

Electromagnetismo II – Curso 2025

Práctica 2: Invariancia Relativista.

- (a) Si usa la convención de unidades $c = 1$, seleccione las unidades fundamentales de la mecánica y determine las dimensiones de las siguientes magnitudes: longitud, tiempo, intervalo, masa, velocidad, impulso, aceleración, fuerza y energía.
(b) Repita el análisis anterior para unidades naturales, $\hbar = c = 1$.
(c) Si usando $c = 1$ encuentra una longitud $l = 5s$, convierta l a metros. Convierta también la energía $E = 10^{-20}$ g a eV.
- Con las constantes fundamentales de naturaleza $G = 6.674 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$, $c = 2.998 \times 10^8 \frac{m}{s}$, $\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \frac{kg m^2}{s}$ y $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$, construir magnitudes que tengan unidades de masa, tiempo, longitud, energía y temperatura. (Lo que construirán, es la famosa escala de Planck. Estos números representan escalas en las cuales los efectos de la gravedad cuántica relativista pueden ser importantes).
- Probar que el el intervalo espacio-temporal es invariante frente a una transformación de Lorentz en una dirección.
- Considérese un tren que se mueve con velocidad v en movimiento uniforme rectilíneo con respecto al andén de una estación. Un pasajero en el tren \mathcal{O}' dispone de un reloj de luz, que consiste en dos espejos colocados uno encima del otro a una altura d y un pulso de luz que viaja continuamente entre los dos espejos. Por lo tanto, \mathcal{O}' medirá el tiempo $\Delta t'$ que tarda la luz en subir y bajar entre los dos espejos. Un observador \mathcal{O} en el andén verá este mismo fenómeno de manera distinta: para él la luz sale del espejo de abajo, pero llega al espejo de arriba después de un tiempo $\Delta t/2$ cuando el tren se ha desplazado una distancia $v\Delta t/2$ y otra vez al espejo de abajo después de un tiempo total $\Delta t/2$ cuando el tren se ha desplazado una distancia total $v\Delta t/2$ (véase Fig. 1, siendo Δt el tiempo transcurrido desde que el pulso sale del espejo hasta que vuelve al mismo). Para \mathcal{O} , la luz recorre una trayectoria más larga y, dado que la velocidad de la luz es la misma que para el pasajero, habrá pasado más tiempo entre que la luz sale y llega otra vez al espejo inferior.

Encuentre la relación entre los tiempos medidos por \mathcal{O} y \mathcal{O}' .

- Considere un sistema de referencia \mathcal{S} fijo y otro \mathcal{S}' que se mueve a velocidad constante respecto a \mathcal{S} .
(a) Considere una varilla a lo largo del eje x y en reposo respecto a un sistema \mathcal{S} . Como está en reposo, las coordenadas de posición de sus extremos x_1 y x_2 son independientes del tiempo. En consecuencia,

$$L_0 = x_2 - x_1$$

es la *longitud en reposo* o *longitud propia* de la varilla. Determine la longitud de esta varilla respecto del sistema \mathcal{S}' .

- (b) Suponga ahora una varilla dispuesta a lo largo del eje x' y en reposo respecto al sistema \mathcal{S}' . Por la misma razón que el inciso anterior

$$L_0 = x'_2 - x'_1 \quad (1)$$

es la *longitud en reposo* o *longitud propia* de la varilla. Determine la longitud de la varilla respecto del sistema \mathcal{S} .

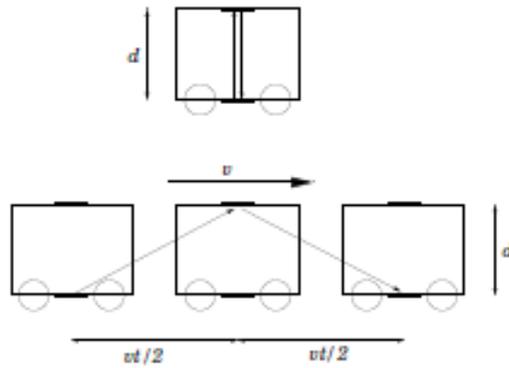


Figure 1: El reloj de luz en un tren en movimiento visto por un observador \mathcal{O}' dentro del tren (arriba) y un observador \mathcal{O} en el andén (abajo).

- (c) Discuta los resultados obtenidos y muestre gráficamente, en un diagrama ct vs x según \mathcal{S} , la relación entre las longitudes de la varilla medidas por \mathcal{S} y \mathcal{S}' en los casos de los incisos (a) y (b).
6. Una regla de longitud L está en reposo en un sistema en el cual está orientada a un ángulo θ con respecto al eje x . ¿Cuáles son la longitud L' y orientación θ' medidas por un observador moviéndose a velocidad \vec{v} paralela al eje x con respecto al primer sistema?
 7. Considere un cohete que se mueve con velocidad \vec{v} con respecto a un dado sistema, que llamaremos el laboratorio. El cohete emite un pulso de luz a ángulos polar θ' y azimutal ϕ' con respecto a la dirección de \vec{v} .
 - (a) ¿Cuál es la dirección angular del pulso en el sistema del laboratorio?
 - (b) Considere una partícula en reposo en el sistema del cohete, que emite luz uniformemente en todas las direcciones. Muestre que la luz que en el sistema del cohete se emite hacia el hemisferio delantero será vista desde el laboratorio concentrada en un cono hacia adelante con eje en la dirección de movimiento.
 8. A las doce del mediodía una nave espacial pasa frente a la Tierra a una velocidad de $0.8c$. Los tripulantes de la nave sincronizan sus relojes con los terrestres disponiéndolos en la hora 12:00.
 - (a) A las 12:30 según un reloj situado en la nave, ésta pasa por delante de una estación interplanetaria que se encuentra en reposo relativo a la Tierra y cuyos relojes señalan el tiempo de la Tierra. ¿Qué hora es en la estación?
 - (b) ¿Cuál es la distancia propia entre la Tierra y la estación?
 - (c) A las 12:30 hora de la nave se establece comunicación con la Tierra desde la nave. ¿Cuál es la hora de la Tierra cuando se recibe la señal?
 - (d) Si desde la Tierra se contesta inmediatamente, ¿a qué hora de la nave se recibirá la respuesta?.
 9. Un tren debe atravesar un puente a velocidad relativista. Una persona ha colocado bombas en los extremos del puente, que hace estallar simultáneamente (observa la explosión desde afuera) cuando ve al tren ocupar exactamente la longitud del puente. Un pasajero del tren, advertido del atentado, verá al puente contraerse, por lo que se ubica en el primer vagón y espera pasar

