Electrónica

Algunas ideas sobre respuesta en frecuencia

Curso 2024 – Prof. Jorge Runco

Introducción

- En la primera parte del curso caracterizamos a los sistemas y encontramos las respuestas de los mismos en el dominio del tiempo. Resolviendo ecuaciones diferenciales y/o analizando la carga y descarga del C. Relacionábamos la cte de tiempo con el período de la onda cuadrada.
- La Serie y la Transformada de Fourier son métodos alternativos para el análisis de señales y sistemas en el dominio de la frecuencia.
- Transforman una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, en una expresión algebraica, permitiendo entre otras cosas, simplificar la determinación de la respuesta permanente de ese sistema, así como su respuesta en frecuencia.

Dominio de Frecuencia

- Metodología
  - Señales elementales a partir de las cuales se puede construir por combinación lineal cualquier señal.
  - Construir la respuesta al sistema a partir de su respuesta a la señal elemental.
- Se introducen los siguientes conceptos :
  - Exponenciales complejas como señal básica.
  - Dualidad entre dominios de tiempo y frecuencia.
  - Respuesta en frecuencia de sistemas LIT (lineal invariante en el tiempo)

- Ahora pensamos → funciones propias de los sistemas LIT

Entrada : función propia → Salida : misma función multiplicada por una constante

A partir de la propiedad de superposición de los sistemas LIT

$$x(t)=\Sigma\, a_k\, \phi_k(t) \quad \rightarrow \quad y(t)= \Sigma\, k\, a_k\, \phi_k(t)$$

- **L**as exponenciales complejas son funciones propias de los sistemas (LIT), ya que cumplen con la característica de que al aplicarlas a un sistema, la respuesta permanente es la misma entrada (tiene la misma forma) multiplicada por una constante compleja.
- Las exponenciales complejas son periódicas, la constante compleja es la función de transferencia o función del sistema $H(s)|s=jw_0$ evaluada a la frecuencia jw_0 de la señal de entrada.
- A esta constante se le denomina valor propio del sistema. Esto es, la respuesta permanente a una entrada exponencial compleja es

$$x(t) = e^{j\omega_o t} \rightarrow y(t) = H(s)|_{s\,=\,j\omega o}\, e^{j\omega_o t}$$

Como ejemplos para entender

$$x(t) = e^{j\omega_1 t} \rightarrow y(t) = H(s)|_{s\,=\,j\omega 1} e^{j\omega_1 t}$$

$$x(t) = 5e^{j\omega_2 t} \rightarrow y(t) = H(s)|_{s\,=\,j\omega 2}\, 5\, e^{j\omega_2 t}$$

