

Parte IV: Supersimetría

v3 2020/07/10

*“It is interesting to note that there are no weakly coupled scalar particles in nature, scalar particles are the only kind of free particles whose mass does not break either an internal or a gauge symmetry. This discussion can be summarized by saying that mass or symmetry breaking terms must be ‘protected’ from large corrections at large momenta due to various interactions (electromagnetic, weak or strong).*

*A symmetry-breaking term [...] is protected if, in the renormalization-group equation the right-hand side is proportional to [the coupling constant of the term]”.*

*K Wilson 1971.*

NOTACIÓN Y CONVENCIONES

3+1

Espinores: el álgebra de Lorentz se descompone como  $so(3, 1) \sim su_{\mathbb{C}}(2) \times \overline{su_{\mathbb{C}}(2)} \sim sl(2, \mathbb{C})$ , si permitimos combinaciones complejas de los generadores<sup>1</sup>. Las irreps se denotan  $(n, m)$ , en términos de dos semienteros  $n, m \in 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$  que determinan las propiedades de transformación respecto de cada uno de los  $su(2)$ 's. El número de índices sin/con puntos de un tensor irreducible será  $2n$  y  $2m$ . Los tensores serán totalmente simétricos en los  $2n$  índices (idem los  $2m$  punteados).

- Espinor de Dirac  $\Psi$ : es reducible en componentes quirales  $P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R$$

- Índices sin punto:  $\alpha, \beta, \dots = 1, 2$  denotan las componentes de  $\Psi_L$ , una representación  $(\frac{1}{2}, 0)$  (ver pr.2):

$$\Psi_L = P_+ \Psi = \psi_{\alpha}$$

- Índices punteados:  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dots = 1, 2$  denotan las componentes de  $\Psi_R$ , la representación<sup>2</sup> $(0, \frac{1}{2})$  (ver pr.2):

$$\Psi_R = P_- \Psi = \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$$

- Conjugación compleja: la conjugación compleja de  $(\frac{1}{2}, 0)$  transforma como una irrep  $(0, \frac{1}{2})$ <sup>3</sup>. Denotamos,

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) : (\psi_{\alpha})^* \equiv \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \qquad \left(0, \frac{1}{2}\right) : (\bar{\psi}^{\dot{\alpha}})^* \equiv \psi^{\alpha}$$

Técnicamente,  $(\frac{1}{2}, 0) = \mathbf{2}$  y  $(0, \frac{1}{2}) = \bar{\mathbf{2}}$  son irreps inequivalentes de  $SL(2, \mathbb{C})$ , pero relacionadas por conjugación compleja (ver pr.2).

- Matrices de Dirac. Convención de signatura:

$$\{\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\} = 2\eta_{\mu\nu} \quad \text{con} \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+ - - -)$$

- Representación quiral/Weyl:

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{\mu} = (\mathbb{I}_2, \vec{\sigma}) \quad \bar{\sigma}^{\mu} = (\mathbb{I}_2, -\vec{\sigma}). \tag{1}$$

$$\sigma^{\mu} \text{ has undotted - dotted indices : } (\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}$$

$$\bar{\sigma}^{\mu} \text{ has dotted - undotted indices : } (\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}$$

<sup>1</sup>El isomorfismo es  $SO(3, 1) \simeq SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$

<sup>2</sup>Dot+Bar es redundante, pero es costumbre usarlos para evitar errores.

<sup>3</sup>Esto es evidente notando que los generadores  $J_i^{\pm}$  de  $su_{\mathbb{C}}(2)$  son conjugados complejos uno del otro.

- Matriz quiral:

$$\gamma^5 \equiv -\frac{i}{4!} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta = i\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

- Generadores de Lorentz espinoriales: son diagonales en la base quiral haciendo manifiesta la reducibilidad del espinor de Dirac

$$\Sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4} [\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu], \quad \bar{\sigma}^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4} [\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu]$$

Satisfacen las relaciones de traza

$$\text{tr } \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}) + \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

y las relaciones de auto-dualidad (cf.(17))

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \sigma_{\rho\sigma}, \quad \bar{\sigma}^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\sigma}_{\rho\sigma}.$$

- Notación de van der Waerden: bajo una transformación de Lorentz  $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$  donde  $\Lambda(\omega) = e^{\omega^\mu{}_\nu}$  tenemos que  $\Psi$  transforma según<sup>4</sup>

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \mathcal{S}(\omega)\Psi, \quad \text{where } \mathcal{S}(\omega) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}}. \quad (4)$$

Denotando

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$$

de (3) vemos que  $\mathcal{S}(\omega) = \begin{pmatrix} S(\omega) & 0 \\ 0 & \bar{S}(\omega) \end{pmatrix}$ . Luego  $\chi$  y  $\bar{\xi}$  transforman independientemente,

$$\psi'_\alpha = (S(\omega))_\alpha{}^\beta \psi_\beta \quad \text{con } S(\omega) = \left( e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}} \right)_\alpha{}^\beta \quad \text{y} \quad \bar{\xi}'^{\dot{\alpha}} = (\bar{S}(\omega))^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \quad \text{con } \bar{S}(\omega) = \left( e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu}} \right)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \quad (5)$$

Un espinor de Dirac contiene dos espinores de Weyl de quiralidades opuestas  $\psi^{(L),(R)}$ .

En estas expresiones  $S, \bar{S} \in SL(2, \mathbb{C})$  y se relacionan como  $\sigma^2 S^*(\omega) = \bar{S}(\omega) \sigma^2$  (ver pr.2).

- Métrica en notación de van der Waerden

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma^2, \quad \epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma^2 \quad (6)$$

Sus inversas se definen como

$$\epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma, \quad \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\gamma}}$$

Subimos y bajamos índices con el tensor  $\epsilon$  *sumando sobre el segundo índice*

$$\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \psi_\beta \quad \psi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \psi^\beta \quad (7)$$

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\psi}_{\dot{\beta}} \quad \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}} \quad (8)$$

- $\sigma^\mu$  y  $\bar{\sigma}^\mu$  se relacionan via el tensor  $\epsilon$

$$(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon^{\beta\alpha} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} = (\sigma^\mu)^{\beta\dot{\alpha}}, \quad (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} = \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} = (\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{\beta}\alpha} \quad (9)$$

<sup>4</sup>Sobre *campos*, la transformación de Lorentz actúa como (Wigner):  $\psi'^a(x) = D[\Lambda]^a{}_b \psi^b(\Lambda^{-1}x)$  for  $x' = \Lambda x$ .

