Electromagnetismo II – Curso 2025

Práctica 3: Transformaciones de Lorentz. Geometría del espacio-tiempo. Tensores.

Cuadrivectores: Las coordenadas ct, x, y, z de un evento en el espacio-tiempo forman un cuadrivector

$$x^\mu \to (x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z), \qquad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{1}$$

Notar que los índices de las coordenadas están siempre arriba. De forma más compacta:

$$x^\mu \to (ct, \vec{r}). \tag{2}$$

Métrica: Se define la métrica $g_{\mu\nu}(x^\mu)$ para construir el intervalo entre dos eventos separados infinitesimalmente como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\mu) dx^\mu dx^\nu \tag{3}$$

donde se está utilizando la convención de suma de Einstein, según la cual los índices repetidos se suman entre 0 y 3.

Sistemas inerciales: son aquellos para los que la métrica es $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ y que en coordenadas cartesianas toma la forma:

$$\eta_{\mu\nu} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Boost general: un boost se puede escribir en general como una matriz de 4×4 definida por el vector 3-dimensional $\vec{\beta} = (v_x/c, v_y/c, v_z/c)$

$$\Lambda(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\, \vec{\beta}^t \\ -\gamma\vec{\beta} & 1_3 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\vec{\beta}\vec{\beta}^t \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{4}$$

Problemas:

1. (a) Dado un tetravector contravariante A^μ, mostrar que $\delta^\mu{}_\nu A^\nu = A^\mu$, donde $\delta^\mu{}_\nu$ es la delta de Kronecker.

   (b) Demuestre que la invarianza del intervalo ante transformaciones de Lorentz $\Lambda^\mu{}_\nu$ implica:

   $$\eta_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu}.$$

   (c) Verifique que la expresión del inciso anterior se puede escribir de forma matricial como

   $$\eta = \Lambda^t \eta \Lambda.$$

   (d) Muestre que x_μ son las componentes de un vector covariante.

   (e) Muestre que $\partial^\mu \phi$ son las componentes de un vector contravariante.

   (f) Discuta por qué no se hace distinción entre vectores covariantes y contravariantes en espacio euclídeo.

   (g) Pruebe que la métrica es un tensor invariante: $\eta'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. Calcule su traza.

   (h) Muestre que $x^\mu x_\mu$ es invariante de Lorentz.

2. Dado un par de eventos separados por un intervalo tipo tiempo, muestre que existe un sistema de referencia en el que ocurren en el mismo lugar del espacio, y que no existe un sistema de referencia en el que ocurran en el mismo instante. ¿Qué sucede con dos eventos separados por un intervalo tipo espacio?.

3. Muestre los siguientes enunciados:

   (a) La suma de dos vectores tipo espacio y ortogonales es un vector tipo espacio, y la suma no es necesariamente tipo espacio si los vectores no son ortogonales.

   (b) Dos vectores tipo tiempo no pueden ser ortogonales.

   (c) Un vector tipo tiempo y otro tipo luz no pueden ser ortogonales.

   (d) La suma de dos vectores que apunten al futuro y no sean tipo espacio, apunta al futuro y no es tipo espacio.

   (e) Dos vectores tipo luz son ortogonales si y sólo si son colineales.

4. (a) Muestre que
$$\frac{\gamma^2}{1+\gamma} = \frac{\gamma - 1}{\beta^2}.$$

   (b) Verifique que el boost general $\Lambda(\vec{\beta})$ es un elemento del subgrupo de Lorentz propio ortócrono.

   (c) Recupere la forma de los boosts paralelos a los ejes.

   (d) Muestre que dos boosts sucesivos con velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ en la misma dirección conmutan, y que su composición es equivalente al boost con velocidad:
$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

   (e) Muestre que dos boosts sucesivos con v_1 en la dirección $\check{x}$ y v_2 en la dirección $\check{y}$ no conmutan. Muestre además que, en cualquier orden ellas se apliquen, no son equivalentes a un único boost con velocidad $\vec{V} = v_1\check{x} + v_2\check{y}$.

5. Dadas las componentes $M^{\alpha\beta}$ de un tensor como una matriz:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcule las componentes del tensor simétrico, $M^{(\alpha\beta)}$, y del antisimétrico, $M^{[\alpha\beta]}$.

   (b) Encuentre las componentes $M^{\alpha}{}_{\beta}$, $M_{\alpha}{}^{\beta}$ y $M_{\alpha\beta}$.

6. Dados los vectores contravariante A^{μ} y covariante B_{μ}, muestre que $A^{\mu}B_{\mu}$ es un escalar bajo transformaciones de Lorentz.

7. Si A es un tensor con componentes $A^{\alpha\beta}$ y B es un tensor con componentes $B^{\alpha\beta}$, muestre que $A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}$ es un escalar de Lorentz.

8. Sea A un tensor antisimétrico con componentes $A^{\alpha\beta}$, S un tensor simétrico con componentes $S^{\alpha\beta}$ y B un tensor arbitrario con componentes $B_{\alpha\beta}$. Muestre:

   (a) $A^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta} = 0$

(b) $A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}B_{[\alpha\beta]}$

(c) $S_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}B^{(\alpha\beta)}$.

9. Sea U un vector unitario tipo tiempo, V un vector arbitrario y P un tensor de componentes $P^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} - U^{\alpha}U_{\beta}$,

(a) Muestre que el vector de componentes $P^{\alpha}{}_{\beta}V^{\beta}$ es ortogonal a U.

(b) Muestre que $P^{\alpha}{}_{\mu}P^{\mu}{}_{\beta} = P^{\alpha}{}_{\beta}$.

(c) ¿Cuál es el tensor que aplicado a V daría lugar a un vector paralelo a U?.

(d) ¿Qué interpretación puede dársele al tensor P y al construido en el inciso anterior?. Justifique.