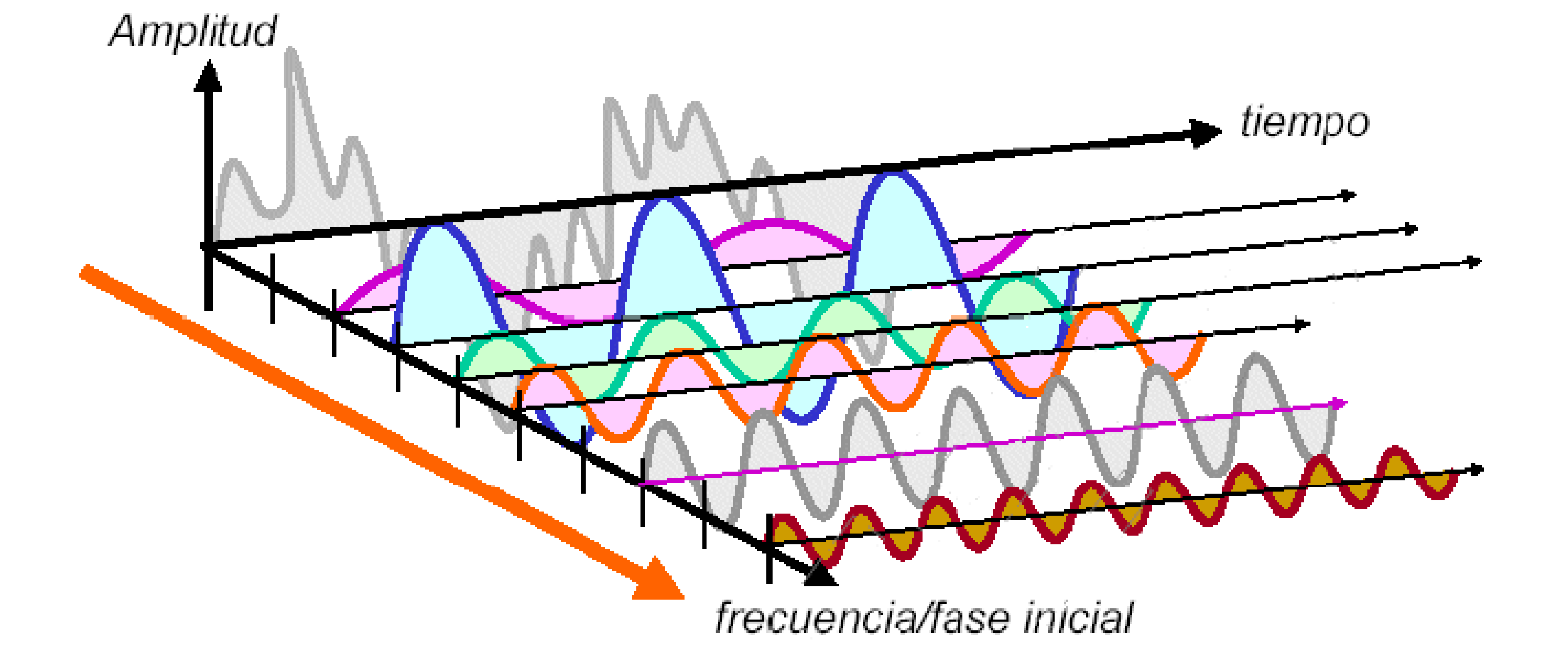
$$x(t) = 2e^{j(\omega_2 t + \pi/4)} \rightarrow y(t) = H(s)|_{s\,=\,j\omega 2}\, 2\, e^{j(\omega_2 t + \pi/4)}$$

$$x(t) = 5e^{j\omega_1 t} + 2e^{j\omega_2 t} \rightarrow$$
$$y(t) = H(s)|_{s\,=\,j\omega}\, 5e^{j\omega_1 t} + H(s)|_{s\,=\,j\omega}\, 2e^{j\omega_2 t}$$

- Ya que las exponenciales complejas son funciones propias de los sistemas (LIT), una señal de entrada se puede definir como la superposición de un número infinito de exponenciales complejas, que pueden o no estar ponderadas y desplazadas. De manera general, la serie exponencial de $x(t)$ es:
- $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t} = \ldots + c_{-2}\, e^{-j2\omega_0 t} + c_{-1}\, e^{-j\omega_0 t} + c_0 + c_1\, e^{j\omega_0 t} + c_2\, e^{j2\omega_0 t} + \cdots$
- Donde los c_k pueden ser complejos.
- La salida ó respuesta permanente es:
- $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, H(kj\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$

Representación de señales

Uno de los métodos de representar la señal x(t) es bajo la forma de componentes de ≠ f, c/u de ellas con una amplitud y fase inicial



Serie trigonométrica de Fourier

Algunas funciones periódicas f(t) de periodo T pueden expresarse por la siguiente serie, llamada *Serie Trigonométrica de Fourier*

$f(t) = ½a_0+a_1\cos(w_0t)+a_2\cos(2w_0t)+... + b_1\mathrm{sen}(w_0t)+b_2\mathrm{sen}(2w_0t)+...$

Donde $w_0=2\pi/T$.

