Temas Avanzados de Teoría Cuántica de Campos - 2020 **GA Silva**
Departamento de Física - UNLP silva@fisica.unlp.edu.ar
v3 2020/09/24

Parte I : Geometría diferencial

1. Torsión: a partir de su ley de transformación, mostrar que la parte antisimétrica de los símbolos de Christoffell transforma como un tensor

$$\text{Tensor de Torsión :} \qquad T^{\alpha}_{\mu\nu} \equiv \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} \tag{1}$$

2. p-formas. Derivadas de tensores sin símbolos de Christoffell:
(i) Mostrar que si A_μ es un co-vector, $\partial_\mu A_\nu$ no es un tensor $\binom{0}{2}$.
(ii) Mostrar que su parte antisimétrica, $F_{\mu\nu} \equiv 2\partial_{[\mu}A_{\nu]} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, si lo es.
(iii) Mostrar que la derivada exterior $\boldsymbol{d}$ genera tensores. Considerar $\omega_{\mu\nu}$ una 2-forma, $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. Mostrar que $d\omega_{\mu\nu\rho} = \partial_{[\mu}\omega_{\nu\rho]}$, donde [...] significa antisimetrizar los índices, transforma como un tensor frente a un cambio de coordenadas.
(iv) Mostrar que para toda conexión simétrica resulta

$$\partial_{[\mu}\omega_{\nu\rho]} = \nabla_{[\mu}\omega_{\nu\rho]}$$

3. Contracciones son covariantes: Sea $X^{\mu}{}_{\nu\rho}$ es un tensor $\binom{1}{2}$, mostrar que $Y_\rho \equiv X^{\mu}{}_{\mu\rho}$ es un tensor $\binom{0}{1}$. La contracción es un mapeo de tensores $\mathfrak{C} : \mathcal{T}^p_q \to \mathcal{T}^{p-1}_{q-1}$ definido por

$$\mathfrak{C} : \quad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}_1, \dots \boldsymbol{\omega}_p; \boldsymbol{U}_1, \dots \boldsymbol{U}_q) \to \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}_1, .., \boldsymbol{e}^a, .. \boldsymbol{\omega}_p; \boldsymbol{U}_1, .., \boldsymbol{E}_a, .. \boldsymbol{U}_q)$$

donde $\{\boldsymbol{E}_a\}, \{\boldsymbol{e}^b\}$ son bases duales de $T_p\mathcal{M}$ y $T^*_p\mathcal{M}$, esto es $\langle \boldsymbol{e}^a, \boldsymbol{E}_b \rangle = \delta^a_b$

4. Composición de vectores y corchete de Lie:
(i) Dados $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, mostrar que $(\boldsymbol{V} \circ \boldsymbol{W})(f) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{W}(f))$ no satisface Leibniz.
(ii) Mostrar que el corchete de Lie

$$[\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}](f) \equiv \boldsymbol{V}(\boldsymbol{W}(f)) - \boldsymbol{W}(\boldsymbol{V}(f))$$

satisface Leibniz y es lineal en f, luego define un vector.
(iii) Mostrar que en base de coordenadas $\{\boldsymbol{\partial}_\mu\}$ las componentes del corchete de Lie son

$$[\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}]^\mu = V^\nu \partial_\nu W^\mu - W^\nu \partial_\nu V^\mu \tag{2}$$

Mostrar a partir de esta expresión que frente a un cambio de coordenadas $x \to \tilde{x}(x)$ el lado derecho transforma como un vector, esto es

$$[\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}]^\mu \to \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} [\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}]^\alpha$$

(iv) Sean $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ campos vectoriales suaves en $\mathcal{M}$, verificar que el corchete de Lie satisface Jacobi

$$[[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}], \boldsymbol{Z}] + [[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}], \boldsymbol{X}] + [[\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}], \boldsymbol{Y}] = 0 \tag{3}$$

5. Derivada de Lie: compara tensores a lo largo de una congruencia de curvas definidas a partir de un campo vectorial $\boldsymbol{K}$ sobre la variedad. $\mathcal{L}_{\boldsymbol{K}}$ no cambia el carácter del tensor.

