Álgebra Lineal: Aplicaciones Físicas - 2025

Práctica 5 - Formas de Jordan y Teorema de Caley Hamilton.

1. Las siguientes matrices son representaciones de algún operador lineal $\mathcal{A} : V \to V$, con V un espacio vectorial definido sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Determinar cuáles son diagonalizables. Justificar en cada caso.

$$\textbf{A.} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{B.} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{C.} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

2. Determinar el polinomio característico $p(x)$ de la siguiente matriz. Buscar todos los divisores de $p(x)$. ¿Cuál es su polinomio mínimo?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Considerar la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   a) Verificar que se cumple el teorema de Cayley - Hamilton.

   b) Utilizar dicho teorema para calcular A^2, A^3 y A^{-1}.

4. Sea $\mathcal{A} : V \to V$, $\mathcal{A}$ transformación lineal. Mostrar que si $V = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$, con $\mathcal{A}(W_i) \subseteq W_i$, existe una base B para la que la representación $A = [\mathcal{A}]_B$ es diagonal por bloques.

5. La siguiente matriz representa a algún operador lineal $\mathcal{A} : V \to V$, con V espacio vectorial de dimensión 4.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   a) Calcule sus autovalores.

   b) $\mathcal{E}_j(\lambda) = \{\mathbf{v} \in V \ / \ [\mathcal{A} - \lambda I]^j(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$ es el autoespacio generalizado de rango j asociado a λ. Mostrar para cada uno de los autovalores de A que $\mathcal{E}_1(\lambda) \subseteq \mathcal{E}_2(\lambda) = \mathcal{E}_3(\lambda)$, es decir, $\mathcal{E}_2(\lambda)$ es el autoespacio generalizado asociado a λ de mayor dimensión.

   c) Mostrar que $\mathcal{E}_2(\lambda_1)$ y $\mathcal{E}_2(\lambda_2)$ son subespacios invariantes frente a la acción de $\mathcal{A}$.

   d) Mostrar que la dimensión de los autoespacios generalizados asociados a cada autovalor es igual a su multiplicidad.

   e) Determinar $\mathcal{E}_2(\lambda_1) \cap \mathcal{E}_2(\lambda_2)$.

   f) A partir de los resultados anteriores constuir una base en la que la representación de $\mathcal{A}$ sea diagonal por bloques.

6. *a)* Si el polinomio característico de un operador lineal es $\Delta(t) = (t-2)^4(t-3)^3$ y su polinomio mínimo es $m(t) = (t-2)^2(t-3)^2$, ¿cuáles son las posibles formas de Jordan de su matriz asociada?

   b) El polinomio mínimo de una matriz de 5×5 es $m(t) = (t-2)^2$. Escribir todas las posibles formas de Jordan de su matriz asociada.

7. Obtener la forma de Jordan de las matrices:

$$\textbf{A.}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{B.}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{C.}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Dada una matriz A cuadrada diagonalizable, probar que:

   a) $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}A)$.

   b) $\det(\exp(A)) \neq 0$.

   c) $[\exp(A)]^{-1} = \exp(-A)$

   A partir del Teorema de Jordan, generalizar estos resultados.

9. Resolver las siguientes ecuaciones lineales en diferencias

   a) $f(n) = 2f(n-1) - f(n-2)$, con $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

   b) $f(n) = 7f(n-1) - 16f(n-2) + 12f(n-3)$, con $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 3$.

10. Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 8x(t) + 9y(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -4x(t) - 4y(t)$$

Lamentablemente la matriz A asociada a este sistema de ecuaciones no es diagonalizable. Compruébelo. En este caso, calcular $X(t) = \exp(At)X_0$ no parece una tarea tan sencilla. Llévela a A a su forma canónica de Jordan para encontrar la solución general de este sistema de ecuaciones.