Es decir,

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n \mathrm{sen}(n\omega_0 t)]$$

Serie trigonométrica de Fourier

- Así, una función periódica f(t) se puede escribir como la suma de componentes sinusoidales de diferentes frecuencias $w_n=nw_0$.
- A la componente sinusoidal de frecuencia nw_0: $C_n\cos(nw_0t+\theta_n)$ se le llama la enésima armónica de f(t).
- A la primera armónica (n=1) se le llama la componente fundamental y su periodo es el mismo que el de f(t)
- A la frecuencia $w_0=2\pi f_0=2\pi/T$ se le llama frecuencia angular fundamental.

Cálculo de los coeficientes de la Serie de Fourier

- Dada una función periódica f(t) ¿cómo se obtiene su serie de Fourier?

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \mathrm{sen}(n\omega_0 t)]$$

- Obviamente, el problema se resuelve si sabemos como calcular los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$

- Esto se puede resolver considerando la ortogonalidad de las funciones seno y coseno comentada anteriormente.

Multiplicando ambos miembros por cos($n\omega_0 t$) e integrando de –T/2 a T/2, obtenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt \qquad n = 0,1,2,3,...$$

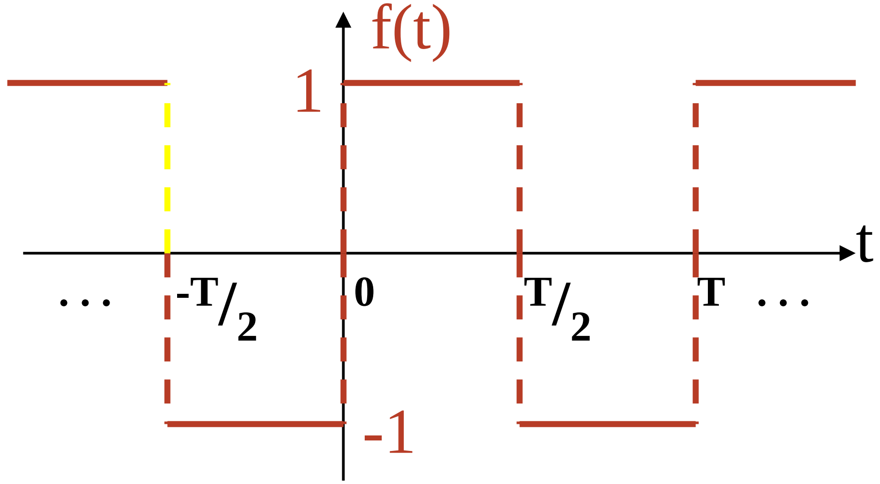
Similarmente, multiplicando por sen($n\omega_0 t$) e integrando de –T/2 a T/2, obtenemos:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{sen}(n\omega_0 t)dt \qquad n = 1,2,3,...$$

Similarmente, integrando de –T/2 a T/2, obtenemos:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$$

Ejemplo: Encontrar la Serie de Fourier para la siguiente función de periodo T:



$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1 & \text{para } 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Solución: La expresión para f(t) en $-{}^{T}/_{2} < t < {}^{T}/_{2}$ es

Coeficientes a_n:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} -\cos(n\omega_0 t)dt + \int_{0}^{T/2}\cos(n\omega_0 t)dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[-\frac{1}{n\omega_0}\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\Big|_{-T/2}^{0} + \frac{1}{n\omega_0}\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\Big|_{0}^{T/2}\right]$$

$$= 0 \quad \text{para } n \neq 0$$

Coeficientes b_n:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} -\operatorname{sen}(n\omega_0 t)dt + \int_{0}^{T/2}\operatorname{sen}(n\omega_0 t)dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{1}{n\omega_0}\cos(n\omega_0 t)\Big|_{-T/2}^{0} - \frac{1}{n\omega_0}\cos(n\omega_0 t)\Big|_{0}^{T/2}\right]$$