. Derivada de Lie de un escalar f en la dirección de $\boldsymbol{K}$: $\quad \mathcal{L}_{\boldsymbol{K}} f = \boldsymbol{K}(f)$
. Derivada de Lie del vector $\boldsymbol{V}$ en la dirección de $\boldsymbol{K}$: $\quad \mathcal{L}_{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{V} = [\boldsymbol{K}, \boldsymbol{V}] \qquad (\dagger)$

a) Sea $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ y $\boldsymbol{V} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ mostrar

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{K}}(f\boldsymbol{V}) = (\mathcal{L}_{\boldsymbol{K}} f) \cdot \boldsymbol{V} + f \cdot (\mathcal{L}_{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{V})$$

b) Dados $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ y $\boldsymbol{Z}$ campos vectoriales y f una función probar

$$[\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}, \mathcal{L}_{\boldsymbol{Y}}]\, f = \mathcal{L}_{[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]} f\,, \qquad [\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}, \mathcal{L}_{\boldsymbol{Y}}]\, \boldsymbol{Z} = \mathcal{L}_{[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]} \boldsymbol{Z}\,. \tag{4}$$

c) Usando la identidad de Jacobi (3), verificar que

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}] = [\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}] + [\boldsymbol{Y}, \mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Z}]$$

d) La derivada de Lie satisface Leibniz al actuar sobre productos tensoriales

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{V}) = (\mathcal{L}_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{\omega}) \otimes \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega} \otimes (\mathcal{L}_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{V})\,. \tag{5}$$

Contrayendo esta relación y usando (†) mostrar que base coordenada $\{\boldsymbol{\partial}_\mu\}$ resulta

$$(\mathcal{L}_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{\alpha})_\mu = K^\nu \partial_\nu \alpha_\mu + \alpha_\nu \partial_\mu K^\nu$$

e) Generalizando el procedimiento anterior hallar la expresión para la derivada de Lie de un tensor arbitrario $\binom{r}{s}$ obteniendo

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{T})^{\mu_1\ldots\mu_r}{}_{\nu_1\ldots\nu_s} = {} & U^\rho \partial_\rho T^{\mu_1\ldots\mu_r}{}_{\nu_1\ldots\nu_s} - T^{\rho\mu_2\ldots\mu_r}{}_{\nu_1\ldots\nu_s}\partial_\rho U^{\mu_1} - T^{\mu_1\rho\ldots\mu_r}{}_{\nu_1\ldots\nu_s}\partial_\rho U^{\mu_2} - \ldots \\ & + T^{\mu_1\ldots\mu_r}{}_{\rho\ldots\nu_s}\partial_{\nu_1}U^\rho + T^{\mu_1\ldots\mu_r}{}_{\nu_1\rho\nu_3\ldots\nu_s}\partial_{\nu_2}U^\rho + \ldots\end{aligned} \tag{6}$$

f) Usando (5) para un tensor arbitrario $\boldsymbol{T}$ mostrar que

$$[\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}, \mathcal{L}_{\boldsymbol{Y}}]\, \boldsymbol{T} = \mathcal{L}_{[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]}\boldsymbol{T}$$

g) Mostrar que las derivadas parciales en (6) se pueden reemplazar por derivadas covariantes si la conexión no tiene torsión (es simétrica).

6. Derivada de Lie y Derivadas covariantes: con el objeto de hacer evidente que la derivada de Lie transforma tensores en tensores, a pesar de contener sólo derivadas ordinarias, mostrar que podemos reescribirla en términos de la derivada covariante como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi \phi &= \xi^\lambda \nabla_\lambda \phi \\ \mathcal{L}_\xi V^\mu &= \xi^\lambda \nabla_\lambda V^\mu - V^\lambda \nabla_\lambda \xi^\mu - T^\mu_{\lambda\nu}\xi^\lambda V^\nu \\ \mathcal{L}_\xi \omega_\mu &= \xi^\lambda \nabla_\lambda \omega_\mu + \omega_\lambda \nabla_\mu \xi^\lambda + T^\rho_{\lambda\mu}\xi^\lambda \omega_\rho\end{aligned}$$

donde $T^\rho_{\lambda\mu}$ es el tensor de torsión definido en (1).