## LOS FERMIONES TIENEN CARÁCTER GRASSMANN

- Invariantes de Lorentz:

.  $(\frac{1}{2}, 0)$ : índices sin punto se contraen North West  $\rightarrow$  South East:

$$\begin{aligned}\psi\chi &\equiv \psi^\alpha\chi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\psi^\alpha\chi^\beta \\ &= -\epsilon_{\alpha\beta}\chi^\beta\psi^\alpha = -\psi_\alpha\chi^\alpha = \chi^\alpha\psi_\alpha = \chi\psi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi\chi = \chi\psi}\end{aligned}\quad (10)$$

En la primera línea usamos la definición (7), en la segunda el carácter Grassmann de los espinores.

.  $(0, \frac{1}{2})$ : para índice punteados usamos South West  $\rightarrow$  North East convention:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\bar{\chi} &\equiv \bar{\psi}_\alpha\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}_\alpha\bar{\chi}_{\dot{\beta}} \\ &= -\bar{\psi}^{\dot{\beta}}\bar{\chi}_{\dot{\beta}} = \bar{\chi}_{\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}} = \bar{\chi}\bar{\psi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\chi}\bar{\psi}}\end{aligned}\quad (11)$$

Es usual denotar

$$\psi^2 \equiv \psi^\alpha\psi_\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta\psi_\alpha \quad \text{and} \quad \bar{\psi}^2 \equiv \bar{\psi}_\alpha\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$$

**La contracción de  $\psi_\alpha$  consigo mismo usando un tensor antisimétrico es cero si los objetos conmutan. La contracción  $\psi^2$  resulta no nula en virtud del carácter Grassmann de  $\psi$ .**

- Conjugación compleja: la operación  $*$  intercambia el orden de los espinores (no sign appears)

$$(\chi_\alpha\psi_\beta)^* \equiv \bar{\psi}_\beta\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \quad (12)$$

por supus que todo número complejo es conjugado por la operación  $*$ . Las definiciones (10),(11) y (12) fueron hechas para que

$$(\chi\psi)^* = (\chi^\alpha\psi_\alpha)^* = (\psi_\alpha)^*(\chi^\alpha)^* = \bar{\psi}_\alpha\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\chi}\bar{\psi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(\chi\psi)^* = \bar{\chi}\bar{\psi}}$$

y la consistencia demanda que (cf. (6))

$$(\epsilon_{\alpha\beta})^* = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$$

- Vectores a partir de bilineales fermiónicos: la posición de los índices en las matrices  $\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\mu$  es

$$\chi\sigma^\mu\bar{\psi} \equiv \chi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}, \quad \bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\psi \equiv \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}\psi_\alpha$$

De la hermiticidad de  $\sigma^\mu \rightsquigarrow (\sigma^\mu)^* = (\sigma^\mu)^T$  tenemos

$$\boxed{(\chi\sigma^\mu\bar{\psi})^* = \psi\sigma^\mu\bar{\chi}}$$

- Relaciones de completitud:

$$\text{tr } \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\gamma}\delta} = 2\delta_\alpha^\delta\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\gamma}} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} &= 2\eta^{\mu\nu}\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}, & \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\sigma^\rho &= (\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\omega} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\omega} + \eta^{\nu\rho}\eta^{\mu\omega})\sigma_\omega - i\varepsilon^{\mu\nu\rho\omega}\sigma_\omega \\ (\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} &= 2\eta^{\mu\nu}\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}, & \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\sigma}^\rho &= (\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\omega} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\omega} + \eta^{\nu\rho}\eta^{\mu\omega})\bar{\sigma}_\omega + i\varepsilon^{\mu\nu\rho\omega}\bar{\sigma}_\omega\end{aligned}$$

- Matriz de conjugación de carga: para la representación quiral (1) tenemos

$$(\gamma^0)^T = \gamma^0, \quad (\gamma^1)^T = -\gamma^1, \quad (\gamma^2)^T = \gamma^2, \quad (\gamma^3)^T = -\gamma^3.$$

Elegimos a  $C$  unitaria, de manera que

$$C\gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T \implies C = -i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} \epsilon^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix}, \quad \text{luego} \quad C = -C^T, \quad CC^\dagger = 1$$

En 3 + 1 dimensiones  $(C\gamma^\mu)^T = C\gamma^\mu$  es simétrica.

- Matriz de conjugación de Dirac: la elección de la fase en la matriz  $\beta$  es

$$\beta\gamma^\mu\beta^{-1} = (\gamma^\mu)^\dagger \rightsquigarrow \boxed{\beta = -\gamma^0}$$

## Problemas

### 1. Transformación quirial, espinores no-masivos y helicidad:

(i) Mostrar que el término cinético para un fermión de Dirac,  $\bar{\Psi}i\cancel{\partial}\Psi$ , es invariante frente a

$$\begin{aligned} \text{Transformación vectorial } U_V(1) : \quad \Psi &\rightarrow \Psi' = e^{i\alpha}\Psi \\ \text{Transformación quirial/axial } U_A(1) : \quad \Psi &\rightarrow \Psi' = e^{i\beta\gamma^5}\Psi \end{aligned} \quad (14)$$

donde  $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$  y  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$  ver (2). Mostrar que el término de masa  $m\bar{\Psi}\Psi$  es invariante frente a  $U_V(1)$  pero no lo es frente a  $U_A(1)$  siendo  $m\bar{\Psi}\Psi \rightarrow m\bar{\Psi}e^{i2\beta\gamma^5}\Psi \rightsquigarrow$  simetría  $U_A(1)$  impide masa

(ii) Mostrar que un fermión quirial/Weyl no puede tener masa

( $\bar{\Psi}_L\Psi_L = \overline{P_+\Psi_L}P_+\Psi_L = \bar{\Psi}_L P_- P_+\Psi_L = 0$ ). Por otra parte, el término cinético,  $\bar{\Psi}_L i\cancel{\partial}\Psi_L$  es no nulo.