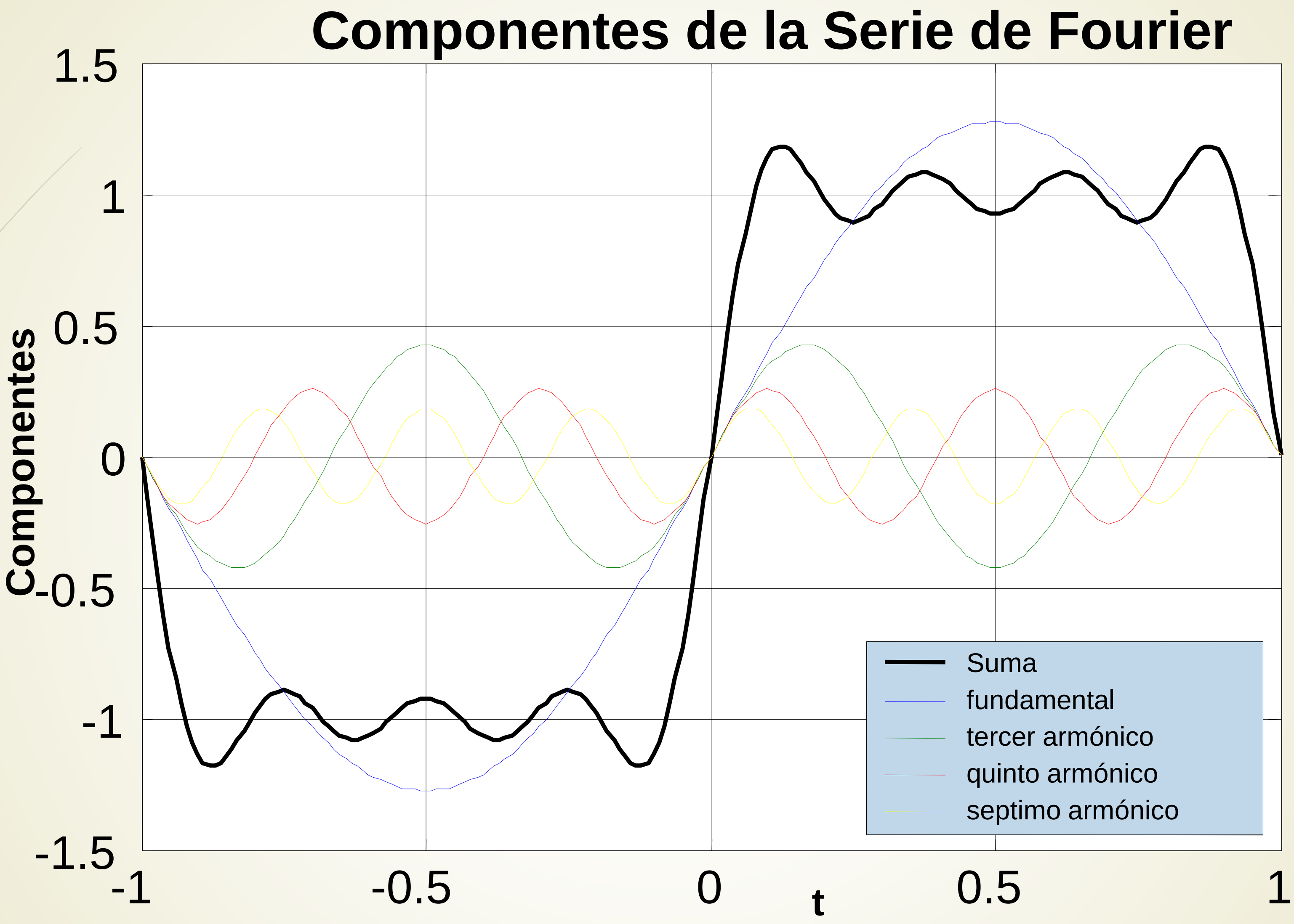
$$= \frac{1}{n\pi}\left[(1-\cos(n\pi)) - (\cos(n\pi) - 1)\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] \quad \text{para } n \neq 0$$

