver figura).

    a) Escriba la ecuación de movimiento de la esfera en el caso de que éste se desplace unidimensionalmente a lo largo de la dirección de estiramiento del resorte, en términos de su desplazamiento $x(t)$ desde la posición de equilibro, su velocidad $v(t)$ y su aceleración $a(t)$.

    b) Considere el caso particular en que los parámetros de la ecuación de movimiento satisfacen las siguientes condiciones:

    $$5m = 6\pi\eta r \qquad\qquad 4k = 9m$$

Utilice las siguientes relaciones:

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad\qquad v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

para llevar la ecuación de movimiento de las esfera a un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, con derivadas de primer orden únicamente.

c) Construya un matriz columna X, cuyos elementos de matriz correspondan a las incógnitas del sistema de ecuaciones. Escriba a este último en forma matricial:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX \tag{1}$$

donde $\mathrm{d}X/\mathrm{d}t$ respresenta a la derivada de X componente a componente.

d) Demostrar que $X(t) = \exp(At)X_0$, con X_0 un vector columna constante, es solución de la ecucación matricial (1).

e) A partir de la diagonalización de la matriz A, calcule $\exp(At)$. Encuentre la solución general del sistema. ¿Qúe represeta X_0 en este caso?