7. Derivada de Lie, métrica y conexión de Levi-Civita: mostrar que la derivada de Lie de la métrica $\boldsymbol{g}$, en ausencia de torsión, en la dirección del vector $\boldsymbol{\xi}$ en base coordenada puede ser reexpresada como

$$(\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{g})_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu \qquad \text{definiendo} \qquad \xi_\mu \equiv g_{\mu\nu}\xi^\nu$$

donde ∇ es la conexión de Levi-Civita.

8. Mapa exponencial, flujos: las curvas integrales $x^\mu_{\boldsymbol{K}}(t, x_0)$ generadas por el campo vectorial $\boldsymbol{K} = K^\mu(x)\partial_\mu$ se obtienen de

$$\frac{dx^\mu_{\boldsymbol{K}}}{dt} = K^\mu(x_{\boldsymbol{K}}(t))$$

con condición inicial $x^\mu_{\boldsymbol{K}}(0, x_0) = x^\mu_0$.

(i) Mostrar que satisfacen[1]

$$x^\mu_{\boldsymbol{K}}(t, x_{\boldsymbol{K}}(s, x_0)) = x^\mu_{\boldsymbol{K}}(t + s, x_0)$$

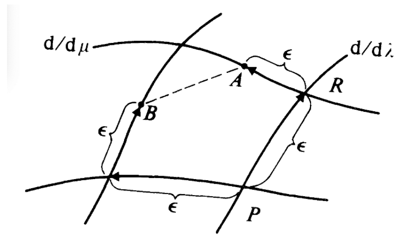
(ii) Para t fijo y $\forall x_0$ podemos interpretar la congruencia de curvas como un difeomorfismo $\psi_t : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$. Verificar que las propiedades (renombrando $x_0 \to x$)

1. $\psi_t(\psi_s(x)) = \psi_{t+s}$, esto es, $\psi_t \circ \psi_s = \psi_{t+s}$
2. $\psi_0 =$ mapa identidad
3. $\psi_{-t} = (\psi_t)^{-1}$

convierten a ψ_t en un grupo conmutativo y justifican la notación $x^\mu_{\boldsymbol{K}}(t, x) = e^{t\boldsymbol{K}}x^\mu$.

[1] Ayuda: este hecho resulta de mostrar que ambos lados satisfacen la misma ec diferencial con la misma C.I. y del hecho de que la solución de EDO's es única.

9. Interpretación geométrica del corchete de Lie: considerar dos flujos $x^\alpha_{\boldsymbol{V}}(t,x)$ y $x^\alpha_{\boldsymbol{W}}(t,x)$ generados por vectores $\frac{d}{d\lambda} = \boldsymbol{V}$ y $\frac{d}{d\mu} = \boldsymbol{W}$. Partiendo del punto P de la figura evaluar a primer orden la composición de los flujos en distinto orden: $x^\alpha_{\boldsymbol{V}}(\epsilon, x^\alpha_{\boldsymbol{W}}(\epsilon, P))$ que nos lleva a B y $x^\alpha_{\boldsymbol{W}}(\epsilon, x^\alpha_{\boldsymbol{V}}(\epsilon, P))$ que nos lleva a A. Mostrar que la diferencia entre las coordenadas de los puntos finales es proporcional al corchete de Lie $[\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}]$.



$$\boxed{\text{El corchete de Lie es una medida de la no clausura del paralelogramo generado por } \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}.}$$

10. Vectores de Killing y geodésicas en el espacio hiperbólico: considerar la metrica del espacio hiperbólico $\mathbb{H}^3$ en coordenadas de Beltrami[2]

$$ds^2 = \frac{d\mathbf{r^2}}{1-r^2} + \frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{dr})^2}{(1-r^2)^2} \tag{7}$$