(iii) Considerar la ecuación de Dirac  $(i\cancel{\partial} - m)\Psi = 0$  en espacio de momentos

$$E\Psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)\Psi \quad (15)$$

para la representación *quirial*

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix}$$

Escribiendo  $\Psi = \begin{pmatrix} \psi^{(L)} \\ \chi^{(R)} \end{pmatrix}$  mostrar que (15) toma la forma

$$\begin{aligned} (E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\psi^{(L)} &= m\chi^{(R)} \\ (E + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi^{(R)} &= m\psi^{(L)} \end{aligned} \quad (16)$$

Los términos de masa mezclan las componentes quirales de un fermión de Dirac.

En a base quirial, las transformaciones (14) se reducen a

$$\begin{aligned} U_V(1) : \quad \psi^{(L)} &\rightarrow \psi^{(L)'} = e^{i\alpha}\psi^{(L)}, \quad \chi^{(R)} \rightarrow \chi^{(R)'} = e^{i\alpha}\chi^{(R)} \\ U_A(1) : \quad \psi^{(L)} &\rightarrow \psi^{(L)'} = e^{i\beta}\psi^{(L)}, \quad \chi^{(R)} \rightarrow \chi^{(R)'} = e^{-i\beta}\chi^{(R)} \end{aligned}$$

Luego, las componentes  $L, R$  tienen cargas opuestas bajo  $U_A(1) \rightsquigarrow$  lados derecho e izquierdo de (16) transforman distinto  $\rightsquigarrow$  massive Dirac eqn es no invariante bajo  $U_A(1)$ .

(iii) Considerar el límite  $m \rightarrow 0$  de (16). Teniendo en cuenta que  $E \rightarrow |\mathbf{p}|$ , (16) se reducen a

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}|)\psi^{(L)} = \psi^{(L)} \quad \text{y} \quad (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}|)\chi^{(R)} = -\chi^{(R)}$$

Concluimos que las componentes  $L, R$  de  $\Psi$  son autoestados con  $h = \pm\frac{1}{2}$  del operador de helicidad<sup>5</sup>: proyección del spin en la dirección de movimiento.

### 2. Left y Right Weyl spinors: (i) Hemos definido que $(\frac{1}{2}, 0)$ transforma con $\sigma^{\mu\nu}$ y $(0, \frac{1}{2})$ transforma con $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$ . A partir que $\sigma^2\sigma^{\mu*} = \bar{\sigma}^\mu\sigma^2$ concluir que (cf. (5))

$$\text{si } \psi^{(L)} \in (\frac{1}{2}, 0) \Rightarrow \epsilon\psi^* \in (0, \frac{1}{2}), \quad \text{donde } \epsilon = i\sigma^2 \rightsquigarrow \sigma^2 S^*(\omega) = \bar{S}(\omega)\sigma^2$$

Upper/lower índices se introducen para dar cuenta de esta última propiedad. Podemos entonces reducir el número de componentes independientes de un espinor de Dirac diciendo que la componente de abajo  $\chi^{(R)} = \epsilon(\psi^{(L)})^* \rightsquigarrow$  Espinor de Majorana!

(ii) Mostrar que el lagrangiano libre

$$\mathcal{L} = i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi - \frac{1}{2}m(\xi\xi + \xi^\dagger \xi^\dagger)$$

describe un fermión de Majorana. Si bien un fermión de Majorana es compatible con  $U_A(1)$ , un término de masa la rompe ( $\Psi \rightarrow e^{i\beta\gamma^5}\Psi$  es equivalente a  $\xi \rightarrow e^{i\beta}\xi, \bar{\xi} \rightarrow e^{-i\beta}\bar{\xi}$ ).

<sup>5</sup>Reordemos que el operador de espín  $\mathbf{s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$

3. Tensores de Lorentz:

(i) Mostrar que  $\epsilon_{\alpha\beta}$  es un tensor invariante frente al grupo de Lorentz.

(ii) Es posible encontrar en la literatura que  $\bar{\sigma}^\mu$  se define subiendo los índices de  $\sigma^\mu$ . Mostrar que

$$(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} \equiv \epsilon^{\dot{\alpha}\beta} \epsilon^{\beta\alpha} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}.$$

(iii) Mostrar que  $(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} \equiv \epsilon_{\beta\gamma} (\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}{}^\gamma$  es una matriz simétrica

$$(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = (\sigma^{\mu\nu})_{\beta\alpha}$$

4. Fierz rearrangements:

(i) A partir de (13) mostrar que el producto tensorial de dos fermiones de Weyl Left- y Right- se puede reexpresar como

$$\psi_\alpha \bar{\chi}_{\dot{\beta}} = \frac{1}{2} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} (\psi \sigma_\mu \bar{\chi})$$

esto hace explícita la descomposición

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

En particular, Fierz nos proporciona

$$(\phi \psi) \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \frac{1}{2} (\phi \sigma^\mu \bar{\chi}) (\psi \sigma_\mu)_{\dot{\alpha}}$$

(ii) Sean dos espinores del mismo carácter  $\psi_\alpha \chi_\beta$ : el conjunto de matrices para descomponerlos es  $\epsilon_{\alpha\beta}$  y  $(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta}$ . La primera es antisimétrica, la segunda es simétrica. Mostrar que

$$\psi_\alpha \chi_\beta = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} (\psi \chi) + \frac{1}{2} (\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} (\psi \sigma_{\mu\nu} \chi)$$

El producto de dos espinores de carácter similar se descompone en dos irreps:

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) = (0, 0) \oplus (1, 0)$$

un escalar y un 2-tensor antisimétrico auto-dual. La propiedad de auto-dualidad de  $\sigma^{\mu\nu}$  nos dice que solo hay tres componentes independientes en la irrep  $(1, 0)$ . De esta manera el número de g.l del lado izquierdo coincide con el del lado derecho.