Serie de Fourier: Finalmente la Serie de Fourier queda como

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[\mathrm{sen}(\omega_0 t) + \tfrac{1}{3}\mathrm{sen}(3\omega_0 t) + \tfrac{1}{5}\mathrm{sen}(5\omega_0 t) + \ldots\right]$$

En la siguiente figura se muestran: la componente fundamental y los armónicos 3, 5 y 7 así como la suma parcial de estos primeros cuatro términos de la serie para $w_0=\pi$, es decir, T=2:

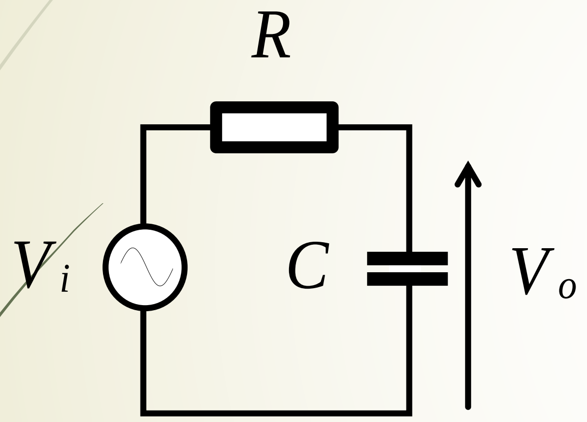


Componentes de la Serie de Fourier
Componentes
t
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
Suma
fundamental
tercer armónico
quinto armónico
septimo armónico

Ejemplo. Circuito rc con onda cuadrada

- Sabemos como resolver el circuito para excitación senoidal. Una sola frecuencia.
- Por Fourier la onda cuadrada podemos descomponerla en una suma de señales senoidales cada una de distinta frecuencia.
- La idea es calcular la respuesta (tensión de salida) para cada frecuencia senoidal y como el sistema es lineal sumarlas para obtener la respuesta total.
- Recordemos también que el concepto de impedancia es para f senoidales.

RC con excitación senoidal
Respuesta permanente



$$V_o = I.X_c = \frac{V_i}{R+X_c}.X_c = \frac{V_i}{R+\frac{1}{j\omega C}}.\frac{1}{j\omega C}$$

$$= \frac{V_i}{1+j\omega CR} \quad \Rightarrow \quad H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1}{1+j\omega CR}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_0})^2}} \quad \Leftarrow$$

