ELECTROMAGNETISMO - Física Médica - 2024

Práctica 0.

Repaso: campos de funciones, cálculo diferencial e integral, delta de Dirac.

1. Sean $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ fijo y $\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} + z'\hat{\mathbf{z}}$ variable; luego $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ es el vector desplazamiento desde el punto fijo (x, y, z) hasta el punto (x', y', z'). Calcular el gradiente de $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2$ y de $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$.

2. Calcule la divergencia y el rotor de los campos:

   (a) $\mathbf{v} = \mathbf{r}$

   (b) $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{z}}$

   (c) $\mathbf{v} = xy\hat{\mathbf{x}} + 2yz\hat{\mathbf{y}} + 3xz\hat{\mathbf{z}}$

3. Compruebe que:

   (a) la divergencia de un rotor es siempre nula

   (b) el rotor de un gradiente es siempre nulo

4. Calcule la integral de línea de la función $\mathbf{v} = y^2\hat{\mathbf{x}} + 2x(y+1)\hat{\mathbf{y}}$ desde el punto $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$ al punto $\mathbf{b} = (2, 2, 0)$ de dos maneras:

   (a) a lo largo del camino $(1, 1, 0) \to (2, 1, 0) \to (2, 2, 0)$.

   (b) a lo largo del camino $(1, 1, 0) \to (2, 2, 0)$.

   (c) ¿cuál sería el valor de la integral cerrada si el camino de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ realizado en (a) se cierra con el camino (b)?

5. Calcule la integral de superficie de $\mathbf{v} = 2xz\hat{\mathbf{x}} + (x+2)\hat{\mathbf{y}} + y(z^2 - 3)\hat{\mathbf{z}}$ sobre 5 de las 6 caras de un cubo de lado 2. Coloque el origen de coordenadas en uno de los vértices del cubo y excluya su base (esa sería la sexta cara).

6. Compruebe el teorema fundamental para gradientes usando $T = x^2 + 4xy + 2yz^3$ desde el punto $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$ al punto $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$ y los caminos:

   (a) $(0, 0, 0) \to (1, 0, 0) \to (1, 1, 0) \to (1, 1, 1)$

   (b) el camino parabólico $z = x^2$, $y = x$.

7. Compruebe el Teorema de Stokes para las siguientes funciones:

   (a) $\mathbf{v} = xy\hat{\mathbf{x}} + 2yz\hat{\mathbf{y}} + 3xz\hat{\mathbf{z}}$, sobre el área triangular definida por los puntos $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 2)$.

   (b) $\mathbf{v} = ay\hat{\mathbf{x}} + bx\hat{\mathbf{y}}$ (a y b constantes), sobre un círculo de radio R centrado en el origen en el plano xy.

8. Compruebe el teorema de la divergencia para las siguientes funciones:

   (a) $\mathbf{v} = r^2\hat{r}$ sobre una esfera centrada en el origen de radio R.

   (b) $\mathbf{v} = r\cos\theta\hat{r} + r\sin\theta\ \hat{\theta} + r\sin\theta\cos\phi\ \hat{\phi}$, usando como volumen la semiesfera invertida de radio R centrada en el origen y apoyada sobre el plano xy.

9. Evalúe las siguientes integrales:

   (a) $\int_2^6 (3x^2 - 2x - 1)\ \delta(x-3)dx$

   (b) $\int_2^4 (x^3 - 6x)\ \delta(x-1)dx$

   (c) $\int_0^5 \cos x\ \delta(x-\pi)dx$

   (d) $\int_{-\infty}^{\infty} \ln(x+3)\ \delta(x+2)dx$

   (e) $\int_{-2}^{2} (2x+3)\ \delta(3x)dx$

10. Muestre que

    (a) $x\frac{d}{dx}(\delta(x)) = -\delta(x)$.

    (b) $\frac{d}{dx}(\theta(x)) = \delta(x)$, donde $\theta(x)$ es la función escalón o Heaviside.