(i) Mostrar que el Hamiltoniano que describe las geodésicas toma la forma

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}^2 - \mathbf{L}^2)$$

donde

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} - \mathbf{r}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}), \qquad \mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$$

(ii) Hallar los corchetes de Poisson

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk}L_k, \quad \{M_i, M_j\} = -\epsilon_{ijk}L_k, \quad \{L_i, M_j\} = \epsilon_{ijk}M_k$$

y mostrar que $\mathbf{L}$ y $\mathbf{M}$ son constantes de movimiento. Chequear que el álgebra de Poisson de $L_{ij} = \epsilon_{ijk}L_k$ y $L_{0i} = M_i$ es la de $\mathfrak{so}(3,1)$. En la misma línea mostrar que H y $\mathbf{M}\cdot\mathbf{L}$ son los Casimires cuadráticos.

(iii) Identificar los vectores de Killing de (7) y evaluar sus corchetes de Lie.

11. Modelo σ no lineal - 1d WZNW:

(a) Explicar por qué para un grupo compacto G

$$ds^2 = -\mathsf{Tr}(g^{-1}dg\, g^{-1}dg)$$

es una métrica Riemmaniana y establecer sus simetrías.

(b) Escribir el lagrangiano para una partícula libre sobre G con esta métrica, hallar las ecuaciones de movimiento y mostrar que la solución general es

$$g(t) = g_0 \exp(t\boldsymbol{X}_0)$$

donde $g_0 \in G$ y $\boldsymbol{X}_0 \in \mathfrak{g}$. Cómo cambian $g_0 \in G$ y $\boldsymbol{X}_0 \in \mathfrak{g}$ bajo la acción derecha e izquierda de G.

(c) Mostrar que para $G = SU(2)$ y para todo $\boldsymbol{X}_0 \in \mathfrak{g}$ no nulo la solución es siempre periódica.

(d) Es la solución periódica para $G = SU(3)$? lo es siempre? Ilustrar la respuesta con ejemplos.

[2] Las coordenadas de Beltrami para S^n se obtienen de embeber $(x^1)^2 + .. + (x^{n+1})^2 = R^2$ en $ds^2 = (dx^1)^2 + ... + (dx^{n+1})^2$ eliminando x^{n+1} de manera que

$$ds^2 = (dx^1)^2 + ... + (dx^n)^2 + \frac{(x^1dx^1 + ... + x^n dx^n)^2}{R^2 - r^2}$$

(e) Considerar ahora la acción para $g(\boldsymbol{x})$ e introducir un campo de gauge $A_\mu(\boldsymbol{x})$ de manera que resulte invariante frente a transformaciones locales $g(\boldsymbol{x}) \to U(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})U^{-1}(\boldsymbol{x})$. Explicitamente, introducir la derivada covariante

$$D_\mu g = \partial_\mu g + \alpha A_\mu g + \beta g A_\mu$$

determinar la ley de transformación para A_μ ajustando α, β de manera que $g^{-1}D_\mu g \to U(g^{-1}D_\mu g)U^{-1}$.

12. Formalismo de tétradas. Gravedad como una teoría de gauge del grupo de Lorentz
Consideremos transformaciones de Lorentz infinitesimales

$$\tilde{x}^a = \Lambda^a{}_b x^b \approx (\delta^a{}_b + \theta^a{}_b)x^b, \quad \text{denotamos} \quad \Lambda = e^\theta \quad \text{y} \quad |\theta^a{}_b| \ll 1 \tag{8}$$

Recordemos que de $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$, definiendo $\theta_{ab} \equiv \eta_{ac}\theta^c{}_b$, resulta $\theta_{ab} = -\theta_{ba}$. Los generadores del grupo de Lorentz satisfacen

$$[M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac} + \eta_{ad}M_{bc} \tag{9}$$

Un tensor T^I en una representación R del grupo de Lorentz transformará según

$$T^I \to \tilde{T}^I = D^{\mathsf{R}}(\Lambda)^I{}_J \, T^J$$

donde

$$D^R(\Lambda) = e^{\frac{1}{2}\theta^{ab} M^{(R)}_{ab}} \quad \text{con} \quad M^{(\mathsf{R})}_{ab} = (M_{ab})^I{}_J \tag{10}$$