$$\varphi = arctag(-\omega CR) \quad \Leftarrow$$

- *Calculamos H(jw) para* ω_0*, 3* ω_0*, 5* ω_0*…….*

- $H(j\omega_0) = \frac{1}{1+jRC\omega_0}$

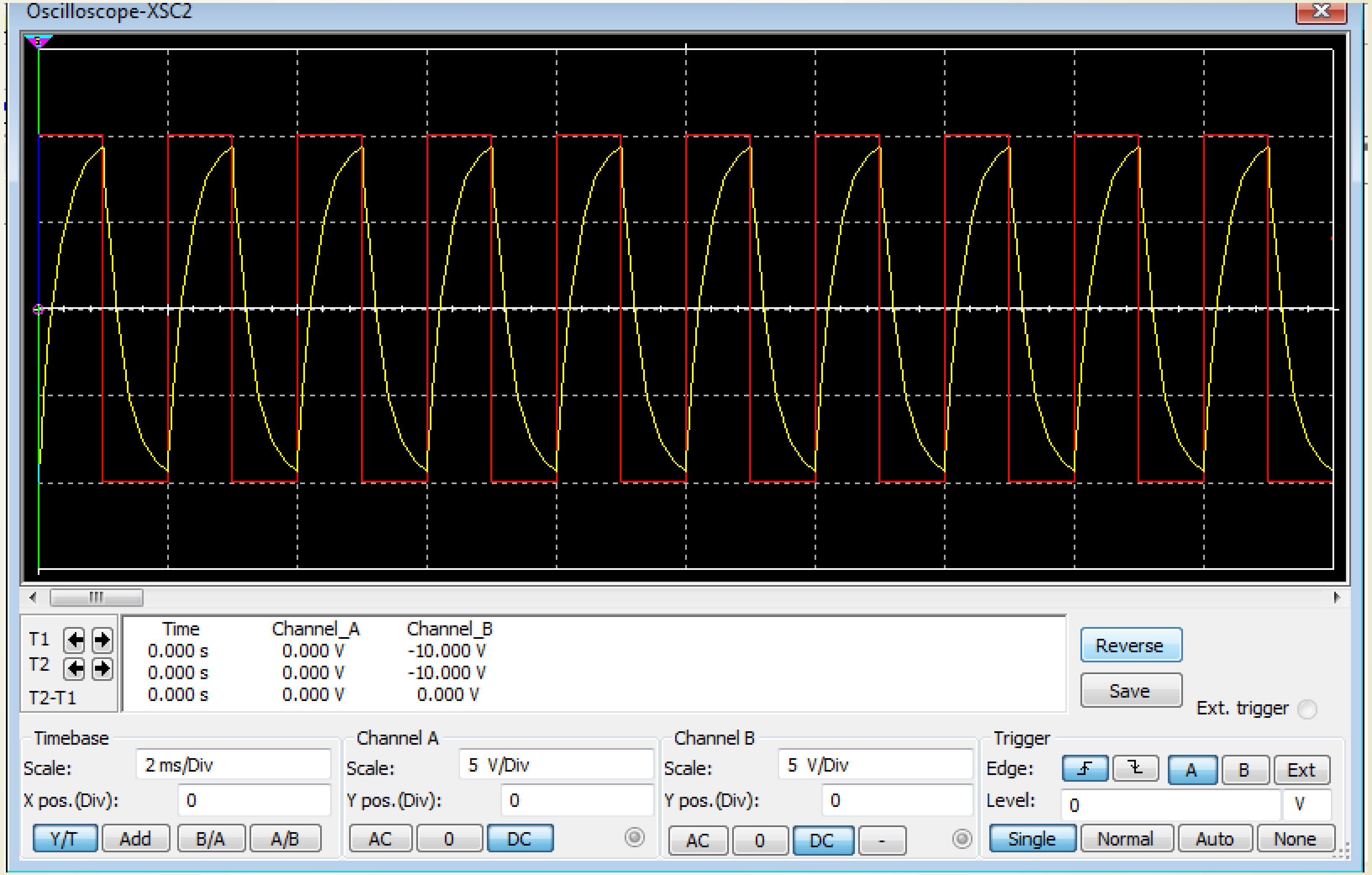
- $H(j3\omega_0) = \frac{1}{1+jRC3\omega_0}$

- $H(j5\omega_0) = \frac{1}{1+jRC5\omega_0}$

- Y multiplicamos este número complejo por cada coeficiente de Fourier de la señal de entrada para obtener el coeficiente de cada componente de la tensión de salida. (Para cada frecuencia).

