

Electromagnetismo II – Curso 2025

Práctica 4: Formulación covariante de la electrodinámica.

- (a) Demuestre explícitamente que la forma de la ecuación de onda no se preserva frente a una transformación de Galileo.
(b) Demuestre explícitamente que la forma de la ecuación de onda es invariante ante una transformación de Lorentz.
(c) Ante un boost en el eje x los campos eléctricos y magnéticos transforman según:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma(E_y - vB_z), & E'_z &= \gamma(E_z + vB_y), \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z), & B'_z &= \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y), \end{aligned}$$

con v la componente en x de la velocidad (constante) del sistema de referencia S' respecto de un sistema S . Demuestre la invariancia de las ecuaciones de Maxwell ante esta transformación.

2. Tensor de campo electromagnético

- (a) Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores en $3d$, escriba el producto vectorial entre ambos ($\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$) y muestre que la componente C_i del vector $\vec{C}$ verifica

$$C_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}C_{jk}, = \epsilon_{ijk}A_jB_k,$$

donde $C_{jk} = A_jB_k - A_kB_j$, y ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita.

- (b) Muestre que los números C_{jk} pueden agruparse en la siguiente matriz

$$C_{jk} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & C_z & -C_y \\ -C_z & 0 & C_x \\ C_y & -C_x & 0 \end{pmatrix}$$

donde j numera las filas y k las columnas.

- (c) A partir de la ley de Gauss para el campo magnético, escriba a $\vec{B}$ como una matriz de 3×3 .
(d) A partir de las expresiones de los campos electromagnéticos en términos de los potenciales ϕ y $\vec{A}$, y de lo encontrado en los incisos anteriores, escriba matricialmente el tensor del campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ y su forma contravariante $F^{\mu\nu}$, en términos de las componentes de los campos eléctrico y magnético.
(e) Escriba las ecuaciones de Maxwell utilizando el tensor de campo electromagnético y luego escriba las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas en términos de A^μ .
(f) Escriba la condición del gauge de Lorentz en forma tensorial.
(g) A partir de las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas escritas en forma tensorial, derive la ecuación de continuidad y la conservación de la carga.
3. Encuentre las fórmulas de transformación de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ ante un boost en la dirección del eje x con velocidad v utilizando el tensor de campo electromagnético.
4. (a) Liste todos los invariantes que pueden construirse a partir del tensor de campo electromagnético $F_{\mu\nu}$, su dual $*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ ($\epsilon^{0123} = +1$), y el tensor métrico.
(b) Escriba los invariantes independientes no triviales encontrados en el inciso anterior en términos de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$.

5. En un sistema $\mathcal{S}$ hay campos $\vec{E}, \vec{B}$ ortogonales entre sí.
- Muestre son ortogonales en cualquier otro sistema.
 - Si son uniformes y estáticos, determine si existe un $\mathcal{S}'$ en movimiento relativo uniforme respecto a $\mathcal{S}$ en el cual alguno de los dos se anule. ¿Qué condición determina que el campo que pueda anularse sea $\vec{E}$ ó $\vec{B}$?
6. En un cierto sistema de referencia un campo eléctrico estático uniforme E_0 es paralelo al eje x y una inducción magnética estática uniforme $B_0 = \alpha E_0$ ($\alpha > 1$) se encuentra en el plano (x, y) formando un ángulo θ con el eje x .
- Determine la velocidad relativa de un sistema de referencia en el cual los campos eléctricos y magnéticos son paralelos.
 - ¿Cuáles son los campos en ese sistema para $\theta \ll 1$?
7. (a) Muestre que la expresión del campo eléctrico de una carga puntual q en movimiento uniforme con velocidad v en la dirección del eje z , en el instante en que la carga coincide con el origen, es:

$$\vec{E} = \frac{\kappa}{\epsilon_0} \frac{q(1 - v^2)}{r^2(1 - v^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \vec{r}$$

donde $\vec{r}$ es el vector del origen del sistema $\mathcal{S}$ (donde la partícula está en movimiento) al punto de observación y θ es el ángulo entre $\vec{r}$ y el eje z , medido también en $\mathcal{S}$.

- Dé la expresión del campo eléctrico en función del tiempo. Estudie el límite $v \rightarrow 1$.
 - Encuentre la expresión del campo magnético generado por la misma carga.
 - Verifique explícitamente que se satisface la ley de Gauss.
8. Un momento dipolar eléctrico en reposo en un sistema $\mathcal{S}'$ da lugar a los potenciales (tanto en este problema como en el que sigue se utiliza el sistema gaussiano de unidades):

$$\phi' = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}'}{r'^3}, \quad \vec{A}' = \vec{0}.$$

El sistema $\mathcal{S}'$ se mueve con velocidad $\vec{\beta}c$ uniforme respecto del sistema $\mathcal{S}$.

- Muestre que en el sistema $\mathcal{S}$ y a primer orden en β los potenciales vienen dados por:

$$\phi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{R^3}, \quad \vec{A} = \frac{\vec{\beta}(\vec{p} \cdot \vec{R})}{R^3},$$

donde $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0(t)$, con $\vec{v} = d\vec{r}_0/dt$.

- Muestre explícitamente que los potenciales en el sistema $\mathcal{S}$ satisfacen la condición del gauge de Lorenz.
 - Calcule el campo eléctrico a primer orden en β y demuestre que el campo magnético viene dado por $\vec{B} = \vec{\beta} \times \vec{E}$.
9. Considere ahora un momento magnético puntual $\vec{m}$ en el sistema $\mathcal{S}'$ del problema anterior. Los potenciales en este sistema son ahora:

$$\phi' = 0, \quad \vec{A}' = \frac{\vec{m} \times \vec{r}'}{r'^3}.$$

- Muestre que los potenciales en el sistema $\mathcal{S}$ y a primer orden en β son:

$$\phi = \frac{(\vec{\beta} \times \vec{m}) \cdot \vec{R}}{R^3}, \quad \vec{A} = \frac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3}.$$

(b) Calcule los campos eléctrico y magnético a partir de los potenciales del inciso anterior. En particular, muestre que $\vec{E}$ puede escribirse como:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{dipolo}}(\vec{p}_{\text{ef.}} = \vec{\beta} \times \vec{m}) - \vec{m} \times \frac{3\hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\beta}) - \vec{\beta}}{R^3},$$

y que $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{\beta}$.

10. Una barra infinitamente larga y de radio R está cargada uniformemente con una densidad volumétrica de carga ρ . Calcule de dos maneras distintas los campos eléctrico y magnético para $r > R$ en un sistema de referencia que se mueve a velocidad v paralelamente a la barra:
 - (a) A partir de las distribuciones de carga y corriente en el nuevo sistema.
 - (b) Por transformación directa de los campos.