

Parte III: N grande

1. Renormalización en QM: consideremos mecánica cuántica en 2-dimensiones en presencia de un potencial *atractivo* tipo delta

$$S[\mathbf{q}] = \int dt \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 + g_0 \delta^{(2)}(\mathbf{q}) \right), \quad g_0 > 0$$

aquí absorbimos la masa redefiniendo la variable \mathbf{q} . En 1d hallamos un estado ligado cuya energía se relacionaba con la potencia g_0 de la delta, veamos las peculiaridades de 2d.

- (a) Ajustando unidades de manera que $\hbar = c = 1 \rightsquigarrow [S] = 0$. Concluir que

$$[t] = -1 \rightsquigarrow [q] = -1/2 \rightsquigarrow [\delta^{(d)}] = -d \times [q] = \frac{d}{2} \rightsquigarrow [g_0] = 0$$

la constante de acoplamiento g_0 en el potencial es adimensional en 2d. La teoría es clásicamente invariante de escala! Existen estados ligados? Qué escala los determina? \rightsquigarrow Renormalización

- (b) Formulando el problema de autofunciones de H en espacio de Fourier hallar para el estado ligado de energía $E = -\kappa < 0$

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{p}^2 - g_0 \delta^{(2)}(\mathbf{q}) \rightsquigarrow \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2} + \kappa \right) \varphi_b(\mathbf{p}) = g_0 \psi(0) \rightsquigarrow \varphi_b(\mathbf{p}) = \frac{g_0}{\frac{\mathbf{p}^2}{2} + \kappa} \psi_b(0) \quad (1)$$

donde

$$\psi_b(\mathbf{q}) = \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}} \varphi_b(\mathbf{p}) \quad (2)$$

- (c) Insertando (1) en (2) y evaluando en $\mathbf{q} = 0$ obtener una relación de consistencia para la energía del estado ligado κ

$$\int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{g_0}{\frac{\mathbf{p}^2}{2} + \kappa} = 1$$

Peeero...hay un problema, la integral es logarítmicamente divergente en el UV

$$\int^\Lambda d^2 \mathbf{p} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \sim 2\pi \log \Lambda$$

El hecho de que la divergencia sea logarítmica se debe a la invarianza de escala¹

- (d) Analizando la condición de autoconsistencia en presencia de un cutoff obtener

$$1 = \frac{g_0}{2\pi} \log \left(1 + \frac{\Lambda^2}{2\kappa} \right) \rightsquigarrow \kappa = \frac{\Lambda^2}{2} \frac{1}{e^{2\pi/g_0} - 1}$$

mostrando que solo existe solución para $g_0 > 0 \rightsquigarrow$ potencial atractivo. Notemos que si removemos el cutoff $\Lambda \rightarrow \infty$ inocentemente, la energía del estado ligado $E = -\kappa \rightarrow -\infty$: el estado se hace mas y mas ligado, el potencial es demasiado atractivo.

- (e) Bethe + Wilson insight: si insistimos en que la cantidad físicamente medible es la energía del estado ligado κ , deberíamos reescribir todo en términos de ella. Dado Λ resolviendo para $g_0(\Lambda)$ obtener

$$g_0(\Lambda) = \frac{2\pi}{\log \left(1 + \frac{\Lambda^2}{2\kappa} \right)}$$

Este fue el paso crucial, el parámetro desnudo en la acción es cutoff dependent si κ permanece fijo!

¹La regularización se puede pensar de muchas maneras: podríamos decir que no hay estados de momento con $|\mathbf{p}| > \Lambda$, o tal vez podríamos decir que el potencial no es realmente una delta si miramos más de cerca. La elección de relato no debería afectar nuestras respuestas a las preguntas de física a energías muy por debajo del cutoff Λ .

Transmutación dimensional: en lugar de un acoplamiento adimensional g_0 , la teoría contiene una constante de acoplamiento dimensional κ . El cutoff desaparece de los observables, y estos terminan dependiendo solo de κ . En virtud de que

$$\kappa \stackrel{g_0 \rightarrow 0}{\simeq} e^{-2\pi/g_0} \neq \sum_{n=0}^{\infty} (g_0)^n f_n(\Lambda)$$

el fenómeno es inherentemente no-perturbativo.

(f) **Libertad asintótica:** analizando el comportamiento de $g_0(\Lambda)$ al remover el cutoff concluir que

$$g_0(\Lambda) \rightarrow 0, \quad \Lambda \rightarrow \infty$$

a esta propiedad se la conoce como libertad asintótica.

2. \mathbb{CP}^N . **Métrica de Fubini-Study:** El espacio proyectivo complejo \mathbb{CP}^N se define como el espacio de rectas complejas que pasan por el origen de \mathbb{C}^{N+1} . Dado $\mathbf{Z} = (z^0, \dots, z^N) \in \mathbb{C}^{N+1}$ definimos \mathbb{CP}^N identificando todos los puntos en \mathbb{C}^{N+1} que difieren por un escaleo complejo

$$\mathbb{CP}^N = \{\mathbf{Z} = \{z^a\} \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus \mathbf{0} / \mathbf{Z} \sim c\mathbf{Z}, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$$

Podemos implementar el cociente en dos etapas escribiendo el escalar complejo no nulo $c = Re^{i\alpha}$.

(i) mediante la dilatación $\mathbf{Z} \sim R\mathbf{Z}$, $R \in \mathbb{R}^+$, logramos $|\mathbf{Z}| = 1$ y luego (ii) identificamos los puntos sobre la esfera que difieren en una fase $\mathbf{Z} \sim e^{i\alpha}\mathbf{Z}$. Entonces

$$\mathbb{C}^{N+1} \setminus \mathbf{0} \xrightarrow{(i)} S^{2N+1} \xrightarrow{(ii)} \mathbb{CP}^N$$

Mediante (i) proyectamos sobre la esfera S^{2N+1} definida por $\sum_{a=0}^N \bar{z}^a z^a = 1$ y (ii) nos permite identificar $\mathbb{CP}^N = S^{2N+1}/S^1$ (a.k.a. Hopf fibration).

