Álgebra Lineal: Aplicaciones Físicas - 2025

Práctica 7 - Espacios Euclídeos.

1. ¿Cuáles de las siguientes expresiones pueden ser consideradas como un producto interno $\langle v, w\rangle$ con $v, w \in \mathbb{R}^2$?

   a) $\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2)\rangle = 2v_1w_1 + 3v_2w_2$

   b) $\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2)\rangle = (v_1 + v_2)(w_1 + w_2)$

   c) $\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2)\rangle = 4v_1w_1 - 2v_1w_2 - 2v_2w_1 + 4v_2w_2$

2. *a*) ¿Cuáles de las siguientes expresiones pueden ser consideradas como un producto interno $\langle f, g\rangle$ con $f, g \in \mathcal{C}^0[-1, 1]$, el espacio de funciones contínuas en el intervalo $[-1, 1]$?

      1) $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, f(x)g(x)e^{-x}$

      2) $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, f(x)g(x)x$

      3) $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, f(x)g(x)(x + 2)$

   b) Probar que

   $$\langle f, g\rangle = \int_0^1 \mathrm{d}x\, f(x)g(x)$$

   no define un producto sobre el espacio $\mathcal{C}^0[-1, 1]$. Explicar por qué ésto no contradice el hecho de que sí defina un producto interno sobre $\mathcal{C}^0[0, 1]$.

3. Sea V un espacio vectorial dotado de producto interno,

   a) Probar que si $\langle \bar{v}, \bar{w}\rangle = 0$ para todo $\bar{w} \in V$, entonces $\bar{v} = \bar{0}$

   b) Probar que si $\langle \bar{v}, \bar{w}\rangle = \langle \bar{x}, \bar{w}\rangle$ para todo $\bar{w} \in V$, entonces $\bar{v} = \bar{x}$

4. Mostrar que $\langle \bar{v}, \bar{w}\rangle$ define un producto interno sobre $\mathbb{R}^n$, si y sólo si $\langle \bar{v}, \bar{w}\rangle = [\bar{v}]_B^{\mathrm{T}} A[\bar{w}]_B$, con $B \subset \mathbb{R}^n$ base, $[\bar{w}]_B$ la representación matricial de $\bar{w}$ en dicha base y A una matriz de $n \times n$ simétrica definida positiva.

5. Determinar cuáles de las siguientes matrices son definidas positivas:

   $$\text{A. } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{B. } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{C. } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Probar que toda matriz simétrica definida positiva puede ser escrita como una matriz de Gram.

7. ¿Cuáles de las siguentes expresiones una norma sobre $\mathbb{R}^3$?

   a) $||\bar{v}|| = \sqrt{2v_1^2 + v_2^2 + 3v_3^2}$

   b) $||\bar{v}|| = \sqrt{v_1^2 + 2v_1v_2 + v_2^2 + v_3^2}$

   c) $||\bar{v}|| = |v_1 - v_2| + |v_2 - v_3| + |v_3 - v_1|$

8. Sea $w(x) > 0$ para todo $a \leq x \leq b$ una función peso:

   a) Probar que

   $$||f||_{1,w} = \int_a^b \mathrm{d}x\, |f(x)|w(x)$$

   define una norma sobre $\mathcal{C}^0[a, b]$, llamada norma pesada de L^1.

   b) Hacer lo mismo para la norma pesada L^∞: $||f||_{\infty,w} = \mathrm{Max}\{|f(x)|w(x)/x \in [a, b]\}$.

9. Buscar un vector unitario en la misma dirección del vector $\bar{v} = (1, 2, -3) \in \mathbb{R}^3$ para:

   a) La norma Euclidea $||\bar{v}||^2 = \sum_{i=1}^{2} v_i^2$.

   b) $||\bar{v}||^2 = 2v_1^2 + v_2^2 + \frac{1}{3}v_3^2$.

10. Buscar un vector unitario en el espacio de funciones $\mathcal{C}^0[0, 1]$ que sea un múltiplo constante de $f(x) = x - \frac{1}{3}$ con respecto a la norma L^2 definida por $||g(x)||_2 = \sqrt{\int_0^1 \mathrm{d}x\, |g(x)|^2}$ para toda $g \in \mathcal{C}^0[0, 1]$.

11. a) Probar la identidad

$$\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = \frac{1}{4}(||\bar{v} + \bar{w}||^2 - ||\bar{v} - \bar{w}||^2)$$

   que permite reconstruir el producto interno a partir de la norma.

   b) Probar que el ángulo θ entre los vectores $\bar{v}$ y $\bar{w}$ puede determinarse a través de la fórmula

$$\cos(\theta) = \frac{||\bar{v} + \bar{w}||^2 - ||\bar{v} - \bar{w}||^2}{4||\bar{v}||\,||\bar{w}||}$$

   Justificar por qué el cociente a la derecha de la igualdad puede asociarse al coseno de un ángulo.

12. Probar que dos vectores paralelos $\bar{v}$ y $\bar{w}$ tiene la misma norma si y sólo si $\bar{v} = \pm\bar{w}$.

13. Considere el producto interno $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 2v_1w_1 + 3v_2w_2 + v_3w_3$, para $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$. Encontrar a tal que:

   a) los vectores $(2, a, -3)$ y $(-1, 3, -2)$ sean ortogonales

   b) los vectores $(2, a, 4)$ y $(-1, 3, -2)$ sean paralelos

14. Buscar dos funciones no nulas tales que sean ortogonales respecto del producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \mathrm{d}x\, f(x)g(x)x$$

15. Buscar la proyección ortogonal del vector $\bar{v} = (1, 1, 1)$ sobre los siguientes subespacios, utilizando las bases ortogonales indicadas:

   a) S subespacio generado por $\{(2, -1, 3)\}$

   b) S subespacio generado por $\{(1, 1, 0), (-2, 2, 1)\}$

   Determinar, en cada caso, es el complemento ortogonal de S.

16. Buscar la proyección ortogonal de un vector $\bar{v} = (1, 3, -1)$ sobre el plano genrado por los vectores $\bar{u}_1 = (-1, 2, 1)$ y $\bar{u}_2 = (2, 1, -3)$ usando el procedimiento de Gram-Schmidt para construir la base ortogonal.

17. Sea $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ una base ortonormal de un subespacio $W \subset \mathbb{R}^n$. Sea $A = (u_1\, u_2 \dots u_k)$ una matriz de $n \times k$ construida con los vectores u_i, $i = 1, ..., k$, que define a $P = AA^{\mathrm{T}}M$, con M la matriz de $n \times n$ definida positiva que define al producto interno en $\mathbb{R}^n$.

   a) Probar que para todo $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, su proyección ortogonal $\bar{w} \in W$ viene dada por $\bar{w} = P\bar{v}$

   b) Probar que $P^2 = P$. Buscar una interpretación geométrica de esta propiedad de P.

   c) El rango de P es k.