(i) Irrep vectorial $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: Verificar que Λ conincide con la representación vetorial, $\Lambda = D^{\mathsf{R}}(\Lambda)$ donde $\mathsf{R} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, cuyos generadores son

$$(M_{ab})^c{}_d = \delta^c_a \, \eta_{bd} - \delta^c_b \, \eta_{ad} \quad \text{aquí} \quad I = a$$

(ii) Representación espinorial de Dirac $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$: mostrar que los generadores

$$M_{ab} = \frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b]$$

satisfacen el álgebra de Lorentz (9)[3].

(iii) Considerar un conjunto de frames ortonormales $\{\boldsymbol{E}_a\}$ base de $T_p\mathcal{M}$ y sus duales $\{\boldsymbol{e}^a\}$ base de $T^*_p\mathcal{M}$. A partir de

$$\langle \boldsymbol{e}^a, \boldsymbol{E}_b \rangle = \delta^a_b \tag{11}$$

mostrar que

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab} \, e^a_\mu(x) e^b_\nu(x)$$

Luego, escribiendo (11) en componentes y de la condición de ortonormalidad mostrar

$$(i) \quad e^a_\mu(x) E^\mu_b(x) = \delta^a_b, \qquad (ii) \quad E^\mu_a(x) = \eta_{ab} g^{\mu\nu}(x) e^b_\nu(x) \tag{12}$$

y

$$g^{\mu\nu}(x) = E^\mu_a(x) E^\nu_b(x) \eta^{ab}$$

A partir de esta última expresión obtener

$$e^a_\mu(x) E^\nu_a(x) = \delta^\nu_\mu \tag{13}$$

De $(12).i$ y (13) concluimos que $E^\mu_a = (e^a_\mu)^{-1}$. Muchos textos reducen la notación definiendo

$$e^\mu_a \equiv E^\mu_a = \eta_{ab} g^{\mu\nu} e^b_\nu$$

y nunca mencionan las componentes $E^\mu_a(x)$.

[3] Aquí $I = \alpha$, la irrep actúa sobre espinores ψ^α y la estructura de índices de las matrices gamma es $\gamma_a = (\gamma_a)^\alpha{}_\beta$.

(iv) Frente a TLL un campo tensorial T transforma según

$$T^I(x) \to \tilde{T}^I(x) = D(\Lambda(x))^I{}_J\, T^J(x) \quad \text{matricialmente} \quad \tilde{T} = D^{\mathsf{R}}(\Lambda(x))\, T$$

Definimos la derivada covariante actuando sobre T como

$$\mathcal{D}_a \equiv E_a^\mu(x)(\partial_\mu + \omega_\mu) \qquad \text{donde} \quad \omega_\mu = \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab}(x) M_{ab}^{(\mathsf{R})}$$

En general, la representación de M_{ab} en la derivada covariante depende del tensor T^I sobre el que actua. Mostrar a partir de

$$\tilde{\mathcal{D}}_a \tilde{T} = D^{\mathsf{R}}(\Lambda(x))\, \mathcal{D}_a T$$

que la conexión de spin ω_μ debe transformar según

$$\tilde{\omega}_\mu = D^{\mathsf{R}}(\Lambda(x)) \cdot \omega_\mu \cdot D^{\mathsf{R}}(\Lambda^{-1}(x)) - \partial_\mu\big(D^{\mathsf{R}}(\Lambda(x))\big) \cdot D^{\mathsf{R}}(\Lambda^{-1}(x)),$$

que a primer orden en θ se reduce a

$$\tilde{\omega}_\mu{}^{ab} \approx \omega_\mu{}^{ab} - \mathsf{D}_\mu \theta^{ab} + \ldots \tag{14}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathsf{D}_\mu \theta^{ab} &\equiv \partial_\mu \theta^{ab} + [\omega_\mu, \theta]^{ab} \\ &= \partial_\mu \theta^{ab} + \omega_\mu{}^a{}_c\, \theta^{cb} - \theta^{ac}\, \omega_{\mu\, c}{}^b\end{aligned}$$