5. Full Fierz: la idea es reexpresar productos de bilineales fermiónicos cambiando de ordenan los fermiones, *i.e.*

$$(\bar{\psi}_1 A \psi_2) (\bar{\psi}_3 B \psi_4) = (\bar{\psi}_1 M \psi_4) (\bar{\psi}_3 N \psi_2)$$

Consideremos en 4 dimensiones el conjunto de 16 matrices

$$\Gamma^A = \{\mathbb{I}_4, \gamma^\mu, i\gamma^{\mu\nu}, \gamma^\mu \gamma^5, \gamma^5\}$$

donde  $\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ .

i. Mostrar las siguientes propiedades:

(a)  $(\Gamma^A)^2 = \pm \mathbb{I}_4 \quad \forall A$  (sin suma)

(b)  $\forall \Gamma^A$  ( $\Gamma^A \neq \mathbb{I}_4$ ) existe  $\Gamma^B$  tal que<sup>6</sup>  $\Gamma^A \Gamma^B = -\Gamma^B \Gamma^A \Rightarrow \boxed{\text{Tr}(\Gamma^A) = 0 \quad \forall \Gamma^A \neq \mathbb{I}_4}$

(c) Para todo par  $(\Gamma^A, \Gamma^B)$  con  $A \neq B$  existe  $\Gamma^C \neq \mathbb{I}_4$  tal que  $\overline{\Gamma^A \Gamma^B} = \Gamma^C$  a menos de un factor  $\pm 1$  o  $\pm i$ .

(d) Concluir que el conjunto es linealmente independiente  $\rightsquigarrow$  constituyen una base para el espacio de matrices complejas<sup>7</sup>  $4 \times 4$ .

<sup>6</sup>La demostración sigue de  $\text{Tr}(\Gamma^A (\Gamma^B)^2) = -\text{Tr}(\Gamma^B \Gamma^A \Gamma^B) = -\text{Tr}((\Gamma^B)^2 \Gamma^A)$  dado que  $(\Gamma^B)^2 = \pm \mathbb{I}_4$  resulta  $\text{Tr}(\Gamma^A) = 0$ . En la segunda igualdad usamos la existencia de  $\Gamma^B$  anticonmutante, en la última igualdad la ciclicidad de la traza.

<sup>7</sup>Construyendo la combinación  $\sum_A \lambda_A \Gamma^A = 0$  multiplicando por  $\Gamma^A$  y tomando traza  $\rightsquigarrow \lambda_A = 0$ .

ii. Sea  $\Gamma_A = (\Gamma^A)^{-1}$  construimos

$$\Gamma_A = \{\mathbb{I}_4, \gamma_\mu, i\gamma_{\mu\nu}, \gamma^5\gamma_\mu, \gamma^5\}$$

Mostrar que

(a)  $\frac{1}{4}\text{Tr}(\Gamma^A\Gamma_B) = \delta_B^A$

(b) Luego para toda matriz  $\Gamma$  de  $4 \times 4$  tenemos

$$\Gamma = \sum_A c_A \Gamma^A \quad \text{donde} \quad c_A = \frac{1}{4}\text{Tr}(\Gamma_A\Gamma)$$

en componentes

$$\Gamma^a{}_b = \frac{1}{4} \sum_A \Gamma^m{}_n(\Gamma_A)^n{}_m(\Gamma^A)^a{}_b$$

Dado que  $\Gamma$  es arbitraria, eligiendo  $\Gamma^a{}_b = \delta_i^a \delta_b^j$  obtener la relación de completitud

$$\delta_i^a \delta_b^j = \frac{1}{4} \sum_A (\Gamma_A)^j{}_i (\Gamma^A)^a{}_b$$

Esta relación y la relación de traza del item (a) son análogas a (13) en el contexto de bispinores donde consideramos 4 matrices  $(\Gamma^A)_{\alpha\dot{\alpha}} = \{\sigma^\mu\}$ . Análogamente, considerar las 4 matrices  $(\Gamma^A)_{\alpha\beta} = \{\mathbb{I}_2, \sigma^{\mu\nu}\}$  y confrontar con el pr.4.ii.

(iv) A partir de lo anterior mostrar, asumiendo fermiones Grassmann,

$$\Phi^a \bar{\Psi}_b = -\frac{1}{4} \sum_A (\bar{\Psi}\Gamma_A\Phi) (\Gamma^A)^a{}_b$$

Con esta expresión mostrar que

$$(\bar{\Psi}_1\Psi_2)(\bar{\Psi}_3\Psi_4) = -\frac{1}{4} \sum_A (\bar{\Psi}_1\Gamma_A\Psi_4) (\bar{\Psi}_3\Gamma^A\Psi_2)$$

6. Gamma gymnastics: probar las siguientes identidades ( $\Sigma^{\mu\nu}$  definida en (3))

$$\begin{aligned} \gamma^\mu\gamma^\nu &= 2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho &= \eta^{\mu\nu}\gamma^\rho - \eta^{\mu\rho}\gamma^\nu + \eta^{\nu\rho}\gamma^\mu - i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^5\gamma_\sigma \\ \Sigma^{\mu\nu}\gamma^\rho &= \frac{i}{2}(\gamma^\mu\eta^{\nu\rho} - \gamma^\nu\eta^{\mu\rho}) + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^5\gamma_\sigma \end{aligned}$$

$$\Sigma^{\mu\nu}\gamma^\rho = -\gamma^\rho\Sigma^{\mu\nu} + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^5\gamma_\sigma, \quad [\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = i(\gamma^\mu\eta^{\nu\rho} - \gamma^\nu\eta^{\mu\rho})$$

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^5\Sigma_{\rho\sigma}, \quad (\Sigma^{\mu\nu})^\dagger = \beta\Sigma^{\mu\nu}\beta^{-1}, \quad (\Sigma^{\mu\nu})^T = -C\Sigma^{\mu\nu}C^{-1} \quad (17)$$

7. Autodualidad en signatura Lorentziana: mostrar que  $F_{\mu\nu} = \pm\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$  es inconsistente en signatura Lorentziana y consistente en 4+0 dimensiones (instantones sólo existen en Euclídeo)<sup>8</sup>.

8. Espinor de Majorana: se define como aquel para el que los conjugados de Dirac y Majorana coinciden

$$\text{Fermión Majorana : } \bar{\Psi}_D = \bar{\Psi}_M, \quad \text{donde } \bar{\Psi}_D = \Psi^\dagger\beta \quad \text{and} \quad \bar{\Psi}_M = \Psi^T C \quad (18)$$

(i) Covarianza: Mostrar, usando (17), que

$$\Psi'(x') = \mathcal{S}(\omega)\Psi(x) \quad \Rightarrow \quad \bar{\Psi}'(x') = \bar{\Psi}(x)\mathcal{S}^{-1}(\omega) \quad \text{tanto para } \bar{\Psi} = \bar{\Psi}_D, \bar{\Psi}_M \quad (19)$$

<sup>8</sup>Agregando una  $i$  en la expresión de self-/antiself-dual field  $F_{\mu\nu} = \pm\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$  sea consistente en 3+1.

