Álgebra Lineal: Aplicaciones Físicas - 2025

Práctica 6 - Formas Bilineales y Formas Cuadráticas.

1. Determinar cuales de las siguientes funciones de la forma $T : V \to K$ (con V espacio vectorial y K el respectivo cuerpo) son formas lineales

   a)
   $$\begin{aligned} \mathrm{tr}: \quad & \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} \\ & A \to \mathrm{tr}(A) \end{aligned}$$

   b) El espacio de las funciones continuas en el intervalo (a,b) denotado $C[a,b]$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$
   $$\begin{aligned} \int_a^b : \quad & C[a,b] \to \mathbb{R} \\ & f \longrightarrow \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

   c)
   $$\begin{aligned} P_w : \quad & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & v \longrightarrow v \cdot w \end{aligned}$$

2. Demuestre que en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, toda forma líneal f puede ser escrita como P_w en el ejercicio (1)(es decir como el producto escalar por un vector fijo w).

3. Considerar las siguientes funciones definidas para los vectores $\mathbf{x} = (a_1, a_2)$; $\mathbf{y} = (b_1, b_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

   a) $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$
   b) $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (a_1 - b_1)^2 - a_2 b_2$
   c) $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (a_1 + b_1)^2 - (a_1 - b_1)^2$
   d) $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a_1 b_2 - a_2 b_1$

   Determinar cuáles de estas funciones son formas bilineales de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Para aquellas que lo sean, determinar la matriz que las representa en la base canónica del espacio y escribirlas en notación matricial. Indicar, además, si tales formas bilineales son simétricas.

4. Verificar si las siguientes aplicaciones $A : P_n(\mathbb{R}) \times P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ son formas bilineales:

   a) $A(p, q) = p(1) + q(1)$.
   b) $A(p, q) = p(1)\ q'(1)$.
   c) $A(p, q) = \int_0^1 \mathrm{d}t\ p(t)\ q(t)$

   Determinar la matriz que la representa en la base canónica.

5. Sea V el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ generado por $\{\sin(x), \cos(x)\}$. Encontrar la matriz que representa a la forma bilineal $A(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t f(t) g(t)$ en la base dada.

6. Mostrar que $f(A, B) = n\mathrm{Tr}AB - \mathrm{Tr}A\,\mathrm{Tr}B$ define una forma bilineal en $\mathbb{C}^{n\times n}$. ¿Es simétrica? ¿Es singular? (Sugerencia: aplicarla a la matriz identidad y a otra matriz arbitraria). Mostrar que, en cambio, es no singular si se la restringe al subespacio de matrices de traza nula.

7. Las matrices A y B sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ son congruentes si $B = P^{\mathrm{T}}AP$ para alguna matrices invertible P sobre $\mathbb{K}$. ¿Cuáles de las siguientes matrices simétricas son congruentes con la matriz identidad sobre $\mathbb{R}$? ¿Y sobre $\mathbb{C}$?

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Considere la forma bilineal $A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A((x,y);(u,v)) = 2xu - 3xv + yv$.

   a) Encuentre su matriz asociada en la base $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$.

   b) Encuentre su matriz asociada en la base $\mathcal{B}' = \{(2,1),(1,-1)\}$.

   c) Encuentre la matriz de cambio de base P con conecta $\mathcal{B}'$ con $\mathcal{B}$, y verifique que $A_{\mathcal{B}'} = P^{\mathrm{T}}A_{\mathcal{B}}P$.

   d) Escribir a A como suma de una parte simétrica y una antisemétrica. Encontrar las matrices asociadas con cada una de estas partes en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

9. *a*) Mostrar que la función $\psi(A,B) = \mathrm{Tr}(AB^{\mathrm{T}})$ es una forma bilineal simétrica definida positiva sobre $Mat_n(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de todas las mastrices reales de $n \times n$.

   b) Mostrar que el mapeo $A \to \mathrm{Tr}(A^2)$ es una forma cuadrática sobre $Mat_n(\mathbb{R})$. Determinar su rango y su signatura.

10. Las siguientes expresiones definen formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$. Encontrar las correspondientes formas bilineales simétricas:

    a) x^2

    b) xy

    c) $2x^2 - \frac{1}{3}xy$

    d) $4x^2 + 6xy - 3y^2$

    para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Encontrar en cada caso la matriz asociada en la base $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$. ¿Cuáles de ellas son no singulares?

11. Dadas las formas cuadráticas:

    a) x_1x_2 en $\mathbb{R}^2$

    b) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$ en $\mathbb{R}^3$

    llevarlas a su forma canónica completando cuadrados.