(v) Mostrar que

$$\omega_\mu{}^{ab}(x) = g^{\rho\nu} e_\rho^a\, (e_\nu^b)_{;\mu}$$

verifica (14), donde $(e_\nu^a)_{;\mu} = \nabla_\mu e_\nu^a = \partial_\mu e_\nu^a - \Gamma^\rho_{\nu\mu} e_\rho^a$. Mostrar que es antisimétrica en (a, b).

13. Derivadas covariantes, Matrices gamma, en fin ... índices

Hemos introducido tres derivadas covariantes: $D = \partial + \omega$ Lorentz, $\nabla = \partial + \Gamma$ diffeos, $\mathfrak{D} = \partial + \omega + \Gamma$ Lorentz+diffeo. El postulado de vierbein nos garantiza que la derivada actuando sobre tensores (spín entero) puede ser calculada indistintamente en base local del espacio tangente (ab) o en base coordenada ($\mu\nu$) (ver ej. 4). En cuanto a los campos de spín semientero es ineludible usar el espacio tangente.

Podemos pensar que siempre actuamos con $\mathfrak{D}_\mu$ y que esta actuará apropiadamente dependiendo de los índices del tensor, a saber

$$\mathfrak{D}_\mu V^\rho = \nabla_\mu V^\rho = \partial_\mu V^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\nu} V^\nu \tag{15}$$

pero asimismo

$$\mathfrak{D}_\mu V^a = D_\mu V^a = \partial_\mu V^a + \omega_\mu{}^a{}_b V^b \tag{16}$$

Las expresiones (15) y (16) son equivalentes en virtud del postulado de vierbein $\mathfrak{D}_\mu e_a^\rho = 0$

$$\nabla_\mu V^\rho = \mathfrak{D}_\mu V^\rho = \mathfrak{D}_\mu (e_a^\rho V^a) = e_a^\rho\, \mathfrak{D}_\mu V^a = e_a^\rho\, D_\mu V^a$$

Algunos ejemplos son (suprimiendo el índice espinorial)

$$\text{Espinor}: \quad \mathfrak{D}_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab}\psi, \qquad \text{donde} \quad \gamma_{ab} = \frac{1}{2}[\gamma_a, \gamma_b] \tag{17}$$

$$\text{Rarita-Schwinger}: \quad \mathfrak{D}_\mu \psi_\nu = \partial_\mu \psi_\nu + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab}\psi_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\psi_\rho$$

$$\mathfrak{D}_\mu \psi_a = \partial_\mu \psi_a + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{cd}\gamma_{cd}\psi_a + \omega_{\mu\, a}{}^b \psi_b \tag{18}$$

(a) A partir de la ley de transformación de un espinor (17) derivar la ley para el espinor barrado

$$\mathfrak{D}_\mu \bar{\eta} = \bar{\eta}\big(\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab}\big)$$

Ayuda: construir el escalar $\phi = \bar{\eta}\psi$, luego $\mathfrak{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi = (\mathfrak{D}_\mu \bar{\eta})\psi + \bar{\eta}(\mathfrak{D}_\mu \psi) \rightsquigarrow$ despejar.

(b) Mostrar que

$$\mathfrak{D}_\mu \gamma^\rho = \partial_\mu \gamma^\rho + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}[\gamma_{ab}, \gamma^\rho] + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\gamma^\nu \tag{19}$$

Ayuda: construir el vector $V^\mu = \bar{\eta}\gamma^\mu\psi$ y proceder como en el item anterior.