(a) Hallar la métrica inducida sobre \mathbb{CP}^N a partir de la métrica canónica en \mathbb{C}^{N+1} : $ds^2 = d\bar{\mathbf{Z}} \cdot d\mathbf{Z}$. Resolver el vínculo $\sum_{a=0}^N \bar{z}^a z^a = 1$ escribiendo $z^0 = 1/\sqrt{1 + \bar{w}^i w^i}$ y $z^i = w^i/\sqrt{1 + \bar{w}^i w^i}$ ($i, j = 1 \dots N$) válido cuando $z^0 \neq 0$, y mostrar que²

$$\text{Métrica de Fubini-Study : } ds_{\mathbb{CP}^N}^2 = g_{i\bar{j}}(w, \bar{w}) dw^i d\bar{w}^j, \quad \text{donde } g_{i\bar{j}} = \frac{(1 + |\mathbf{w}|^2)\delta_{i\bar{j}} - \bar{w}^i w^j}{(1 + |\mathbf{w}|^2)^2} \quad (4)$$

Notemos que $w^i = z^i/z^0$ son coordenadas naturales para describir \mathbb{CP}^N ya que puntos \mathbf{Z} que difieren por un escaleo tienen las mismas coordenadas w^i .

—

(a.1) Mostrar que $\mathbb{CP}^1 \simeq S^2 \rightsquigarrow "SU(2)"$ isometry. Mas precisamente, el grupo de isometría de \mathbb{CP}^N es $PSU(N+1) = SU(N+1)/\mathbb{Z}_{N+1}$ (ver Gibbons+Pope).

(a.2) Mostrar que para $N = 2$ la métrica 4d es Einstein, $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$, con $\Lambda = 6$, y que el tensor de Weyl de $g_{i\bar{j}}$ es auto-dual (\mathbb{CP}^2 se interpreta como un instanton gravitacional).

(a.3) Mostrar que la métrica de \mathbb{CP}^N puede ser derivada de un potencial (Kahler) como

$$g_{i\bar{j}} = \partial_i \bar{\partial}_j K(w, \bar{w}) \quad \text{donde } K(w, \bar{w}) = \ln(1 + |\mathbf{w}|^2)$$

donde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial w^i}$, $\bar{\partial}_i = \frac{\partial}{\partial \bar{w}^i}$.

—

3. \mathbb{CP}^N NLSM en d -dimensiones. Campos de gauge emergentes.

Classique: proponemos la dinámica para campos en un target \mathbb{CP}^N como

$$S = \int d^d x \left[\sum_a (D_\mu z^a)^\dagger D_\mu z^a - \sigma \left(\sum_j |z^a|^2 - 1 \right) \right] \quad a = 0, 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

²En (4) la isometría $SU(N+1)$ de \mathbb{CP}^N no es manifiesta. Esta queda manifiesta usando coordenadas homogéneas z^a

$$ds^2 = \frac{1}{|\mathbf{Z}|^4} (|\mathbf{Z}|^2 d\bar{\mathbf{Z}} \cdot d\mathbf{Z} - (\bar{\mathbf{Z}} \cdot d\mathbf{Z})(\mathbf{Z} \cdot d\bar{\mathbf{Z}})) \quad (3)$$

Aquí la distancia entre puntos que difieren por un escaleo $\mathbf{Z}' = c\mathbf{Z} \approx (1 + \alpha)\mathbf{Z} \rightsquigarrow d\mathbf{Z} = \mathbf{Z}\alpha$ es nula como esperamos.

donde $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$. De esta manera σ impone el vínculo $\sum_a \bar{z}^a z^a = 1$ y A_μ conduce a que configuraciones $\mathbf{Z}'(x)$ y $\mathbf{Z}(x)$ difiriendo en una fase

$$\mathbf{Z}'(x) = e^{i\alpha(x)} \mathbf{Z}(x)$$

resultan equivalentes si transformamos convenientemente el campo auxiliar $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha$. La invarianza de gauge elimina la fase α . El conjunto de vacíos de la teoría, mínimos del potencial, se identifica con \mathbb{CP}^N . A la forma (5) se la conoce como *gauged linear sigma model* GLSM.

Cuál es la ventaja del GLSM (5) respecto de un NLSM en términos de \mathbf{w} ? Los $N + 1$ campos z^a en (5) son libres, sin vínculos y la simetría $SU(N + 1)$ esta realizada linealmente. Compararemos esto con los N campos w^i donde la simetría se realiza no linealmente en términos de vectores de Killing.

(a) Puesto que el campo de gauge es gaussiano, resolverlo obteniendo

$$A_\mu = \frac{i}{2} (z^a (\partial_\mu z^a)^\dagger - (z^a)^\dagger \partial_\mu z^a),$$

reintroducirlo en la acción, y recuperar el *ungauged* NLSM para \mathbb{CP}^N dado por (3).

—

A nivel clásico al elegir una dirección (vacío) en $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z} = 1$ rompemos la simetría \Rightarrow a nivel cuántico, la aparición de N campos no masivos w^i , bosones de Goldstone asociados a la ruptura $SU(N + 1) \rightarrow SU(N)$. El NLSM definido sobre \mathbb{CP}^N describe la dinámica de los bosones de Goldstone. Sin embargo en dos dimensiones no podemos tener campos no-masivos (Coleman-Mermin-Wagner thm.)!! El modelo cuántico resuelve este dilema generando a nivel no perturbativo una masa (8) para los bosones z^a . La vuelta de tuerca respecto del modelo $O(N)$ es que a baja energía emerge un campo de gauge A_μ que confina las partículas z^a . Veámoslo

—

(c) **N grande - Quantum:** para resolver el modelo en el límite de N grande escribimos

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\mathbf{Z} \mathcal{D}\mathbf{Z}^\dagger \cdot e^{-\frac{1}{g^2} \int d^d x ((D_\mu \mathbf{Z})^\dagger \cdot D_\mu \mathbf{Z} + \sigma (\mathbf{Z}^\dagger \cdot \mathbf{Z} - 1))}$$

(c.0) Determinar las dimensiones de escala de los campos z^a , A_μ , σ y del acoplamiento g^2 .

(c.1) Justificar que el contorno de integración de $\sigma(x)$ es a lo largo del eje imaginario.

(c.2) Puesto que la integral en \mathbf{Z} , \mathbf{Z}^\dagger es gaussiana integrarla para obtener

$$S_{eff}[A, \sigma] = -\frac{1}{g^2} \int d^d x \sigma + N \log \det \left(\frac{-D^2 + \sigma}{\Lambda^2} \right) \quad (6)$$

donde Λ es un cutoff UV. Justificar por qué debemos reescalar $g^2 \rightarrow \lambda/N$ en el límite N grande.