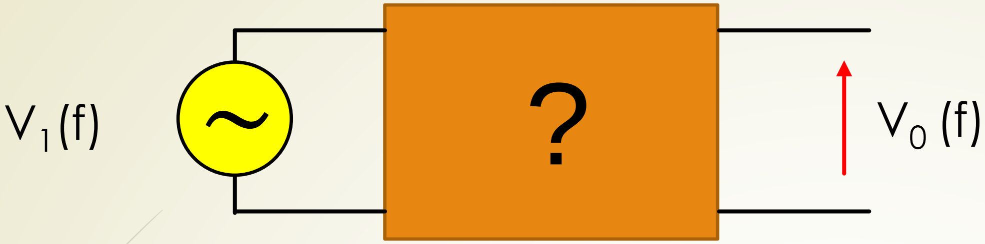
- De acuerdo a lo calculado en el ppt anterior, H depende de la frecuencia porque hay elementos que almacenan energía y su reactancia dependen de la frecuencia.
- En este caso H será un número complejo.
- Para resolver el problema:
- 1) Calculamos la Serie de Fourier de la onda cuadrada.
- 2) Para cada f (coeficiente) multiplicamos la amplitud del mismo por el módulo de H y desplazamos el seno una fase dada por el ángulo de H
- 3) Sumamos las respuestas individuales para obtener la respuesta total.

Onda cuadrada 500 Hz. R1=1KΩ C1=0.3uF



¿Porqué medimos la respuesta en f? Diagrama de Bode

- En el tp1 medimos la respuesta en frecuencia de un circuito RC.
- Medimos Vo/Vi (H) para distintas f (senoidales) de entrada.
- Tener la respuesta en frecuencia me sirve para rápidamente saber: dada una señal de entrada la descompongo en sus componentes de Fourier y según como son amplificadas/atenuadas y desfasadas, sabré "cuan" deformada está la salida.
- El Bode es la respuesta en f aproximada por asíntotas.



$f_1 \rightarrow V_1(f_1) = V_1 = cte \rightarrow V_0(f_1)$

$f_2 \rightarrow V_1(f_2) = V_1 = cte \rightarrow V_0(f_2)$

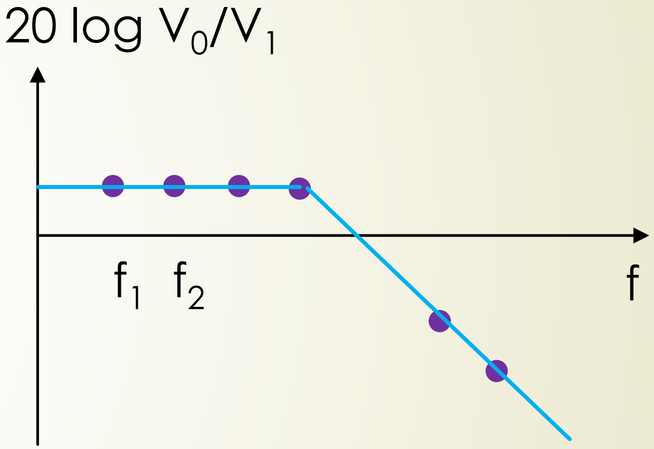
$f_3 \rightarrow V_1(f_3) = V_1 = cte \rightarrow V_0(f_3)$

$f_4 \rightarrow V_1(f_4) = V_1 = cte \rightarrow V_0(f_4)$

....

$f_8 \rightarrow V_1(f_8) = V_1 = cte \rightarrow V_0(f_8)$

$f_9 \rightarrow V_1(f_9) = V_1 = cte \rightarrow V_0(f_9)$



- Pensemos ahora en una señal periódica cuadrada, triangular, etc.
- Sabemos resolver los circuitos con ondas senos, coseno ó exponenciales complejas en forma más general.
- Aplicando Fourier podemos descomponer una señal periódica en senos, cosenos ó exponenciales complejas, cada una de frecuencia múltiplo de la fundamental
- La función de transferencia nos da una idea como será afectada en amplitud y fase cada una de las componentes de Fourier.
- El caso ideal sería que todas las componentes de frecuencia sean igualmente atenuadas ó amplificadas; y el mismo retardo (tiempo) para todas.
- La única manera que la función de transferencia (amplitud) sea constante con la frecuencia es que no haya elementos que almacenen energía.
- En este caso tampoco hay retardos en el tiempo.