(c) Mostrar que

$$[\gamma_{ab}, \gamma_c] = 2(\gamma_a \eta_{bc} - \gamma_b \eta_{ac})$$

Usando este resultado evaluar el conmutador de matrices gamma en (19) y concluir que

$$\mathfrak{D}_\mu \gamma_\nu = \partial_\mu \gamma_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\gamma_\rho + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab} e_{b\,\nu}\gamma_a$$

Introduciendo en esta ecuación la relación $\gamma_\nu = e^a_\nu \gamma_a$ hallar que

$$\mathfrak{D}_\mu(e^a_\nu \gamma_a) = \gamma_a \underbrace{(\partial_\mu e^a_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} e^a_\rho + \omega_\mu{}^a{}_b e^b_\nu)}_{\mathfrak{D}_\mu e^a_\rho = 0 \text{ veirbein postulate}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathfrak{D}_\mu \gamma_a = 0}$$

14. Ecuación de Dirac en AdS: considerar la métrica de AdS en coordenadas de Poincare

$$ds^2 = R^2 \left(\frac{-dt^2 + d\boldsymbol{x}^2 + dz^2}{z^2} \right)$$

(i) Definir una base local $\boldsymbol{e}^a$.
(ii) Hallar la conexión de espín $\boldsymbol{\omega}^{ab}$ con torsión nula resolviendo $\boldsymbol{T}^a = \boldsymbol{d}\boldsymbol{e}^a + \boldsymbol{\omega}^a{}_b \wedge \boldsymbol{e}^b = 0$
(iii) Escribir la ecuación de Dirac para un espinor y resolverla.

15. Geometría de la variedad de grupo $G = SU(2)$

La idea será construir la geometría de $SU(2)$ a partir de la estructura de grupo.

(i) Parametrización usual: La variedad de grupo de $SU(2)$[4] es topológicamente la 3-esfera S^3. A partir de la parametrizacion

$$U(\psi, \theta, \phi) = \exp(\frac{i}{2}\psi\, \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \cos\frac{\psi}{2} + i\sin\frac{\psi}{2}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})$$

donde $\boldsymbol{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ hallar las *algebra valued* 1-formas invariantes a izquierda (left invariant forms LIF)

$$\text{Tétradas :} \qquad \boldsymbol{f}_L \doteq U^{-1}\boldsymbol{d}U = \boldsymbol{f}^a_L T_a\,. \tag{20}$$

A partir de las 1-formas $\boldsymbol{f}^a$ construir la métrica sobre $SU(2)$ usando la métrica de Killing-Cartan

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\,\boldsymbol{f}_L \boldsymbol{f}_L] = -\frac{1}{2}\mathfrak{K}_{ab} f^a_L f^b_L, \qquad \mathfrak{K}_{ab} \equiv -\frac{1}{2}\mathrm{tr}[T_a T_b],\ \text{Killing} - \text{Cartan metric} \\ &= \left(d\frac{\psi}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{\psi}{2}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \qquad \psi\in(0,4\pi),\ \theta\in(0,\pi),\ \phi\in(0,2\pi) \end{aligned} \tag{21}$$

i.e. la métrica canónica de S^3. Notemos que es *bi-invariante* $\rightsquigarrow$ isometría $SO(4) \simeq SU(2)\times SU(2)$!

(ii) Por qué (21) resultó ser $G\times G$ invariante? Manipulando la primera línea de (21) mostrar que

$$ds^2 = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\,dU\, dU^\dagger]$$

que resulta invariante frente a $U(\psi,\theta,\phi) \to V_L\, U(\psi,\theta,\phi)\, V_R \in SU(2)$ constantes.

(iii) Angulos de Euler angles y fibración de Hopf de S^3: parametrizando ahora los elementos de $SU(2)$ en términos de ángulos de Euler

$$U(\phi,\theta,\psi) = e^{-\frac{i}{2}\phi\sigma_3} e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_2} e^{-\frac{i}{2}\psi\sigma_3}$$

[4] Matrices U tales que $UU^\dagger = 1$ y $\det U = +1$

Mostrar que las componentes de

$$\boldsymbol{e}_L = U^{-1}\boldsymbol{d}U = -\frac{i}{2}\sigma_i\,\boldsymbol{e}_L^i$$

en la base de matrices de Pauli resultan

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_L^1 &= \sin\psi\,\boldsymbol{d}\theta - \sin\theta\cos\psi\,\boldsymbol{d}\phi\\
\boldsymbol{e}_L^2 &= \cos\psi\,\boldsymbol{d}\theta - \sin\theta\sin\psi\,\boldsymbol{d}\phi\\
\boldsymbol{e}_L^3 &= \boldsymbol{d}\psi + \cos\theta\,\boldsymbol{d}\phi\,.
\end{aligned} \tag{22}$$

