Práctica 1

1. Calcule el potencial de las siguientes distribuciones de carga:

   (i) Una carga puntual.

   (ii) Un alambre infinito con densidad lineal de carga homogénea.

   (iii) Un plano con densidad superficial de carga homogénea.

   Compare el uso de la ley de Coulomb y de la ley de Gauss. Observe con atención los resultados de (i), (ii) y (iii) ¿se atreve a generalizarlos?

2. ¿Qué cree usted, puede el electromagnetismo explicar la estabilidad de la materia? Estudie la siguiente situación en el mayor detalle que le sea posible.

   Coloque una carga puntual en cada uno de los vértices de un cuadrado. Muestre que una carga de prueba del mismo signo colocada en el centro del cuadrado está en equilibrio estable frente a pequeños desplazamientos en el plano del cuadrado pero inestable frente a desplazamientos normales al plano. ¿Qué sucede si colocamos otras dos cargas en el eje normal al cuadrado, a ambos lados del mismo?

   Muestre que, en general, el potencial electrostático no posee puntos de equilibrio estable.

3. Demuestre las siguientes propiedades[1]:

   (i) $\vec{V} = \vec{\nabla}\phi \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$

   (ii) $\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$

   (iii) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}$

   ¿Valen las recíprocas de (i) y (ii)? No es fácil encontrar contraejemplos pero vale la pena intentarlo.

[1] Esto el Papa exclamó al firmar la bula
con que furioso excomulgó a Lutero:
La divergencia de un rotor es nula
y el rotor de un gradiente es siempre cero.
El gran fraile alemán invocó a dios
y exclamó con su habitual vehemencia:
El rotor de un rotor mas nabla dos
da el gradiente de toda divergencia.
Enrique Loedel Palumbo

La función δ de Dirac

4. Verifique $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \delta(x)$ para las siguientes funciones. Grafíquelas.

$$\text{(i) } f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } |x| < \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2n} \end{cases} \qquad \text{(ii) } f_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\, e^{-nx^2} \qquad \text{(iii) } f_n(x) = \frac{n}{\pi}\,\frac{1}{1+n^2x^2}$$

5. Justifique las siguientes propiedades:

   (i) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi(x)\, \delta'(x-a) = -\phi'(a)$

   (ii) Si los ceros x_i de $\phi(x)$ son simples $\to \delta(\phi(x)) = \sum_i \frac{1}{|\phi'(x_i)|}\, \delta(x - x_i)$

6. Escriba $\delta^{(3)}(\vec{r})$ en coordenadas esféricas y en coordenadas cilíndricas.

7. Muestre que el campo eléctrico de una carga puntual –dado por la ley de Coulomb– satisface la primera ecuación de Maxwell. Muestre que recíprocamente y bajo ciertas condiciones esta es la única solución.

8. Exprese la densidad de carga de las siguientes distribuciones:

   (i) Cuatro cargas puntuales localizadas en los vértices de un cuadrado.
   (ii) Un dipolo eléctrico de momento dipolar $\vec{p}$.
   (iii) Un alambre infinito con densidad lineal de carga homogénea.
   (iv) Un disco uniformemente cargado.
   (v) Un anillo uniformemente cargado y de sección transversal despreciable.

9. Resuelva la ecuación de Poisson para cada una de las distribuciones del ejercicio anterior y grafique el campo eléctrico en todo el espacio. En aquellos casos en que no pueda resolver las integrales, no abandone el problema, calcule el potencial en puntos especiales y estudie límites particulares. Por ejemplo, calcule el potencial del caso (iv) en el eje del disco; le será útil más adelante. Otro ejemplo, ¿puede obtenerse el potencial en (v) a partir del resultado en (iv)?

"Procurad también que, leyendo vuestra historia, el melancólico se mueva a risa, el risueño la acreciente, el simple no se enfade, el discreto se admire de la invención, el grave no la desprecie, ni el prudente deje de alabarla."