(c.3) Asumiendo $A_\mu = 0$ y $\langle \sigma \rangle = m^2 = cte$, mostrar que el saddle point de (6) resulta

$$\text{Ecuación de gap : } \frac{1}{\lambda} = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 + m^2} \quad (7)$$

La integral en el lado derecho es divergente UV para $d \geq 2$. Introduciendo un cutoff UV Λ obtener

$$\int^\Lambda \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 + m^2} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log \frac{\Lambda}{m} & d = 2 \\ \frac{1}{\Lambda^{d-2}} & d > 2 \end{cases}$$

- $d = 2$ Transmutación dimensional y libertad asintótica:

1. Mostrar la aparición de una masa m^2 para las partículas z^a para todo valor³ de $\lambda(\Lambda)$

$$m^2 = \Lambda^2 e^{-\frac{4\pi}{\lambda(\Lambda)}} \quad (8)$$

2. Mostrar que la teoría es asintóticamente libre

$$\lambda(\Lambda) = \frac{2\pi}{\log(\frac{\Lambda}{m})} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} 0$$

³En $d = 2$, la aparición de una masa para los campos \mathbf{Z} resuelve la divergencia infrarroja en la integral.

- $d > 2$: puesto que la integral en (8) esta acotada superiormente, $\int^\Lambda \sim \Lambda^{d-2}$, mostrar que si $\lambda(\Lambda) \ll \lambda_c \Rightarrow$ no existe solución real para $\sigma \neq 0$. El valor crítico está dado por

$$\frac{1}{\lambda_c} = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2} \sim \Lambda^{d-2}$$

Concluir que:

- $\lambda < \lambda_c$ (acopl. débil) : $SU(N+1)$ espontáneamente rota \rightsquigarrow expandiendo alrededor de $\langle \mathbf{Z} \rangle \neq 0$
 $\rightsquigarrow N$ Bosones de Goldstone débilmente interactuantes
 $\langle \mathbf{Z} \rangle \neq 0 \rightsquigarrow$ campo de gauge $U(1)$ se Higgssea
 ABURRIDO, la física es la esperada!
- $\lambda > \lambda_c$ (acopl. fuerte) : $SU(N+1)$ no rota $\rightsquigarrow \mathbf{Z}$ se vuelven masivos
 \rightsquigarrow la teoría tiene un límite al continuo

(c.4) Campos de gauge emergentes: Analicemos la consistencia de haber puesto a cero el campo de gauge A_μ . A energías $E \ll m$ debemos analizar la dinámica inducida para A_μ por loops virtuales de partículas z^a , esto es, estudiar la acción efectiva (6).



Figure 1: Diagramas en la expansión de $\det(-D^2 + m^2)$ que contribuyen al término cinético de A_μ .

Considerar el término cuadrático en A_μ en la acción efectiva (6). Expandiendo alrededor del saddle $\langle \sigma \rangle = m^2$ desarrollar el determinante y obtener (cf fig.1)

$$\begin{aligned} S_{eff}^{(2)}[A] &= N \left(\int d^d x A_\mu^2(x) G(x, x) + \frac{1}{2} \int d^d x d^d y G(x, y) \mathcal{O}(y) G(y, x) \mathcal{O}(x) \right), \quad \mathcal{O} = (\partial \cdot A + 2A \cdot \partial) \\ &= N \left(\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} A_\mu(l) A_\nu(-l) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[\frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2 + m^2} - \frac{1}{2} \frac{(l_\mu + 2p_\mu)(l_\nu + 2p_\nu)}{(p^2 + m^2)((p+l)^2 + m^2)} \right] \right) \end{aligned} \quad (9)$$

En el límite de momentos pequeños mostrar que se obtiene un término proporcional a (apéndice Mariño)

$$l_\mu l_\nu - \delta_{\mu\nu} l^2$$

que da origen a un término de Maxwell. Inferir la forma del coeficiente de este término mediante análisis dimensional obteniendo

$$\frac{1}{q^2} \sim \begin{cases} \frac{N}{m^2} & d = 2 \\ \frac{N}{m} & d = 3 \\ N \log\left(\frac{\Lambda}{m}\right) & d = 4 \\ N \Lambda^{d-4} & d > 4 \end{cases}$$

Para $d \leq 4$ los coeficientes precisos se pueden evaluar exactamente mediante regularización dimensional. Para $d > 4$ la integral diverge tipo power law y el coeficiente no es universal. Concluir que no posible para $d \geq 4$ tomar el límite al continuo y obtener un acoplamiento finito, lo que manifiesta el comportamiento de QED que hizo llorar a Landau. Justificar que las correcciones en derivadas mas altas estarán suprimidas por la escala m y luego, no afectaran el IR. Por otra parte a altas energías $E > m$ no podremos despreciar las correcciones en derivadas de orden superior al el término de Maxwell.

Conclusión: la dinámica en el IR dio origen a un campo de gauge débilmente acoplado para N grande. Su presencia, in embargo, es importante ya que genera *confinamiento* de las partículas (masivas) z^a ! En 2d el confinamiento sucede a nivel clásico puesto que el potencial de Coulomb es lineal. Es importante enfatizar que la simetría de gauge $U(1)$ emergente en el IR no existía en el UV.

4. Matrices aleatorias, Autovalores y Vandermonde:

- (a) Derivar el jacobiano para el cambio de variables de la base de componentes S_{ij} a la base de autovalores λ_i para matrices simétricas reales (a.k.a Gaussian Orthogonal Ensemble-GOE) obteniendo

$$\hat{\rho}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \mathcal{N} e^{-\frac{1}{2} \sum_i \lambda_i^2} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta, \quad \beta = 1 \quad (10)$$

aquí \mathcal{N} es una constante de normalización que garantiza que $\int d\boldsymbol{\lambda} \rho(\boldsymbol{\lambda}) = 1$ con $d\boldsymbol{\lambda} = \prod_{i=1}^N d\lambda_i$
 Hipótesis: La distribución de probabilidad conjunta (dpc) para las componentes M_{ij} de una matriz real se define como

$$\rho(M_{11}, M_{12}, \dots, M_{NN}) = \prod_{i,j=1}^N \underbrace{\left[\frac{e^{-\frac{1}{2} M_{ij}^2}}{\sqrt{2\pi}} \right]}_{\text{distrib. Gaussiana o normal}} \rightsquigarrow \int DM \rho(M) = 1$$

Cuando la función de distribución se factoriza, es decir, es el producto de funciones de densidad, $\rho(A, B) = \rho_1(A)\rho_2(B)$, decimos que las variables son independientes. Asimismo, puesto que $\rho_1(A) = \rho_2(B)$, las variables aleatorias se dicen i.i.d. (independientes e idénticamente distribuidas).