Luego, puesto que los conjugados de Dirac and Majorana transforman de la misma manera, la condición de Majorana es covariante de Lorentz. Asimismo de (19) resulta que  $\bar{\Psi}\Psi$  es invariante de Lorentz cuando el espinor barrado es tanto el conjugado de Majorana como el de Dirac.

(ii) Mostrar que en la representación quiral un espinor de Majorana toma la forma  $\Psi_M = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$ .

(iii) Mostrar, *usando el carácter Grassmann*, que un espinor de Majorana  $\Psi$  no puede tener carga,

$$j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = 0 \quad \text{si } \Psi \text{ es Majorana}$$

En otras palabras, un espinor de Majorana es neutro, no es sorprendente entonces que resulte “real”!! En concordancia mostrar que la transformación  $U_V(1) \Psi \rightarrow e^{i\alpha}\Psi$  es inconsistente con la condición de Majorana. Notar que  $U_A(1)$  sí es consistente con (18), pero solo si el fermión es no masivo (ver pr. 2)

(iv) Mostrar que para fermiones de Majorana  $\Psi, \chi$  resulta

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\xi = -\bar{\xi}\gamma^\mu\Psi$$

Ayuda: puede resultar útil usar la convención del footnote 9 y el hecho de que  $(C\gamma^\mu)_{ab}$  es simétrica en 3+1.

9. Coleman-Mandula à la Witten: considerar el choque elástico de dos partículas idénticas de spin-0, masa  $m$  y 4-momentos  $p, p'$  en el sistema centro de masa. Asumiendo un parámetro de impacto no nulo  $\mathbf{b}$  mostrar que la conservación de la energía y momento angular deja indeterminado el ángulo de dispersión  $\theta$ . En otras palabras, los momentos salientes  $q, q'$  quedan determinados a menos de un ángulo arbitrario entre  $\mathbf{p}$  and  $\mathbf{q}$  en el plano determinado por  $\mathbf{p}, \mathbf{b}$ .

Suponer ahora la existencia de una carga tensorial simétrica de traza nula  $Q_{\mu\nu}$  conservada en el choque. La invarianza de Lorentz implica que

$$\langle p|Q_{\mu\nu}|p\rangle = \alpha \left[ p_\mu p_\nu - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}p^2 \right]$$

para estados de 1-partícula  $|p\rangle$  con  $\alpha$  una constante que solo puede depender de  $p^2 = m^2$ . Asumiendo que  $Q_{\mu\nu}$  es la integral de una densidad de carga, la carga total  $Q_{\mu\nu}$  de dos partículas muy separadas será la suma de las  $Q_{\mu\nu}$  individuales. A partir de este hecho, mostrar que la conservación de  $Q_{\mu\nu}$  solo permite dispersión hacia adelante ( $\theta = 0$ ) o hacia atrás ( $\theta = \pi$ )  $\rightsquigarrow$  la amplitud es no analítica en  $\theta$ .

10. Propiedades de la matriz de conjugación de carga:

(i) Simetría: mostrar que  $[C^T C^{-1}, \gamma_\mu] = 0$ . De  $[X, \gamma_\mu] = 0, \forall \mu \Rightarrow X \sim I$ , concluir que

$$C^T = sC \quad \text{con } s = \pm 1$$

(ii) Consistencia: en dimensión arbitraria y signatura mostly + definimos el espinor de Majorana como

$$\text{Espinor de Majorana : } \Psi^\dagger \gamma_0 = \Psi^T C$$

Conjugando esta ecuación y masajeando derivar la relación de consistencia

$$(\gamma_0)^*(C^{-1})^*\gamma_0 = C$$

Dado que podemos elegir  $C$  para que sea unitaria y que  $C^T = sC$  del item (i), tenemos  $(C^{-1})^* = sC$ . Insertando arriba obtener

$$\text{Condición de consistencia para } \exists \text{ espinores de Majorana : } \boxed{s = -1} \Rightarrow C^T = -C$$

11. Superálgebras de Poincaré: (i) Para matrices  $B, F_1, F_2, F_3$  verificar las super Jacobi identities

$$\begin{aligned} [B, \{F_1, F_2\}] - \{F_2, [B, F_1]\} + \{F_1, [F_2, B]\} &= 0 \\ [F_1, \{F_2, F_3\}] + [F_3, \{F_1, F_2\}] + [F_2, \{F_3, F_1\}] &= 0 \end{aligned}$$

(ii) Mostrar que si bien  $[P_\mu, Q_\alpha] = a \sigma_{\mu\alpha\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$  es correcto tensorialmente, sJacobi  $P, P, Q$  implica  $a = 0$ .

(iii) Asimismo  $\{Q_\alpha, Q_\beta\} = b \sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta} M_{\mu\nu}$  sería posible, sin embargo de  $P, Q, Q$  concluir que  $b = 0$ .

12. Representación de Majorana en 3+1: considerar convención mostly plus en 3+1. Una representación real de las  $\gamma$ 's es

$$\gamma^0 = -i\sigma^2 \otimes \mathbb{I}_2, \quad \gamma^1 = \sigma^3 \otimes \sigma^1, \quad \gamma^2 = \sigma^3 \otimes \sigma^3, \quad \gamma^3 = \sigma^1 \otimes \mathbb{I}_2,$$

En esta representación los fermiones son reales, en toda representación de Majorana tenemos que  $C = \gamma^0$ . El álgebra susy con cargas  $Q = Q^a$  Majorana se puede escribir como<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} \{Q_a, Q_b\} &= 2(\gamma^0 \gamma_\mu)_{ab} P^\mu \\ &= 2\delta_{ab} H + 2(\gamma^0 \gamma_i)_{ab} P^i \end{aligned}$$

(en este caso omitimos la barra del espinor conjugado pues es redundante si el índice  $a$  es explícito). Considerando  $P^\mu$  timelike y asumiendo que existe un estado invariante bajo una de las cargas  $Q_a$  mostrar que entonces es preservado por todas. Analizar el caso nulo.

13. Pauli-Ljubanski y Little group: hallar el álgebra satisfecha por el vector de Pauli-Ljubanski

$$W_\mu \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma} \quad \rightsquigarrow \quad [W_\mu, W_\nu] = i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\rho W^\sigma$$

Concluir, eligiendo un frame apropiado para  $P^\mu$ , que el little group definido por las componentes de  $W_\mu$  resulta:  $so(3)$  para el caso masivo y  $iso(2)$  para el no masivo.