el puente a salvo. Describa con precisión la posición y tiempo de las explosiones vistas desde el tren, y diga si el pasajero pasa antes de que ocurra la explosión.

10. Un sistema de coordenadas \mathcal{O}' se mueve a velocidad \vec{v} relativa a otro sistema \mathcal{O} . En \mathcal{O}' una partícula tiene velocidad \vec{u}' y aceleración \vec{a}' . Encuentre la ley de transformación de Lorentz para aceleraciones, y muestre que en el sistema \mathcal{O} las componentes de la aceleración paralela y perpendicular a \vec{v} son

$$\vec{a}_{\parallel} = \gamma^{-3} \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2} \right)^{-3} \vec{a}'_{\parallel} ,$$

$$\vec{a}_{\perp} = \gamma^{-2} \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2} \right)^{-3} \left(\vec{a}'_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c^2} \times (\vec{a}' \times \vec{u}') \right) .$$

11. Considere la siguiente afirmación: La Relatividad tiene que estar mal. Si una barra de 20 m transportada en la dirección de su longitud por un corredor, tan rápido que la misma parece tener 10 m en el sistema de laboratorio, en algún instante entraría enteramente en una habitación de 10 m de longitud. Observe la situación desde el punto de vista del corredor: para él la habitación parece contraída a la mitad de su longitud. ¿Cómo puede una barra de 20 m caber en una habitación de 5 m? Explique como la Relatividad trata a la barra y a la habitación sin contradicción. Para aclarar la paradoja, haga un diagrama espacio-temporal en cada uno de los sistemas, indicando eventos relevantes y líneas de simultaneidad en cada caso.
12. Un tren que mide 100 m circula a la increíble velocidad de $\sqrt{3}/2$ veces la velocidad de la luz. El tren pasa por una estación cuyo andén mide 50 m y posee pasos a nivel con barreras a ambos extremos. El jefe de estación, que se encuentra en el extremo del andén por el que entra el tren, hace subir la barrera que hay a su lado y hace bajar la barrera del otro extremo en el mismo instante en que la cola del tren pasa frente a él. ¿Corren algún peligro las personas que intenten cruzar la vía por los pasos a nivel mientras la barreras estén subidas? Obviamente, la conclusión no puede depender del observador ¿Cómo es la película de los acontecimientos según el jefe de estación? ¿Y según el maquinista del tren?
13. En su cumpleaños número 21, una gemela se sube a una cinta transportadora que se desplaza a una velocidad $\frac{4}{5}c$ respecto de la tierra y es llevada a una estrella lejana X , mientras que su hermano gemelo permanece en la tierra. Cuando la gemela viajera alcanza la estrella X inmediatamente salta a una cinta transportadora de regreso a la tierra, que nuevamente se desplaza a una velocidad $\frac{4}{5}c$, y llega a la tierra en su cumpleaños número 39 según su reloj.
- (a) ¿Cuál es la edad del gemelo que quedó en tierra?
- (b) ¿Cuál es la distancia a la estrella X según el gemelo en tierra?
- (c) Suponga dos sistemas de referencia inerciales, uno S' solidario a la cinta que se aleja y otro S'' solidario a la cinta que se acerca. Siendo el sistema fijo a la tierra S , los tres sistemas sincronizan sus relojes de tal forma que $x = x' = x'' = 0$, $t = t' = t'' = 0$ al momento de la partida.
- (i) ¿Cuales son las coordenadas (x, t) del salto de una cinta a la otra según S ?
- (ii) ¿Cuales son las coordenadas (x', t') del salto según S' ?
- (iii) ¿Cuales son las coordenadas (x'', t'') del salto según S'' ?
- (d) Si la gemela viajera quisiera que su reloj coincidiera con el reloj en S'' , ¿Cómo debería recalibrarlo? Si así lo hace, ¿Cuá sería su lectura al regresar a la tierra?.

(e) Si se le hace la siguiente pregunta a la gemela viajera: *¿cuál es la edad de tu hermano ahora?*, ¿qué respondería ella?:

(i) justo antes de que haga el salto de una cinta a la otra.

(ii) justo después de saltar.

(f) ¿Cuántos años terrestres toma el viaje de vuelta según ella? Sume este tiempo a la respuesta dada en (ii) del inciso anterior para determinar que edad ella espera que tenga su hermano al reunirse. Compare con la respuesta dada en (a).

(g) Visualice los eventos utilizados en los incisos (e) y (f) en un diagrama espacio-temporal según S .

14. Considere los rayos de luz emitidos por una estrella que alcanzan la tierra perpendicularmente a su velocidad (como medida en un sistema fijo a la estrella). Usando el teorema de adición de velocidades, calcule el ángulo de incidencia de dichos rayos como vistos en el sistema fijo a la Tierra. ¿Cuál es la diferencia en el resultado si se utiliza la regla de adición de velocidades de Galileo?