- i. Considerar una matriz real simétrica \mathbf{S} . La condición de simetría nos dice que $S_{ij} = S_{ji}$, mostrar que el número de variables independientes de la matriz es $N + N(N - 1)/2 = N(N + 1)/2$.
 ii. Para el caso de una matriz real simétrica, la dpc se define como

$$\rho(\underbrace{S_{11}, S_{22}, \dots, S_{NN}}_{S_{ii}}, \underbrace{S_{12}, S_{13}, \dots, S_{23}, \dots, S_{NN}}_{S_{ij} \text{ con } i < j}) = \prod_{i=1}^N \left[\frac{e^{-\frac{1}{2} S_{ii}^2}}{\sqrt{2\pi}} \right] \prod_{i < j} \left[\frac{e^{-S_{ij}^2}}{\sqrt{\pi}} \right]$$

notar que la varianza de las componentes no diagonales es 1/2 de la varianza de las componentes diagonales \rightsquigarrow las variables no están idénticamente distribuidas. Mostrar que

$$\rho(\mathbf{S}) = \mathcal{N} e^{-\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{S}^2)}$$

con \mathcal{N} un factor de normalización.

- iii. Pasar a la base de autovalores escribiendo $\mathbf{S} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{O}^T$ con $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ reales. La idea es hacer ahora el cambio de variables $\mathbf{S} \rightarrow \{\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{O}\}$

$$\rho(\mathbf{S}) \underbrace{\prod_{i \leq j} dS_{ij}}_{D\mathbf{S}} = \rho(\mathbf{S}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{O})) \cdot \underbrace{|J(\mathbf{S} \rightarrow \{\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{O}\})|}_{\text{jacobiano } \det(\partial\mathbf{S}/\partial(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{O}))} D\mathbf{O}D\boldsymbol{\lambda}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\hat{\rho}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{O})}$$

Mostrar que

$$\rho(\mathbf{S}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{O})) = \rho(\boldsymbol{\lambda})$$

- iv. Para hallar el jacobiano diferenciar $\mathbf{S} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{O}^T$ obteniendo

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{S} &= \delta\mathbf{O} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{O}^T + \mathbf{O} \cdot \delta\mathbf{D} \cdot \mathbf{O}^T + \mathbf{O} \cdot \mathbf{D} \cdot \delta\mathbf{O}^T \\ &= \delta\mathbf{O} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{O}^T + \mathbf{O} \cdot \delta\mathbf{D} \cdot \mathbf{O}^T - \mathbf{O} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \delta\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T \end{aligned}$$

A partir de $\delta\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{O}^T \cdot \delta\mathbf{O}$ y $\delta\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{O}^T \cdot \delta\mathbf{S} \cdot \mathbf{O}$ hallar

$$\delta\hat{\mathbf{S}} = \delta\mathbf{D} + [\delta\hat{\boldsymbol{\Omega}}, \mathbf{D}]$$

- v. Puesto que \mathbf{S} y $\hat{\mathbf{S}}$ están relacionadas por una matriz ortogonal mostrar que $D\mathbf{S} = D\hat{\mathbf{S}}$. Luego debemos calcular el jacobiano para $\delta\hat{\mathbf{S}} \rightarrow \{\delta\boldsymbol{\lambda}, \delta\hat{\boldsymbol{\Omega}}\}$.
 Mostrar que $\delta\hat{\boldsymbol{\Omega}}$ es una matriz antisimétrica.

Usando que $\delta \mathbf{D}$ es diagonal obtener

$$\delta \hat{S}_{ij} = \delta_{ij} \delta \lambda_i + \delta \Omega_{ij} (\lambda_j - \lambda_i)$$

concluyendo que

$$\frac{\partial(S_{11}, S_{22}, \dots, S_{NN}, S_{12}, \dots, S_{N-1N})}{\partial(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N, \Omega_{12}, \Omega_{13}, \dots)} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\lambda_2 - \lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3 - \lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (\lambda_N - \lambda_{N-1}) \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$J = \left| \det \frac{\partial(S_{11}, S_{22}, \dots, S_{NN}, S_{12}, \dots, S_{N-1N})}{\partial(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N, \Omega_{12}, \Omega_{13}, \dots)} \right| = \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|$$

La distribución final (10) nos dice que los autovalores no son independientes.

(b) Mostrar que para el caso de matrices hermíticas se obtiene (10) con $\beta = 2$.

5. Modelo de matrices $d = 0$:

(a) Considerar el modelo de matrices hermíticas M con potencial cúbico $V(\mathbf{M}) = \mathbf{M}^2/2 + g\mathbf{M}^3/3$. Hallar la solución para la distribución de autovalores en el límite continuo para la solución de un corte. Mostrar que la solución es analítica en el origen (ver Brezin+Itzykson+Parisi+Zuber)

(b) Generalizar para el caso de un potencial polinómico (ver Maldacena, Lecture 4, TASI 2019)

6. Modelo de Gross-Witten-Wadia. Transiciones de fase: sea la función de partición

$$Z[g, N] = \mathcal{N} \int D\mathbf{U} e^{\frac{1}{g^2} \text{Tr}(\mathbf{U} + \mathbf{U}^\dagger)}$$

donde $\mathbf{U} \in U(N)$. La constante de normalización \mathcal{N} la fijamos imponiendo

$$Z[\infty, N] = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{N} = \frac{1}{\text{Vol}(U(N))} \quad (11)$$

(a) Usando la simetría global $\mathbf{U} \in U(N)$ donde $\mathbf{U} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}^\dagger$ mostrar que en la base de autovalores $\mathbf{D} = \text{diag}(e^{i\alpha_1}, \dots, e^{i\alpha_N})$

$$Z[g, N] = \mathcal{N} \int \prod_i d\alpha_i \prod_{i < j} \left(\sin \frac{1}{2}(\alpha_i - \alpha_j) \right)^2 e^{\frac{2}{g^2} \sum_i \cos \alpha_i}, \quad i, j = 1, \dots, N \quad (12)$$

aquí $\alpha_i \in (-\pi, \pi)$. Definiendo $\lambda = g^2 N$, reescribirla como

$$Z[g, N] = \mathcal{N} \int \prod_i d\alpha_i e^{-N^2 S_{eff}[\alpha_i]} \quad \text{con} \quad S_{eff}[\alpha_i] = \frac{1}{N} \sum_i \underbrace{-\frac{2}{\lambda} \cos \alpha_i}_{\text{potencial } V(\alpha)} + \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \underbrace{-\ln \left| \sin \frac{1}{2}(\alpha_i - \alpha_j) \right|}_{\text{repulsion autovalores}}$$

El potencial $V(\alpha)$ confina los autovalores en el origen y la repulsión debida al Vandermonde genera una repulsión entre ellos. La idea es estudiar la competencia entre estos dos efectos en el modelo GWW. Como resultado de que los autovalores α_i viven en el círculo S^1 obtendremos una discontinuidad en la distribución de autovalores para $\lambda \leq 2$. Estudiaremos este efecto en el límite N grande.