14. Casimires de sPoincare: sean  $\mathcal{C}_1 = P^2$  y  $\mathcal{C}_2 = W^2$  con  $W_\mu$  el vector de Pauli Ljubanski.  $\mathcal{C}_1$  es un buen Casimir para sPoincare, pero  $\mathcal{C}_2$  no lo es ya que no conmuta con  $Q_\alpha$ . Mostrar que  $\tilde{\mathcal{C}}_2 = C_{\mu\nu} C^{\mu\nu}$ , donde  $C_{\mu\nu} = B_\mu P_\nu - B_\nu P_\mu$  con  $B_\mu = W_\mu - \frac{1}{4} \bar{Q} \bar{\sigma}_\mu Q$  es el Casimir apropiado para sPoincare.

15. Susy extendida: mostrar que las combinaciones

$$a_\alpha = \frac{1}{2} (Q_\alpha^1 + \epsilon_{\alpha\beta} (Q_\beta^2)^\dagger), \quad b_\alpha = \frac{1}{2} (Q_\alpha^1 - \epsilon_{\alpha\beta} (Q_\beta^2)^\dagger)$$

reescriben el álgebra  $\mathcal{N} = 2^{10}$

$$\{Q_\alpha^I, \bar{Q}_{\dot{\beta}J}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu \delta_J^I, \quad \{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\} = 2\sqrt{2} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{IJ} Z, \quad \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}I}, \bar{Q}_{\dot{\beta}J}\} = 2\sqrt{2} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon_{IJ} Z$$

como

$$\{a_\alpha^I, a_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta} (M + \sqrt{2}Z), \quad \{b_\alpha^I, b_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta} (M - \sqrt{2}Z)$$

al elegir el sistema centro masa.

16. Mostrar que:

(i)

$$\epsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} = -\frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}$$

(ii)

$$(\theta \sigma^\mu \bar{\theta})(\theta \sigma^\nu \bar{\theta}) = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \theta^2 \bar{\theta}^2$$

17. Operadores diferenciales y Susy: mostrar que los generadores

$$iQ_\alpha = \partial_\alpha - i(\sigma^\mu \bar{\theta})_\alpha \partial_\mu, \quad i\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i(\theta \sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu$$

satisfacen

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu. \quad (20)$$

Para

$$D_\alpha = \partial_\alpha + i(\sigma^\mu \bar{\theta})_\alpha \partial_\mu, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i(\theta \sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu$$

<sup>9</sup>Nuestra notación para los fermiones de 4 componentes es  $\Psi = \Psi^a$ ,  $\gamma^\mu = (\gamma^\mu)^a_b$ ,  $C = C_{ab}$ ,  $\bar{\Psi} = \Psi^T C$  con  $\bar{\Psi} = \Psi_a$ . Índice abajo significa espinor barrado.

<sup>10</sup>La carga central se puede hacer real,  $Z \in \mathbb{R}$ , mediante una rotación quiral de las supercargas:  $Q_\alpha \rightarrow e^{i\phi} Q_\alpha$  y  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}} \rightarrow e^{-i\phi} \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ .

mostrar que

$$\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = -2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu \quad (21)$$

Asimismo, mostrar que los dos conjuntos son mutuamente conmutantes

$$[D, Q] = [\bar{D}, Q] = \dots = 0$$

**Nota:** aparecerá un molesto signo menos. Para comprender su origen ver Wess y Bagger p.26 arriba y Figueroa-O'Farrill Lectures [hep-th/0109172](#) final del App. A3. El cambio de signo entre los rhs de (20) y (21) es el estandar para Left y Right invariant vector fields ver Práctica 1.

18. Susy gauge fields:

(i) Mostrar que  $W_\alpha$  es un supercampo quiral.

(ii) Hallar las leyes de transformación bajo susy para las componentes del supercampo de curvatura

$$W_\alpha(y) = -i\lambda_\alpha(y) + \theta_\alpha D(y) - \frac{i}{2}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \theta)_\alpha F_{\mu\nu}(y) + \theta^2(\not{\partial}\bar{\lambda}(y))_\alpha.$$

**Ayuda:** la cuenta es muy fácil en coordenadas quirales.

(iii) Hallar la componente  $\theta^2$  de  $W^2$  y chequear que se obtienen los términos cinéticos apropiados para la acción de sMaxwell.

(iv) A partir de las transformaciones susy de (ii) mostrar, sin usar las eom, que el lagrangiano obtenido es invariante a menos de un término de borde.

19. Algebras (Anti-)de Sitter y Susy: las álgebras de Sitter y anti-de Sitter se caracterizan por el hecho de que las traslaciones conmutan para dar los generadores de Lorentz

$$[P_\mu, P_\nu] = \mp \frac{1}{L^2} M_{\mu\nu} \quad \mu, \nu = 0, \dots, d-1 \quad (22)$$

aquí

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} + \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho}, \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(- + + + \dots) \quad (23)$$

$$[M_{\rho\sigma}, P_\mu] = P_\rho \eta_{\sigma\mu} - P_\sigma \eta_{\rho\mu}$$

Los signos  $\mp$  en (22) corresponden a las álgebras  $dS_d$  y  $AdS_d$  respectivamente ( $so(1, d)$  y  $so(2, d-1)$ ) donde  $L$  es la escala característica (radio de curvatura)<sup>11</sup>.

(i) Mostrar que sólo el álgebra  $AdS$  puede ser supersimetrizada: considerar la situación mas simple asumiendo una carga Majorana  $Q^a$ . El ansatz para el superálgebra es, basándonos en análisis dimensional,

$$[P_\mu, Q^a] = \frac{a_1}{L} (\gamma_\mu Q)^a, \quad [M_{\mu\nu}, Q^a] = a_2 (\gamma_{\mu\nu} Q)^a$$

$$\{Q_a, Q_b\} = a_3 (C\gamma^\mu)_{ab} P_\mu + \frac{a_4}{L} (C\gamma^{\mu\nu})_{ab} M_{\mu\nu}$$

La identidad de Jacobi  $[M, M, Q]$  impone  $a_2 = -\frac{1}{2}$ , esta normalización es la necesaria para que  $Q$  transforme como una representación spinorial<sup>12</sup>. Calcular Jacobi con  $[P, P, Q]$  y concluir que solo puede ser satisfecha si elegimos el signo  $+$  en (22), esto es  $[P, P] = +M$ . Asimismo, impone  $|a_1| = \frac{1}{2}$ .

