ELECTROMAGNETISMO - Física Médica - 2024

Práctica 2:
Electrostática – Técnicas Especiales: Ecuación de Poisson, Ecuación de Laplace, Método de las Imágenes, Desarrollo multipolar.

Problemas

1. Una carga puntual positiva Q se encuentra en el centro de un casquete conductor esférico de radio interno R_i y radio externo R_e.

   a) Calcule el campo electrostático, el potencial y la densidad superficial de carga correspondiente.

   b) Cómo cambia el resultado si el casquete está conectado a tierra?

   c) Dibuje esquemáticamente las superficies equipotenciales.

2. Para el problema 5 de la práctica 1, en el que dos hilos paralelos infinitamente largos, uniformemente cargados con densidades de carga lineal λ y $-\lambda$, están separados una distancia d, grafique el potencial, y sus curvas de nivel, en un plano perpendicular a los hilos. Utilice software adecuado.

3. En la figura 1 se muestra una distribución lineal de carga λ_0 infinita, rodeada por una distribución cilíndrica, también infinita, cuya densidad de cargas en coordenadas cilíndricas está dada por $\rho(r, \phi, z) = \sigma_0/r$ que se extiende hasta un radio r=a. Entre ambas densidades existe la relación $\lambda_0 = -2a\,\pi\,\sigma_0$. Suponga que el potencial del cilindro es tal que cumple con la condición de contorno $V(a) = V_0$.

   a) Calcule el campo eléctrico en todo el espacio.

   b) Calcule el potencial en todo el espacio.

   c) Grafique esquemáticamente el campo y potencial eléctricos.

4. Dos planos conductores aislados infinitos, que se mantienen a potenciales 0 y V_0, forman una cuña, como se muestra en la figura 2. Desprecie efectos de borde y el grosor de los planos. Determine las distribuciones de potencial en la regiones :

   a) $0 < \phi < \alpha$.
   b) $\alpha < \phi < 2\pi$.

   (Sugerencia: Plantee el gradiente del potencial eléctrico en coordenadas cilíndricas, aplique consideraciones de simetría y luego plantee la ecuación de Laplace para resolver la distribución del potencial con las condiciones de contorno, V(0), V(α), V(2π).)

5. Un anillo de radio R y densidad lineal de carga λ se encuentra a una distancia d frente a un plano, como muestra la figura 3. El plano separa el vacío de un medio conductor infinitamente extendido. Determine el potencial y el campo elecrostáticos en el eje del anillo por el método de las imágenes.

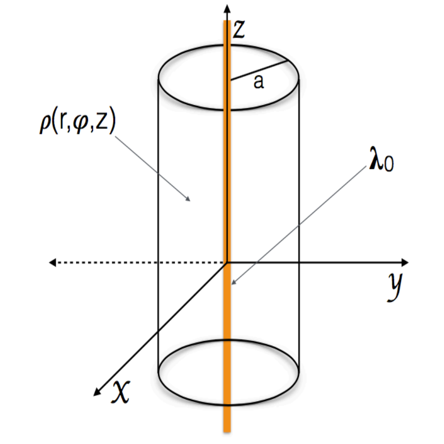

Figure 1: Distribución de cargas para el problema 3.

6. Utilizando el método de las imágenes, hallar el potencial exterior de una esfera conductora de radio R conectada a tierra en presencia de una carga puntual q colocada a una distancia d del origen con $d > R$. Cómo se modifica el resultado si

   ii. La esfera está aislada y cargada con una carga total Q.

   iii. La esfera se mantiene a un potencial fijo V.

7. Un hilo infinito con densidad lineal de carga λ se encuentra emplazado a una distancia d, en forma paralela, a un cilindro conductor infinitamente largo de radio R.

   a) Use el método de las imágenes para determinar el campo y el potencial electrostáticos en todas partes.

   b) Cuál es la densidad superficial de carga del cilindro como función de la posición?

   c) Grafique el potencial hallado con software adecuado. Sobre ese gráfico, dibuje esquemáticamente las lineas de campo.

   (Sugerencia: analice cuidadosamente los resultados de los problemas 4 de la práctica 1, y 2 de esta práctica.)

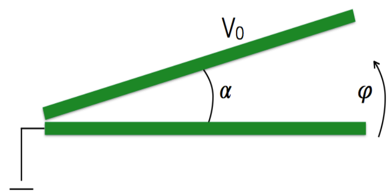

Figure 2: Problema 4.

