Electrónica - Curso 2024

Transformada de Fourier en TC

TF en TC

- Derivación del par TF de TC
- Ejemplos de TF
- TF de señales periódicas
- Propiedades de la TF en TC

Derivación

- La serie de Fourier nos permite obtener una representación en el dominio de la frecuencia de funciones periódicas f(t).

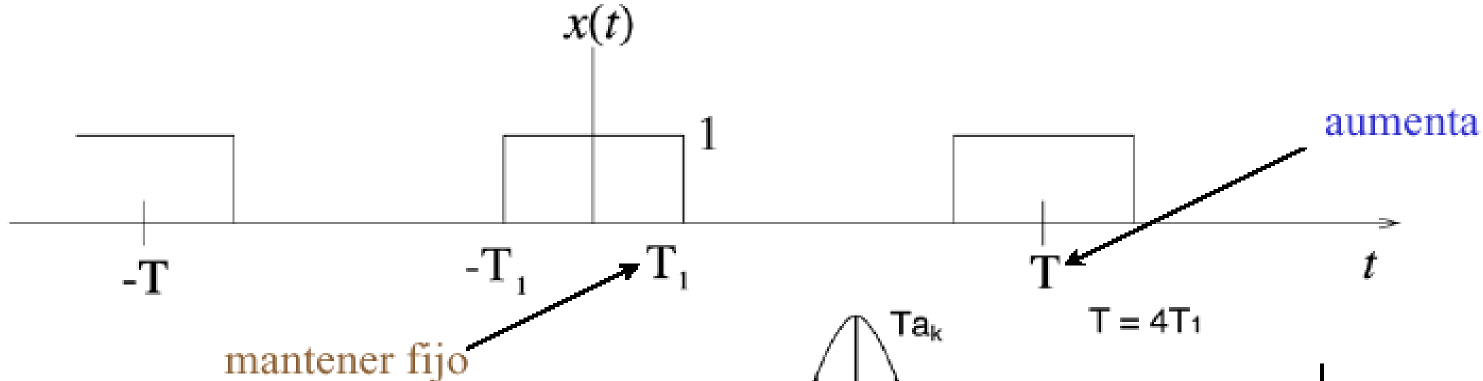
- ¿Es posible extender de alguna manera las series de Fourier para obtener una representación en el dominio de la frecuencia de funciones no periódicas?

Derivación

- Sea x(t) una señal aperiódica. Pensemos como el límite de una señal periódica que $T \longrightarrow \infty$
- Para una señal periódica las componentes armónicas están separadas $w_0=2\pi/T$
- Como $T \longrightarrow \infty$, $w_0 \longrightarrow 0$ y las componentes armónicas están c/vez más cerca en f

$$\Downarrow$$

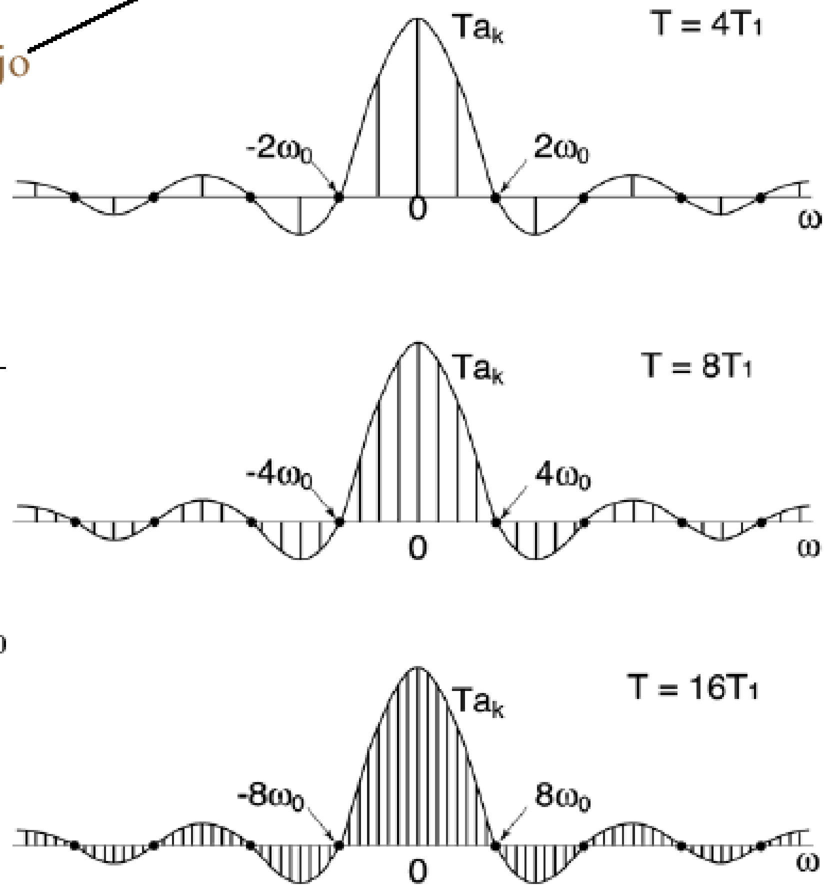
Serie de Fourier $\Longrightarrow$ Integral de Fourier