(ii) Inönu-Wigner: contraer el superálgebra  $AdS$  del item anterior haciendo  $L \rightarrow \infty$  y recuperar sPoincare  $\mathcal{N} = 1$ .

20. Ausencia de mass renormalization. Holomorphicity: la idea es mostrar con un ejemplo la ausencia de renormalización (infinita) a la masa de los campos quirales:

*En susy solo hay wave function renormalization.*

<sup>11</sup>Una vez fijado el signo del conmutador en el rhs de  $[M, M]$  en (23), el signo en (22) resulta relevante.

<sup>12</sup>Concomitantemente mostrar que  $M_{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$  satisface (23).

Esta propiedad es bienvenida para resolver el problema de jerarquías: una vez establecidas las escalas EW y GUT a tree level, estas no son destruídas por correcciones radiativas.

(i) Correcciones a la masa (del Higgs): El propagador inverso para un campo escalar libre  $\phi$  es

$$(G_0(p))^{-1} = i(p^2 - m_H^2)$$

La corrección debida a un loop de fermiones de masa  $M$ , debida a un acoplamiento de Yukawa  $\mathcal{L}_{int} = \lambda \bar{\Psi} \Psi \phi$ , modificará el propagador del campo escalar

$$(G_0(p))^{-1} \rightarrow (G(p))^{-1} = i(p^2 - m_H^2 + \Sigma(p)), \quad \Sigma(p) = \lambda^2 \Sigma^{(2)}(p) + \lambda^4 \Sigma^{(4)}(p) + \dots$$

Mostrar que a segundo orden en  $\lambda$  poniendo un cutoff UV  $\Lambda$  en las integrales de momento se obtiene

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)}(0) &= \text{Diagrama: un círculo con flechas en sentido horario, conectado a dos líneas horizontales de puntos que representan Higgs.} \\ &= \int^{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{k^2 - M^2} + \frac{2M^2}{(k^2 - M^2)^2} \right] \sim \Lambda^2 + M^2 \log \frac{\Lambda}{M} \end{aligned} \quad (24)$$

En la lógica de teorías efectivas, si  $\Lambda \sim M_{Pl} \rightsquigarrow \delta m_H^2 \sim \Lambda^2 \approx 10^{30} m_H^2$ . En ausencia de una simetría que proteja  $m_H = 0$ , las correcciones naturalmente son del orden de la escala del cutoff. Este es el problema de jerarquías, una masa pequeña para el Higgs es inestable frente a correcciones grandes dadas por la escala de alta energía (cutoff). Si empleamos regularización dimensional, no aparecerán las divergencias cuadráticas, pero en cualquier caso, la existencia de una partícula masiva mas pesada que el Higgs ( $M \gg m_H$ ) resultará en una corrección  $\delta m_H^2 \propto M^2$  que desestabilizará  $m_H^2$ . En otras palabras, si  $M$  es muy grande, sus efectos en el modelo estándar no se desacoplan, sino que hacen que sea muy difícil entender por qué  $m_H^2$  es tan pequeña. Como veremos a continuación en una teoría supersimétrica el loop de fermiones va acompañado por un loop bosónico y la contribución total resulta nula!

*“Si el bosón de Higgs es una partícula fundamental, y existe nueva física por encima de la escala de electrodébil, entonces tenemos dos opciones: o bien debemos hacer la suposición bastante extraña de que no existen partículas pesadas que se acoplen al campo escalar de Higgs (ni indirectamente ni muy débilmente), o de lo contrario existe una cancelación bastante llamativa entre las diversas contribuciones a  $\delta m_H^2$ . Esta cancelación solo puede ser provocada por el tipo de conspiración que los físicos conocemos con el nombre de simetría. Esta simetría se conoce como Supersimetría.”*

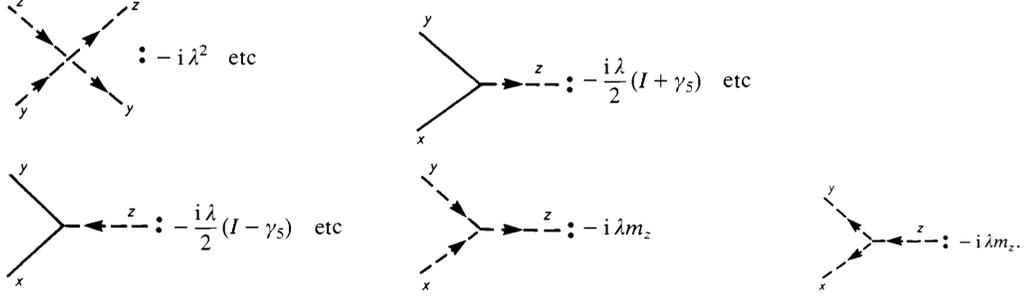
(ii) Consideremos un modelo con tres supercampos quirales  $\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z$ , los primeros dos no masivos y el último con una masa grande  $m_z$ . Como vimos en el item anterior, en modelos no supersimétricos esperamos que se induzcan correcciones a las masas de  $\Phi_x, \Phi_y$  donde  $\delta m_{x,y}^2 \sim m_z^2$  (segundo término de arriba, regularizando con DRED)<sup>13</sup>. Mostraremos que esto no sucede en un modelo supersimétrico.