(b) Justificar que en el límite N -grande, la energía libre $F = -\log Z$ presenta la siguiente expansión

$$F[\lambda, N] = N^2 f^{(0)}[\lambda] + f^{(1)}[\lambda] + \frac{1}{N^2} f^{(2)}[\lambda] + \dots$$

(c) Obtener las ecuaciones de saddle point a N finito

$$\frac{2}{g^2} \sin \alpha_i = \sum_{j \neq i} \cot \frac{1}{2}(\alpha_i - \alpha_j) \quad (13)$$

(d) Considerar el límite N grande con $\lambda = g^2 N$ finito. Introduciendo la densidad de autovalores

$$\rho(\alpha) = \frac{1}{N} \sum_i \delta(\alpha - \alpha_i) \rightsquigarrow \int d\alpha \rho(\alpha) = 1$$

reexpresar (13) como

$$\frac{2}{\lambda} \sin \alpha = \mathcal{P} \int d\alpha' \frac{\rho(\alpha')}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')} \quad (14)$$

donde \mathcal{P} denota valor principal de Cauchy.

(d.1) Para $\lambda \rightarrow 0$ esperamos que la repulsión debida al Vandermonde no sea tan importante y los autovalores se acumulen en el mínimo de potencial $\alpha = 0 \rightsquigarrow$ recuperar el modelo gaussiano con single cut solution $\alpha \in (-\alpha_m, \alpha_m)$ con $\alpha_m < \pi$ y determinar $\alpha_m(\lambda)$.

(d.2) Para λ grande la repulsión será importante haciendo que los autovalores se distribuyan suavemente en todo el círculo S^1 ($\alpha_m = \pi$). Insertando

$$\cot \frac{1}{2}(\alpha - \alpha') = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\sin n\alpha \cos n\alpha' - \cos n\alpha \sin n\alpha')$$

en (14) obtener

$$\lambda > 2 : \quad \rho(\alpha) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi\lambda} \cos \alpha \quad (15)$$

que resulta positiva sólo para $\lambda \geq 2$.

—

(d.3) **Optativo:** Resolver para $\rho(\alpha)$ cuando $\lambda < 2$ obteniendo (ver Gross+Witten, Wadia)

$$0 < \lambda < 2 : \quad \rho(\alpha) = \frac{2}{\pi\lambda} \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \rightsquigarrow \alpha_m = 2 \arcsin \sqrt{\lambda/2} < \pi$$

$$\alpha \in (-\alpha_m, \alpha_m) \quad (16)$$

(i) Reexpresar (12) en términos de los autovalores $z_i = e^{-i\alpha_i}$ obteniendo

$$Z[\lambda, N] = \tilde{C} \oint_{\Gamma} \prod_i dz_i \prod_{i < j} (z_i - z_j)^2 \exp \left(-\frac{N}{\lambda} W(z_i) \right) \quad \text{donde} \quad W(z) = \lambda \log z - z - \frac{1}{z}$$

Γ es el círculo unitario en el plano complejo. Las ecuaciones de saddle a N finito minimizando el exponente resultan

$$\frac{N}{\lambda} W'(z_i) + \sum_{j \neq i} \frac{2}{z_j - z_i} = 0, \quad i, j = 1, \dots, N \quad (17)$$

es importante resaltar que la secuencia de autovalores z_i debe ser alcanzable mediante una deformación de Γ en el dominio analítico de $e^{-N^2 S_{eff}(z)}$.

(ii) A partir de las soluciones $\{z_i\}$ de las ecuaciones de saddle definimos el resolvente (discreto)

$$\text{Resolvente :} \quad \omega_N(z) \equiv \frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{z - z_i}$$

Mostrar que $\omega_N(z)$ satisface la ecuación de Riccati

$$\text{Riccati :} \quad \frac{1}{N} \omega'_N(z) + \omega_N^2(z) - \frac{1}{\lambda} W'(z) \omega_N(z) = -\frac{1}{\lambda} \frac{1}{N} \sum_i \frac{W'(z) - W'(z_i)}{z - z_i}$$

(iii) En el límite $N \rightarrow \infty$ introduciendo la distribución de autovalores $\rho(z)$ mostrar que $\omega_N(z) \rightarrow \omega(z)$ donde

$$\int_{\gamma} \rho(z) dz = 1, \quad \omega(z) = \int_{\gamma} \frac{\rho(z')}{z - z'} dz' \rightsquigarrow \omega^2(z) - \frac{1}{\lambda} W'(z) \omega(z) = \underbrace{-\frac{1}{\lambda} \int_{\gamma} \frac{W'(z) - W'(z')}{z - z'} \rho(z') dz'}_{=R(z)} \quad (18)$$

Aquí γ es una curva en el plano complejo donde se acumulan los saddle points z_i en el límite $N \rightarrow \infty$. En el límite $N \rightarrow \infty$ la ecuación para el resolvente se vuelve algebraica, luego⁴

$$\omega(z) = \frac{1}{2\lambda} \left(W'(z) \pm \sqrt{(W'(z))^2 - 4\lambda R(z)} \right) \quad (19)$$

el signo de la raíz se ajusta para satisfacer las propiedades que siguen a continuación.

