Electromagnetismo II – Curso 2025

Práctica 1: Ecuaciones de Maxwell

1. Muestre que las ecuaciones de Maxwell implican la conservación local de la carga.

2. (a) Una onda plana incide en forma normal sobre una pantalla perfectamente absorbente. Use la ley de conservación del impulso lineal para mostrar que la presión de radiación ejercida sobre la pantalla es igual a la energía del campo por unidad de volumen.

   (b) ¿Cómo se modifica el resultado obtenido para la presión de radiación si la pantalla posee una cierta reflectancia?.

3. Muestre que una onda plana polarizada linealmente puede escribirse como la combinación lineal de dos ondas polarizadas circularmente de igual amplitud y helicidad opuesta.

4. Un paquete unidimensional de ondas planas aproximadamente monocromático tiene la forma instantánea $u(x;0) = f(x)e^{ik_0x}$. Calcule el espectro del número de onda del paquete, $|A(k)|^2$, grafique esquemáticamente $|u(x;0)|^2$ y $|A(k)|^2$, obtenga las desviaciones medias cuadráticas Δx y Δk (en términos de las intensidades $|u(x;0)|^2$ y $|A(k)|^2$) y evalúe la desigualdad $\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$ para las siguientes elecciones de la función $f(x)$:

   (a) $f(x) = Ne^{-\alpha|x|/2}$
   (b) $f(x) = Ne^{-\alpha^2x^2/4}$
   (c) $f(x) = N(1-\alpha|x|)\Theta(1-\alpha|x|)$
   (d) $f(x) = N\Theta(a-|x|)$

5. Una onda electromagnética plana, linealmente polarizada, de frecuencia angular ω incide normalmente, desde el espacio libre, en la superficie plana de un medio no permeable de conductividad σ y constante dieléctrica ϵ^r.

   (a) Calcule la amplitud y la fase de la onda reflejada relativa a la onda incidente para σ y ϵ^r arbitrarios.

   (b) Discuta el resultado anterior en los casos límites de muy buen conductor y muy mal conductor. Demuestre que para un buen conductor la reflectancia es aproximadamente:

$$R \approx 1 - 2\frac{\omega}{c}\delta,$$

   donde δ es la longitud de penetración pelicular.

6. (a) Demostrar que la ecuación de onda en una dimensión

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

   tiene la solución general de D'Alambert

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2}f(t-x/v) + \frac{1}{2}f(t+x/v) + \frac{v}{2}\int_{t-x/v}^{t+x/v} g(t')dt'$$

   donde las condiciones de contorno están especificadas por los valores de ψ y de $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ en $x=0$ para todo tiempo:

$$\psi(0,t) = f(t) \qquad ; \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}(0,t) = g(t).$$

(b) Obtenga la solución correspondiente a las condiciones iniciales:

$$\psi(x,0) = f(x) \qquad ; \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,0) = g(x).$$

7. Verifique que las condiciones de gauge de Lorenz, Coulomb, temporal y axial desacoplan las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas. Muestre que pueden elegirse potenciales que satisfagan alguna de estas condiciones; determine en cada caso la simetría de gauge remanente y las ecuaciones que satisfacen los potenciales.

8. (a) Obtener la función de Green de la ecuación de Poisson en 3 dimensiones.

   (b) Obtener la función de Green de la ecuación:

   $$(-\nabla^2 + m^2)\,\phi = \rho,$$

   con ∇^2 el operador laplaciano en tres dimensiones.

   (c) Obtener las diferentes funciones de Green (retardada y avanzada) de la ecuación:

   $$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = -4\pi\rho.$$

9. Una antena lineal delgada de longitud d es excitada de tal modo que la corriente sinusoidal hace una longitud de onda completa de oscilación. Suponiendo que $r \gg d$:

   (a) Calcule exactamente la potencia radiada por unidad de ángulo sólido.

   (b) Usando el resultado anterior obtenga la potencia radiada por unidad de ánguo sólido en la zona lejana ($r \gg \lambda \gg d$) y dibuje la distribución angular de la radiación. Calcule la potencia total radiada.

   (c) Usando nuevamente el resultado del inciso (a) obtenga la potencia radiada por unidad de ángulo sólido en el caso en que la antena tiene exactamente una longitud de onda de largo. Calcule la potencia total radiada y obtenga un valor numérico para la resistencia de radiación.

10. Trate ahora el problema anterior mediante el método de desarrollo multipolar.

    (a) Calcule los momentos multipolares (dipolo eléctrico, dipolo magnético y cuadrupolo eléctrico).

    (b) Calcule la distribución angular de la potencia radiada por el multipolo de menor orden no nulo.

    (c) Especialice el resultado del inciso anterior para la zona lejana ($r \gg \lambda \gg d$) y compare con el resultado obtenido en el ejercicio anterior.

    (d) Especialice el resultado obtenido en (a) para el caso de antena con un largo igual a la longitud de onda. Compare con lo obtenido en el ejercicio anterior, calcule la potencia total radiada y la correspondiente resistencia de radiación. ¿Es el resultado consistente con la potencia total calculada en el ejercicio anterior?.