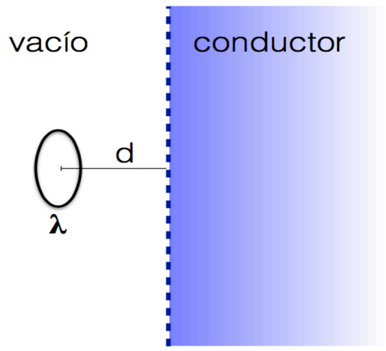

Figure 3: Problema 5.

8. Un dipolo de momento dipolar $\mathbf{p}$ se coloca en un campo eléctrico uniforme

   a) Calcular la fuerza y el momento resultante si el dipolo se coloca perpendicular al campo eléctrico.

   b) Determinar la posición de equilibrio estable del dipolo dentro del campo eléctrico mencionado.

   c) Determinar la energía de configuración del dipolo (Asumir, en este caso, que el campo eléctrico de los incisos anteriores es nulo).

   d) Cuál es el trabajo mecánico necesario para hacer rotar al dipolo desde una posición de equilibrio estable a una posición donde forme un ángulo θ con el campo eléctrico?

9. Tres cargas puntuales q, $-q$ y $-q$ situadas sobre el plano yz se encuentran separadas una distancia a, como indica la figura4. Encuentre el campo eléctrico aproximado para puntos lejos del origen de coordenadas, utilizando los dos momentos multipolares de más bajo orden para la distribución de cargas.

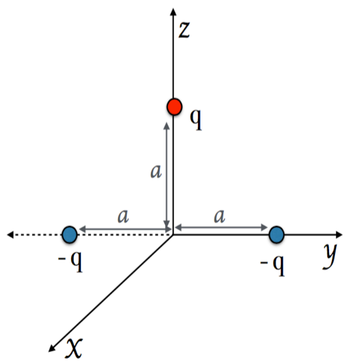

Figure 4: Distribución de cargas del problema 9.

10. Calcule los dos momentos multipolares de orden más bajo distintos de cero y el potencial aproximado, a grandes distancias, para las siguientes distribuciones de carga:

a) Una esfera de radio a centrada en el origen, con una densidad de carga $\rho(r,\theta) = k\frac{a}{r^2}(a-2r)\sin\theta$, donde k es una constante y r,θ son las coordenadas esféricas usuales. En este caso particular, encuentre el potencial aproximado para puntos sobre el eje z lejanos a la esfera.

b) Una cruz formada por dos varillas de igual longitud, uniformemente cargadas con densidades λ y $-\lambda$.

c) Una superficie cilíndrica de longitud h y radio a dividida longitudinalmente en dos mitades, cada una cargada uniformemente con densidades superficiales σ y $-\sigma$.

Nota sobre desarrollo multipolar

Si un punto p se encuentra muy alejado de una distribución de cargas, puedo calcular el potencial aproximado en dicho punto a través del desarrollo multipolar que está dado por:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0\,r} + \frac{\mathbf{p}.\mathbf{r}}{4\,\pi\,\epsilon_0\,r^3} + \frac{1}{8\,\pi\,\epsilon_0\,r^5}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i\,Q_{ij}\,x_j,$$

donde el primero, segundo y tercer tercer término de $V(\mathbf{r})$ se conocen como término monopolar, dipolar y cuadrupolar, respectivamente. Los momentos multipolares para la distribución de carga finitamente confinada están dados por:

$$Q = \int_{V'} \rho(\mathbf{r}')\,dV',$$

que representa la carga total de la distribución de cargas,

$$\mathbf{p} = \int_{V'} \rho(\mathbf{r}')\,\mathbf{r}'\,dV',$$

que es el momento dipolar de la distribución. Los coeficientes Q_{ij} $(i,j = 1,2,3)$ que aparecen en la expresión de $V(\mathbf{r})$, forman parte de una matriz de 3×3 que se conoce como tensor momento cuadrupolar y está dado por

$$Q_{ij} = \int_{V'} \rho(\mathbf{r}')\,(3\,x_i'x_j' - \delta_{ij}r'^2)\,dV'.$$

Este tensor es simétrico, es decir $Q_{ij} = Q_{ji}$ y tiene traza nula, es decir, la suma de los elementos de la diagonal es cero.