Considerar el superpotencial  $\mathcal{W}[\Phi_i] = \lambda \Phi_x \Phi_y \Phi_z + m_z \Phi_z \Phi_z$ . Resolver los campos auxiliares y hallar

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_\mu \phi_x^\dagger \partial_\mu \phi_x + \partial_\mu \phi_y^\dagger \partial_\mu \phi_y + \partial_\mu \phi_z^\dagger \partial_\mu \phi_z - m_z^2 \phi_z^\dagger \phi_z + \frac{i}{2} \bar{\Psi}_x \not{\partial} \Psi_x + \frac{i}{2} \bar{\Psi}_y \not{\partial} \Psi_y + \frac{1}{2} \bar{\Psi}_z (i \not{\partial} - m_z) \Psi_z \\ &\quad - \lambda m_z (\phi_x^\dagger \phi_y^\dagger \phi_z + \phi_x \phi_y \phi_z^\dagger) - \lambda^2 (\phi_y^\dagger \phi_y \phi_z^\dagger \phi_z + \phi_x^\dagger \phi_x \phi_z^\dagger \phi_z + \phi_x^\dagger \phi_x \phi_y^\dagger \phi_y) - \frac{\lambda}{2} (\bar{\Psi}_x \Psi_y - \bar{\Psi}_x \gamma^5 \Psi_y) \phi_z \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} (\bar{\Psi}_x \Psi_y + \bar{\Psi}_x \gamma^5 \Psi_y) \phi_z^\dagger - \frac{\lambda}{2} (\bar{\Psi}_x \Psi_z - \bar{\Psi}_x \gamma^5 \Psi_z) \phi_y - \frac{\lambda}{2} (\bar{\Psi}_x \Psi_z + \bar{\Psi}_x \gamma^5 \Psi_z) \phi_y^\dagger \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} (\bar{\Psi}_y \Psi_z - \bar{\Psi}_y \gamma^5 \Psi_z) \phi_x - \frac{\lambda}{2} (\bar{\Psi}_y \Psi_z + \bar{\Psi}_y \gamma^5 \Psi_z) \phi_x^\dagger \end{aligned} \quad (25)$$

Denotando con trazos y flechas los campos escalares complejos y con líneas continuas los fermiones de Majorana, los vértices resultan

<sup>13</sup>La regularización de modelos supersimétricos es delicada. DREG (regularización dimensional) con sustracción mínima  $\overline{MS}$  falla porque al trabajar en  $d = 4 - \epsilon$  violamos la supersimetría del lagrangiano. La regularización empleada en el contexto susy es DRED (reducción dimensional) con  $\overline{DR}$ , consiste en que todo el álgebra de matrices gamma se realiza en cuatro dimensiones, pero las integrales de momento se calculan en  $d = 4 - \epsilon$  dimensiones. De cualquier manera, esta regularización presenta problemas de ambigüedades a órdenes mas altos.



(iii) Analizar las contribuciones a la autoenergía  $\Sigma(p)$  del campo  $\phi_x$  (corrección de masa) que dependen de  $m_z$ . Mostrar que las contribuciones relevantes para momento entrante  $p = 0$  resultan

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} &= \lambda^2 \int \frac{d^{2\omega} q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{q^2 - m_z^2}, & \text{Diagram 2} &= \lambda^2 m_z^2 \int \frac{d^{2\omega} q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{q^2(q^2 - m_z^2)}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 3} &= -\frac{\lambda^2}{4} \int \frac{d^{2\omega} q}{(2\pi)^{2\omega}} \text{Tr} \left( (1 + \gamma^5) \frac{1}{\not{q}} (1 - \gamma^5) \frac{1}{\not{q} - m_z} \right) \\
 &= -2\lambda^2 \int \frac{d^{2\omega} q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{q^2 - m_z^2}
 \end{aligned} \tag{26}$$

Calculando las trazas de matrices gamma en  $d = 4$  y luego expresando las integrales en momento en  $d = 2\omega$  dimensiones (DRED renormalization) tenemos

$$\Sigma(0)|_{m_z} = \text{suma de diagramas} = -\lambda^2 \int \frac{d^{2\omega} q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{q^2} = 0$$

La cancelación total resulta de regularización dimensional para la integral cuadráticamente divergente. Concluimos entonces que no existe corrección a la masa  $m_x^2$  proporcional a  $m_z^2$ . La cancelación provino de un ajuste muy preciso entre las constantes de acoplamiento de los términos de Yukawa y de los términos  $\phi^3$  y  $\phi^4$ .

**Moral:** ajustando el número de bosones y fermiones se cancelan las divergencias cuadráticas. Cuando las masas de fermiones y bosones no coinciden ( $m_f^2 = m_b^2 + \Delta^2$ ) rompemos supersimetría explícitamente, y el setup se conoce como soft susy breaking. Como consecuencia obtendremos que  $\Sigma \sim \Delta^2$  (sólo la divergencia logarítmica sobrevive). La corrección resultará aceptable si  $\Delta \sim \Lambda_{EW}$ , fenomenológicamente esto sugiere un escala de rompimiento de SUSY,  $M_{SUSY} \sim 1TeV$ .

**Nota:** Es importante recordar que la corrección a la masa del fermión en QED es proporcional a la masa del fermión y divergente como  $\delta m_f \sim m_f \log \Lambda$ . La razón de que la corrección no dependa linealmente en el cutoff  $\Lambda$ , que sería posible dimensionalmente, se debe a que las teorías de fermiones no masivos presentan simetría quiral, asumiendo que la misma no esta rota a nivel cuántico, tenemos entonces que no pueden aparecer correcciones a la masa del fermión. Al introducir un términos de masa para el fermión,  $m_f \bar{\Psi}\Psi$ , rompemos la simetría quiral. De manera que para fermiones masivos podemos tener una corrección cuántica a la masa pero esta debe ser proporcional al término que rompe la simetría ya que debe desaparecer si  $m_f = 0$ . Concluimos entonces que solo pueden ser logarítmica en el cutoff  $\delta m_f \sim m_f \log \frac{\Lambda}{m_f}$ . Un argumento similar basado en simetría de gauge impide que el foton adquiera masa.

---

## Referencias

JH Park, *Lecture note on Clifford algebra*.

A Van Proeyen, *Tools for supersymmetry*, [hep-th/9910030](#).

J Wess and J Bagger, *Supersymmetry and supergravity*, Princeton, USA (1992).

JD Lykken, *Introduction to supersymmetry*, [hep-th/9612114](#).

S Krippendorf, F Quevedo and O Schlotterer, *Cambridge Lectures on Supersymmetry and Extra Dimensions*,  
arXiv: 1011.1491

D Bailin and A Love, *Supersymmetric gauge field theory and string theory*, IOP (1994).

E Corson, *Introduction to tensors spinors and relativistic wave equations*, Blackie (1955).

I Aitchison, *Supersymmetry in particle physics*, CUP (2007).

P Binetruy, *Supersymmetry: Theory, Experiment and Cosmology*, OUP (2006).

P Ramond, *Field Theory: A modern primer*, Frontiers in Physics.

I Buchbinder and S Kuzenko, *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity*, IOP (1998).