Electromagnetismo II – Curso 2025

Práctica 6: Dinámica de campos relativistas. Simetrías.

1. La dinámica de los campos está gobernada por un lagrangiano que es función de $\phi_a(\vec{x},t)$, $\dot{\phi}_a(\vec{x},t)$ y $\nabla\phi_a(\vec{x},t)$. En todos los sistemas que se estudiarán en este curso, el lagrangiano tendrá la siguiente forma:
$$L(t) = \int d^3x \ \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)$$
donde $\mathcal{L}$ es la densidad lagrangiana, y $a = 1, 2, ...N$. En consecuencia, la acción toma la forma:
$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \ \ L(t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \ \int d^3x \ \mathcal{L} = \int d^4x \ \mathcal{L}.$$
Obtenga las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para los campos ϕ_a.

2. La densidad lagrangiana para un campo escalar real de masa m viene dada por:
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$
(a) Escriba el Lagrangiano de forma que sea manifiestamente invariante de Lorentz.
(b) A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, encuentre las ecuaciones de movimiento para este campo.
(c) Demuestre que la solución de la ecuación de movimiento para ϕ es:
$$\phi(\vec{x},t) = \int d^3p \ N_p(a_p \ e^{-ip\cdot x} + a_p^* \ e^{ip\cdot x}),$$
donde se usa la notación $p\cdot x = p^\mu x_\mu$, y $p^0 = (m^2c^2 + |\vec{p}|^2)^{1/2}$.
(d) Obtenga el Hamiltoniano del sistema:
$$\mathcal{H} = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\dot{\phi} - \mathcal{L} \right)$$
en términos de ϕ y π, donde $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)}$ es el campo conjugado a ϕ.
(e) Obtenga el tensor de energía impulso del sistema en términos de ϕ y π. Interprete a la componente T^{00}.

3. La acción de la partícula libre relativista es:
$$S = -mc\int ds \ \ \text{con} \ \ ds = \sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}d\tau$$
(a) Demostrar que el lagrangiano asociado se puede escribir de la siguiente manera:
$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}.$$
(b) Obtenga el Hamiltoniano.
(c) Tomar el límite no relativista de la ecuación para la acción.

(d) La acción de una partícula relativista interactuando con un campo A_μ es

$$S = -mc \int ds - q \int A_\mu dx^\mu.$$

Efectuando la variación de la acción respecto a x^μ demuestre que la ecuación de movimiento que se obtiene es:

$$m\frac{du^\alpha}{d\tau} = qF^{\alpha\beta}u_\beta.$$

4. (a) Dada la acción

$$S = -mc \int ds + \frac{\epsilon_0 c^2}{4} \int d^4x \; F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \int d^4x \; A_\mu j^\mu$$

obtenga las ecuaciones de movimiento a partir de su variación respecto A_μ.

(b) Encuentre el tensor de energía impulso electromagnético.

5. A partir del lagrangiano de interacción de una partícula de masa m y carga q con un campo electromagnético A_μ externo (no dinámico),

$$L[x^\mu(\tau), \dot{x}^\mu(\tau)] = \frac{1}{2}m\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu + q\dot{x}_\mu A^\mu \,,$$

donde $\dot{x}_\mu = dx_\mu/d\tau$ es la tetravelocidad de la partícula:

(a) Obtenga las ecuaciones de movimiento para la partícula y verifique que reproducen el resultado esperado, donde τ, en principio un parámetro arbitrario para la trayectoria, debe ser identificado con el tiempo propio de la partícula.

(b) Encuentre los impulsos canónicos conjugados y dé una expresión para el hamiltoniano. ¿Es el mismo invariante de Lorentz?

(c) Muestre que la transformación de gauge $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu\Lambda$ da lugar a un lagrangiano equivalente.

6. Considere la densidad lagrangiana del modelo de Higgs abeliano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (D^\mu\phi)^*(D_\mu\phi) - m^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4,$$

donde $\lambda > 0$ y D_μ es la derivada covariante.

(a) Muestre que es invariante ante las transformaciones de gauge locales $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)$, $\phi(x) \to \phi(x)e^{ie\Lambda(x)}$.

(b) Encuentre los estados de mínima energía, que son los mínimos del potencial

$$V[\phi] = m^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4.$$

Muestre que para $m^2 < 0$ hay una familia de estados fundamentales equivalentes que se relacionan entre sí por rotaciones en el plano complejo ϕ. En la configuración de menor energía, el sistema estará en alguno de esos estados: muestre entonces que el estado fundamental no mantiene la simetría de gauge del sistema.