(iv) Mostrar que $\omega(z)$ satisface las siguientes propiedades:

1. $\omega(z)$ es una función analítica en el plano complejo excepto por un corte en el intervalo γ . Si $p \in \gamma$ tenemos una singularidad en $\omega(z)$ si $z = p$.
2. $\omega(z) \sim \frac{1}{z}$ si $z \rightarrow \infty$.
3. Las discontinuidad a lo largo del corte γ , usando Shokotski-Plemelj, esta determinada por la distribución

$$\omega(p + i\epsilon) - \omega(p - i\epsilon) = -2\pi i \rho(p), \quad p \in \gamma$$

y el valor medio usando el límite al continuo de (17) resulta

$$\omega(p + i\epsilon) + \omega(p - i\epsilon) = 2 \int \frac{\rho(z')}{z - z'} dz' = \frac{N}{\lambda} W'(p), \quad p \in \gamma$$

(iv) Insertando la expresión de $W(z)$ en (18) obtener

$$W'(z) = -1 + \frac{\lambda}{z} + \frac{1}{z^2}, \quad R(z) = \frac{c}{z^2} + \frac{d}{z}, \quad \text{imponiendo la condición } 2 \Rightarrow +\sqrt{\dots} \text{ en (19) y } d = -1$$

$$(W'(z))^2 - 4\lambda R(z) = \frac{1}{z^4} p_4(z) \quad \text{con } p_4(z) = z^4 + 2\lambda z^3 + (\lambda^2 - 4c\lambda - 2)z^2 + 2\lambda z + 1$$

La aparición de cuatro ceros nos da la posibilidad de soluciones con dos cortes.

(v) Busquemos la solución mas simple y que interpola con Wigner para $\lambda \rightarrow 0$. Los ceros del polinomio p_4 determinan la posición de los cortes. Proponiendo un corte ubicado sobre el círculo de radio 1 con raíces en a, \bar{a} simétricas respecto del eje real y, por simplicidad, una raíz doble en $z = -1$ (su origen es el extremo inestable del potencial $V \sim -\cos \alpha$ en $\alpha = \pi$), obtener llamando $a = e^{i\alpha_m}$

$$a + \bar{a} = 2 - 2\lambda, \quad c = \frac{\lambda}{4} - 1 \rightsquigarrow \alpha_m = 2 \arcsin \sqrt{\lambda/2}$$

A partir de

$$\omega(z) = \frac{1}{2\lambda} \left(-1 + \frac{\lambda}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1+z}{z^2} \sqrt{(z-a)(z-\bar{a})} \right)$$

obtener (16).

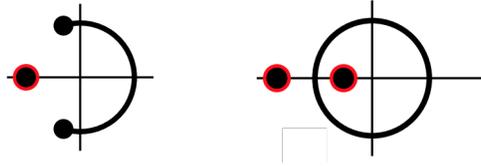


Figure 2: Posición de los cortes en el plano complejo z para el caso $\lambda < 2$ y $\lambda > 2$. En rojo aparecen los puntos de equilibrio inestable del potencial $V(\alpha)$ (ver Alvarez + Martínez Alonso + Medina).

⁴Interpretación electrostática: la repulsión logarítmica de los autovalores debida al Vandermonde puede ser interpretada como el potencial de Coulomb en 2d. Luego, la energía libre $F = -\log Z$ pasa a ser la energía electrostática de la distribución ρ en presencia del potencial externo $W(z)$: $F = \mathcal{E}[\rho] = \frac{1}{\lambda} \int_{\gamma} \rho(z) W(z) dz - \int_{\gamma} dz \int_{\gamma} dz' \rho(z) \log |z - z'| \rho(z')$. Definiendo el potencial electrostático total en z como $\Phi(z) = \frac{1}{\lambda} W(z) - \int_{\gamma} dz' \log |z - z'|^2 \rho(z')$, el campo eléctrico está dado por $E(z) = -\Phi'(z)$. La curva γ en la ecuación de saddle point (17) resulta coincidir con los puntos de equilibrio electrostático, *i.e.* donde el campo eléctrico se anula definido como $\frac{1}{2}(E(z + i\epsilon) + E(z - i\epsilon))$ (equivalentemente Φ es constante a lo largo de γ).

Relación con funciones hiperelípticas: las superficies de Calabi-Yau y teoría de cuerdas topológicas tienen una estrecha relación con la teoría de matrices (ver Mariño). Llamando $y(z) = \Phi'(z) = \frac{1}{\lambda} W'(z) - 2\omega(z)$ tenemos que la ecuación (18) que determina $\omega(z)$ se puede reescribir como $y^2(z) = \frac{1}{\lambda^2} (W'(z))^2 - \frac{4}{\lambda} R(z)$. Esto es la ecuación de una curva hiperelíptica dada por una deformación, $R(z)$, de la ecuación $y^2 = (W'(z))^2$ típica de teoría de singularidades.

(e) Mostrar que las distribuciones (15) y (16) coinciden para $\lambda = 2$.

(f) Transición de 3^{er} orden para $\lambda = 2$:

Calculando la energía libre como

$$-f^{(0)}[\lambda] = \frac{2}{\lambda} \int \rho(\alpha) \cos \alpha d\alpha + \int d\alpha \int d\alpha' \rho(\alpha) \rho(\alpha') \ln \left| \sin \frac{1}{2}(\alpha - \alpha') \right| - C$$

(f.1) Mostrar que para la normalización elegida en (11) debemos fijar $C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \ln \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|$

(f.2) Mostrar que

$$-f^{(0)}[\lambda] = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2}, & \lambda \geq 2 \\ \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda}{2} - \frac{3}{4}, & \lambda \leq 2 \end{cases}$$

(f.3) Interpretando $\lambda = T$ como la temperatura del sistema⁵, la energía del sistema se obtiene a partir de la energía libre como

$$-E(T) = -T^2 \frac{\partial F}{\partial T}$$

Calcular el calor específico

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = 2N^2 \times \begin{cases} 1/\lambda^2 & \lambda \geq 2 \\ 1/4 & \lambda \leq 2 \end{cases}$$

Si bien es continuo en $\lambda = 2$, la derivada es dicontinua \leadsto transición de 3^{er} orden

7. Método de Picard/Dyson/Lippman-Schwinger/T-order: Considerar el sistema lineal de primer orden

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A(t)\mathbf{u} \quad \text{con condición inicial} \quad \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \quad (20)$$

Para hallar la solución introducimos formalmente un parámetro ϵ que consideramos pequeño haciendo $A \rightarrow \epsilon A$. Recuperaremos la ecuación inicial al final de las manipulaciones haciendo $\epsilon = 1$.