Construyendo la métrica como en (21) obtener al métrica canónica de S^3 en la forma de Hopf

$$\text{Métrica de Killing-Cartan :}\qquad \begin{aligned} ds^2 &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\,\boldsymbol{e}_L\boldsymbol{e}_L]\\ &= \frac{1}{4}[d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 + (d\psi + \cos\theta\,d\phi)^2] \end{aligned} \tag{23}$$

(iv) Verificar que las tétradas $\boldsymbol{e}^i$ satisfacen las relaciones de Maurer-Cartan

$$\boldsymbol{d}\boldsymbol{e}_L = -\boldsymbol{e}_L\wedge\boldsymbol{e}_L$$

Reescribirlas como

$$\text{Conexión de spin - Torsión nula :}\qquad \boldsymbol{d}\boldsymbol{e}^i + \frac{\epsilon^{ijk}}{2}\boldsymbol{e}^j\wedge\boldsymbol{e}^k = 0$$

justificando la elección de conexión de torsión nula como $\boldsymbol{\omega}^i{}_k = \frac{\epsilon^{ijk}}{2}\boldsymbol{e}^j$.

(iv) Calcular el vol($SU(2)$)=$2\pi^2$. Este volumen depende de la normalización global de la métrica.

(v) Hallar los vectores invariantes bajo la acción a izquierda (duales a las LIF (22) del item anterior)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_1 &= -2\cot\theta\cos\psi\,\boldsymbol{\partial}_\psi - 2\sin\psi\,\boldsymbol{\partial}_\theta + 2\frac{\cos\psi}{\sin\theta}\,\boldsymbol{\partial}_\phi\\
\boldsymbol{L}_2 &= -2\cot\theta\sin\psi\,\boldsymbol{\partial}_\psi - 2\cos\psi\,\boldsymbol{\partial}_\theta + 2\frac{\sin\psi}{\sin\theta}\,\boldsymbol{\partial}_\phi\\
\boldsymbol{L}_3 &= -2\boldsymbol{\partial}_\psi
\end{aligned} \tag{24}$$

verificar que satisfacen el álgebra de $SU(2)$ y que son vectores de Killing de la métrica (23). Nota, las constantes de estructura *no* dependen de la posición en $SU(2)$.

(vi) Los right invariant vector fields son

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_1 &= 2\cot\theta\cos\phi\,\boldsymbol{\partial}_\phi + 2\sin\phi\,\boldsymbol{\partial}_\theta - 2\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\,\boldsymbol{\partial}_\psi\\
\boldsymbol{R}_2 &= 2\cot\theta\sin\phi\,\boldsymbol{\partial}_\phi - 2\cos\phi\,\boldsymbol{\partial}_\theta - 2\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\,\boldsymbol{\partial}_\psi\\
\boldsymbol{R}_3 &= -2\boldsymbol{\partial}_\phi
\end{aligned}$$

Mostrar que conmutan con los left invariant $\boldsymbol{L}_i$

$$[\boldsymbol{R}_i, \boldsymbol{L}_j] = 0 \qquad \forall\ i, j$$

que $\boldsymbol{R}_i$ tambien son vectores de Killing de $\boldsymbol{g}$, que cierran $SU(2)$ con un sutíl cambio de signo, hallar las right invariant 1-forms $\boldsymbol{e}_R = \boldsymbol{d}U\cdot U^{-1}$, mostrar que son duales a los vectores $\boldsymbol{R}_i$ y completar todo el picture.

Referencias

sect. 15.2 of *Mathematics for Physics*, P Goldbart and M Stone

sect. 5.6 of *Geometry, Topology and Physics*, M Nakahara.