Álgebra Lineal: Aplicaciones Físicas - 2025

Práctica 8 - Espacios Unitarios.

1. Determinar cuáles de las siguientes fórmulas definen un producto interno hermítico sobre el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$.

   a) $\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = v_1 w_1 + 2 v_2 w_2$

   b) $\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = v_1 w_1^* + v_2 w_2^*$

   c) $\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = 2 v_1 w_1^* + (1+i) v_1 w_2^* + (1-i) v_2 w_1^* + 3 v_2 w_2^*$

2. Probar la desigualdad de Cauchy-Schwartz y la desigualdad triangular en el caso de un producto interno hermítico.

   ¿Que condición deben cumplir dos vectores para ser paralelos u ortogonales en un espacio vectorial complejo?

3. En $\mathbb{C}^{n\times n}$, $\langle A, B \rangle = Tr(A^\dagger B) = Tr(BA^\dagger)$. Verificar que las matrices de Pauli son ortogonales con este producto. ¿Son ortonormales?

4. Formular las condiciones necesarias para que la función peso $w(x)$ garantice que la integral

   $$\langle f, g \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \, w(x) \; f(x)^* \; g(x)$$

   define un producto interno sobre el espacio de las funciones complejas y continuas en $[a, b]$.

5. *a)* Encontrar una base ortogonal y una ortonormal (con el producto interno usual en $\mathbb{C}^3$) para el subespacio S generado por $(1, i, 1)$ y $(1+i, 0, 2)$.

   b) Determinar el complemento ortogonal de S, $S^\perp$.

   c) Encontrar las proyecciones de $(1, 1, 1)$ sobre S y $S^\perp$

6. Considerar el espacio vectorial $\mathbb{C}[-\pi, \pi]$ de las funciones complejas continuas en el intervalo $[-\pi, \pi]$, con producto interno definido por $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t \, f^*(t) g(t)$.

   a) Verificar que (f, g) es un producto interno.

   b) Calcular $(1 + e^{it}, e^{it})$ y verificar la desigualdad de Schwartz.

   c) Mostrar que las funciones e^{ikt}, con k entero, son ortogonales con el producto interno anterior. ¿Son también ortonormales?

7. *a)* Determinar el valor de α para que, en la base canónica de $\mathbb{C}^{2\times 2}$, la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & i \\ \alpha & -2 \end{pmatrix}$ represente:

   1) un operador normal;

   2) un operador autoadjunto.

   b) Hallar, en cada caso, los autovalores de A y la base ortonormal de $\mathbb{C}^2$ en la que A es diagonal.

8. Una matriz se dice positiva si la forma “bilineal” hermíticamente simétrica que representa es definida positiva. Mostrar que, en $\mathbb{C}^2$, con el producto escalar unitario usual,

   a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ lo es;

   b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no lo es.

9. Matrices unitarias como exponenciales de matrices hermíticas:

   a) Muestre que si H es una matriz hermítica, $U = \exp(i\ tH)$ es una matriz unitaria para todo valor real de t.

   b) Demuestre que si $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz unitaria, existe una familia de matrices hermíticas H_k que satisfacen $U = \exp(i\ tH_k)$. ¿Cómo se relacionan las Hk entre sí?

   c) Opcional: Muestre que para $A, H \in C^{n\times n}$, con H una matriz hermítica, $\exp(i\ H)$ A $exp(-i\ H) = A + i[H, A] - \frac{1}{2}[H, [H, A]] + \cdots = \exp(i[H, \cdot])A$. (Observe que $[H, \cdot]A = H.A - A.H$ es un operador lineal sobre $\mathbb{C}^{n\times n}$)