1. Mostrar que (20) puede ser expresada en forma integral como⁶

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \epsilon \int_{t_0}^t dt' A(t') \mathbf{u}(t')$$

y que puede ser resuelta iterativamente reinsertando $\mathbf{u}(t)$ en el lado derecho obteniendo

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \epsilon \int_{t_0}^t dt' A(t') \mathbf{u}_0 + \epsilon^2 \int_{t_0}^t dt' A(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' A(t'') \mathbf{u}_0 \\ + \epsilon^3 \int_{t_0}^t dt' A(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' A(t'') \int_{t_0}^{t''} dt''' A(t''') \mathbf{u}_0 + \dots \end{aligned}$$

La solución para $\mathbf{u}(t)$ resulta entonces

$$\mathbf{u}(t) = U(t) \mathbf{u}_0$$

donde

$$U(t, t_0) = 1 + \epsilon \int_{t_0}^t dt' A(t') + \epsilon^2 \int_{t_0}^t dt' A(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' A(t'') + \epsilon^3 \int_{t_0}^t dt' A(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' A(t'') \int_{t_0}^{t''} dt''' A(t''') + \dots$$

Noten que las matrices A en esta expresión se encuentran ordenadas temporalmente: en cada término de la serie las matrices de izquierda a derecha se encuentran ordenadas de manera que sus argumentos satisfacen $t' > t'' > t''' > \dots$

2. Si las matrices conmutan para tiempos distintos $A(t)A(t') = A(t')A(t)$, mostrar que

$$\int_{t_0}^t dt' A(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' A(t'') = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' A(t') \int_{t_0}^t dt'' A(t'') = \frac{1}{2} \left(\int_{t_0}^t dt A(t) \right)^2$$

⁵Recordar las unidades de la constante de acoplamiento de gauge g en 2d.

⁶Notar que la C.I. esta incorporada en la ecuación.

y analogamente para términos de orden superior

$$\int_{t_0}^t dt_1 A(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 A(t_2) \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n A(t_n) = \frac{1}{n!} \left(\int_{t_0}^t dt A(t) \right)^n$$

Luego podemos escribir

$$U(t, t_0) = e^{\epsilon \int_{t_0}^t dt' A(t')}$$

3. Definiendo el operador de ordenamiento temporal T como

$$T[A(t)A(t')] = \begin{cases} A(t)A(t'), & t > t' \\ A(t')A(t), & t' > t \end{cases}$$

mostrar que para el caso general de matrices $A(t)$ que no conmutan a distintos tiempos, resulta

$$U(t, t_0) = T e^{\epsilon \int_{t_0}^t dt' A(t')} \quad (21)$$

Esta expresión debe ser entendida como un desarrollo en serie donde cada término debe ser ordenado temporalmente por la acción de T .

8. Lazos de Wilson y $\mathcal{N} = 4$ SYM: los lazos de Wilson $W[\mathcal{C}]$ son operadores no locales e invariantes de gauge introducidos para estudiar las propiedades de confinamiento en teorías de gauge, dependen de una curva cerrada \mathcal{C} en el espacio tiempo.

(a) Línea de Wilson: es la solución para el transporte paralelo de un campo. Sea $x^\mu(s)$ una curva abierta $\mathcal{C} : a \rightarrow b$ y $A_\mu(x) \in \mathfrak{g} = Lie(G)$ un campo de gauge definido sobre el espacio-tiempo. Mostrar que la solución para el transporte paralelo de ψ a lo largo de \mathcal{C} :

$$\text{Transporte paralelo : } \dot{x}^\mu D_\mu \psi = 0 \quad \text{con } D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu, \quad \psi(a) = \psi_0$$

se escribe usando (21) como

$$\psi(x) = W[x, a; \mathcal{C}] \psi_0 \quad \text{donde } \dot{x}^\mu D_\mu W = 0 \quad \rightsquigarrow \quad W[x, a; \mathcal{C}] = \mathcal{P} e^{i \int_a^x A_\mu(x(s)) \frac{dx^\mu}{ds} ds}$$

En la expresión para el lazo de Wilson \mathcal{P} significa que las matrices A_μ están s -ordenadas a lo largo de la curva \mathcal{C} , a.k.a. “*path ordered*”.

(b) Dado que el adjunto invierte el orden en un producto de matrices, mostrar que

$$(W[b, a; \mathcal{C}])^\dagger = W[a, b; \mathcal{C}^{-1}] \quad \Rightarrow \quad W[\mathcal{C}_{a \rightarrow b}](W[\mathcal{C}_{a \rightarrow b}])^\dagger = 1$$

aquí \mathcal{C}^{-1} denota que recorreremos la curva \mathcal{C} en sentido inverso.

(c) Mostrar que frente a transformaciones de gauge

$$\mathbf{A}(x) \rightarrow \mathbf{A}'(x) = g(x)\mathbf{A}(x)g^{-1}(x) + ig(x)\mathbf{d}g^{-1}(x) \quad \rightsquigarrow \quad D'_\mu = gD_\mu g^{-1}$$

la línea de Wilson transforma como

$$\mathcal{P} e^{i \int_{\mathcal{C}} \mathbf{A}} \rightarrow \mathcal{P} e^{i \int_{\mathcal{C}} \mathbf{A}'} = g(x) \cdot \mathcal{P} e^{i \int_{\mathcal{C}} \mathbf{A}} \cdot g^{-1}(a) \quad (22)$$

Notemos que la línea de Wilson abierta no es invariante gauge!!

—

Historia: la línea de Wilson fue introducida por Schwinger (1959) para obtener una corriente invariante de gauge al hacer point splitting. $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ es invariante de gauge frente a $\psi(x) \rightarrow g(x)\psi(x)$ y $\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)g^{-1}(x)$, sin embargo, la regularización $\bar{\psi}(x + \frac{\epsilon}{2})\gamma^\mu\psi(x - \frac{\epsilon}{2})$ no lo es pues $g^{-1}(x + \frac{\epsilon}{2})g(x - \frac{\epsilon}{2}) \neq 1$, introduciendo $W_\epsilon(x) = W[x + \frac{\epsilon}{2}, x - \frac{\epsilon}{2}]$ la corriente $j_\epsilon^\mu(x) = \bar{\psi}(x + \frac{\epsilon}{2})W_\epsilon(x)\gamma^\mu\psi(x - \frac{\epsilon}{2})$, en virtud de (22), resulta invariante de gauge.

—

(d) Lazos de Wilson: concluir que si la curva \mathcal{C} es cerrada es decir los puntos inicial y final coinciden ($x = a$), tomando la traza en (22) obtenemos un objeto invariante de gauge

$$\text{Lazo de Wilson : } W[\mathcal{C}] = \text{Tr } \mathcal{P} e^{i \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A}}$$

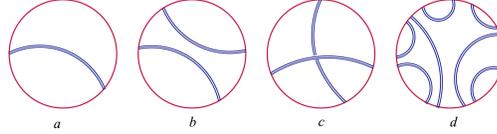
(e) $\mathcal{N} = 4$ SYM en el límite planar: en el contexto supersimétrico los lazos de Wilson involucran acoplamientos $\vec{n}(s)$ a los campos escalares $\vec{\phi} \in \mathbb{R}^6$ a lo largo de \mathcal{C} . Luego

$$\text{Lazo de Wilson supersimétrico : } \quad W[\mathcal{C}, \vec{n}] = \frac{1}{N} \text{Tr} \mathcal{P} e^{\oint_{\mathcal{C}} (iA_{\mu} \dot{x}^{\mu} + |\dot{x}| \vec{n} \cdot \vec{\phi}) ds}$$

Mostrar que el término $2n$ del desarrollo para un lazo circular toma la forma

$$\frac{1}{N} \int_0^{2\pi} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{2n-1}} d\tau_{2n} \text{Tr} \left[\left\langle (i\dot{x}^{\mu}(\tau_1)A_{\mu}(\tau_1) + \vec{n}(\tau_1) \cdot \vec{\phi}(\tau_1)) \dots (i\dot{x}^{\mu}(\tau_{2n})A_{\mu}(\tau_{2n}) + \vec{n}(\tau_{2n}) \cdot \vec{\phi}(\tau_{2n})) \right\rangle \right]$$

Notemos que el término es una traza simple.



(f) Analizar la dependencia en N de los diagramas tipo arcoiris de la figura, correspondientes a una teoría libre, pensando que contrajimos los propagadores del ítem anterior con

$$\langle (iA_{\mu} \dot{x}^{\mu} + \vec{n} \cdot \vec{\phi})_{\tau_1}^a \dots (iA_{\mu} \dot{x}^{\mu} + \vec{n} \cdot \vec{\phi})_{\tau_2}^c \rangle = \delta_d^a \delta_b^c \left(\frac{g_{YM}}{4\pi} \right)^2$$

El análisis involucra el factor $\frac{1}{N}$ de normalización del lazo de Wilson, un factor N por cada loop (usar notación de doble línea) y un factor g_{YM}^2 por cada propagador. Concluir que en el límite N -grande, definiendo el acoplamiento de 't Hooft $\lambda = g_{YM}^2 N$, la contribución dominante proviene de los diagramas planares, esto es:

$$(a) : \frac{1}{N} \times N^2 \times g_{YM}^2 = \lambda, \quad (b) : \frac{1}{N} \times N^3 \times (g_{YM}^2)^2 = \lambda^2$$

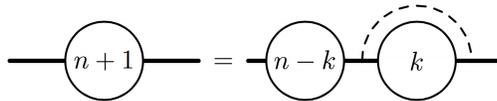
$$(c) : \frac{1}{N} \times N \times (g_{YM}^2)^2 = \frac{\lambda^2}{N^2}, \quad (d) : \frac{1}{N} \times N^8 \times (g_{YM}^2)^7 = \lambda^7$$

(g) La contribución al término $2n$ para todos los diagramas planares es la misma y resulta entonces

$$\frac{(\lambda/4)^n}{2n!} \times N_n$$

donde $2n!$ viene de las integrales sobre τ_i y N_n es el número de diagramas planares con n líneas internas.

(h) Debemos ahora contar el número de diagramas con n propagadores. Para esto notamos que todo diagrama con $n + 1$ propagadores se puede descomponer unívocamente como



De manera que el número de diagramas N_{n+1} satisface la relación de recurrencia

$$N_{n+1} = \sum_{k=0}^n N_{n-k} N_k$$

con $N_0 = 1$. Construyendo la función generatriz mostrar que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} N_n z^n \rightsquigarrow z f^2(z) = f(z) - 1 \rightsquigarrow f(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}$$

Concluir entonces que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n!}{(n+1)!n!} z^n \rightsquigarrow N_n = \frac{2n!}{(n+1)!n!}$$

Finalmente, en el límite planar,

$$\langle \mathbb{W}[\mathbb{O}] \rangle_{N \rightarrow \infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{2^{2n}(n+1)!n!} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} I_1(\sqrt{\lambda}) \quad (23)$$

(i) Mostrar que (23), obtenida en el límite N -grande, se obtiene asimismo a partir de la teoría de matrices hermiticas Gaussianas como

$$\langle \mathbb{W}[\mathbb{O}] \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} e^M \right\rangle_{M.M.} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int [dM] \frac{1}{N} \text{Tr} e^M \exp \left(-\frac{2}{g_{YM}^2} \text{Tr} M^2 \right)$$

donde

$$\mathcal{Z} = \int [dM] \exp \left(-\frac{2}{g_{YM}^2} \text{Tr} M^2 \right)$$

Reobtener (23) empleando la distribución de Wigner obtenida en clase.

REFERENCIAS

- S Coleman, *Aspects of symmetry*, Ch 8, CUP.
A Polyakov, *Gauge fields and Strings*, Ch. 8,
JM Maldacena, *TASI 2019*, Lecture I y IV.
M Mariño, *Instantons and Large N*, App C, CUP
S Sachdev, *Quantum phase transitions*, Ch 11, Springer.
E Brézin + C Itzykson + G Parisi + JB Zuber, *Planar diagrams*, Comm.Math.Phys. **59** (1978) 35.
G Livan + M Novaes + P Vivo, *Introduction to Random Matrices Theory and Practice*, arXiv:1712.07903.
GW Gibbons + CN Pope, $\mathbb{C}P^2$ as a gravitational instanton, Comm.Math.Phys. **61** (1978) 239
DJ Gross + E Witten, *Possible Third Order Phase Transition in the Large N Lattice Gauge Theory*,
Phys.Rev.**D21** (1980) 446.
G Alvarez + L Martínez Alonso + E Medina, *Complex saddles in the Gross-Witten-Wadia matrix model*
Phys.Rev.**D94** (2016) 105010, arXiv: 1610.09948.
SR Wadia, *A Study of U(N) Lattice Gauge Theory in 2-dimensions*, arXiv:1212.2906
D Harlow, *Wormholes, Emergent Gauge Fields, and the Weak Gravity Conjecture*, arXiv: 1510.07911
G Semenoff + K Zarembo, *Wilson loops in SYM theory: from weak to strong coupling*, hep-th/0202156.
K Zarembo, *Localization and AdS/CFT Correspondence*, arXiv:1608.02963