$$\left. a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} \right.$$

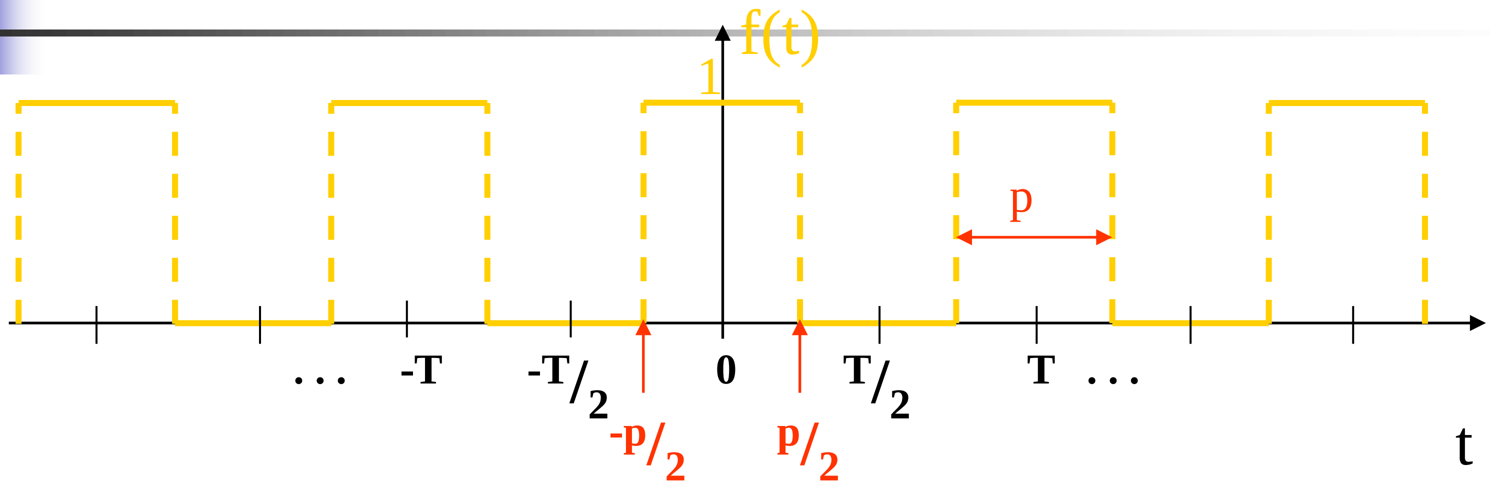
$$\Downarrow$$

$$Ta_k = \left. \frac{2\sin\omega T_1}{\omega} \right|_{\omega = k\omega_0}$$



Los puntos de frecuencia discreta se vuelven más densos en ω a medida que aumenta T

Tren de pulsos de amplitud 1, ancho p y periodo T:



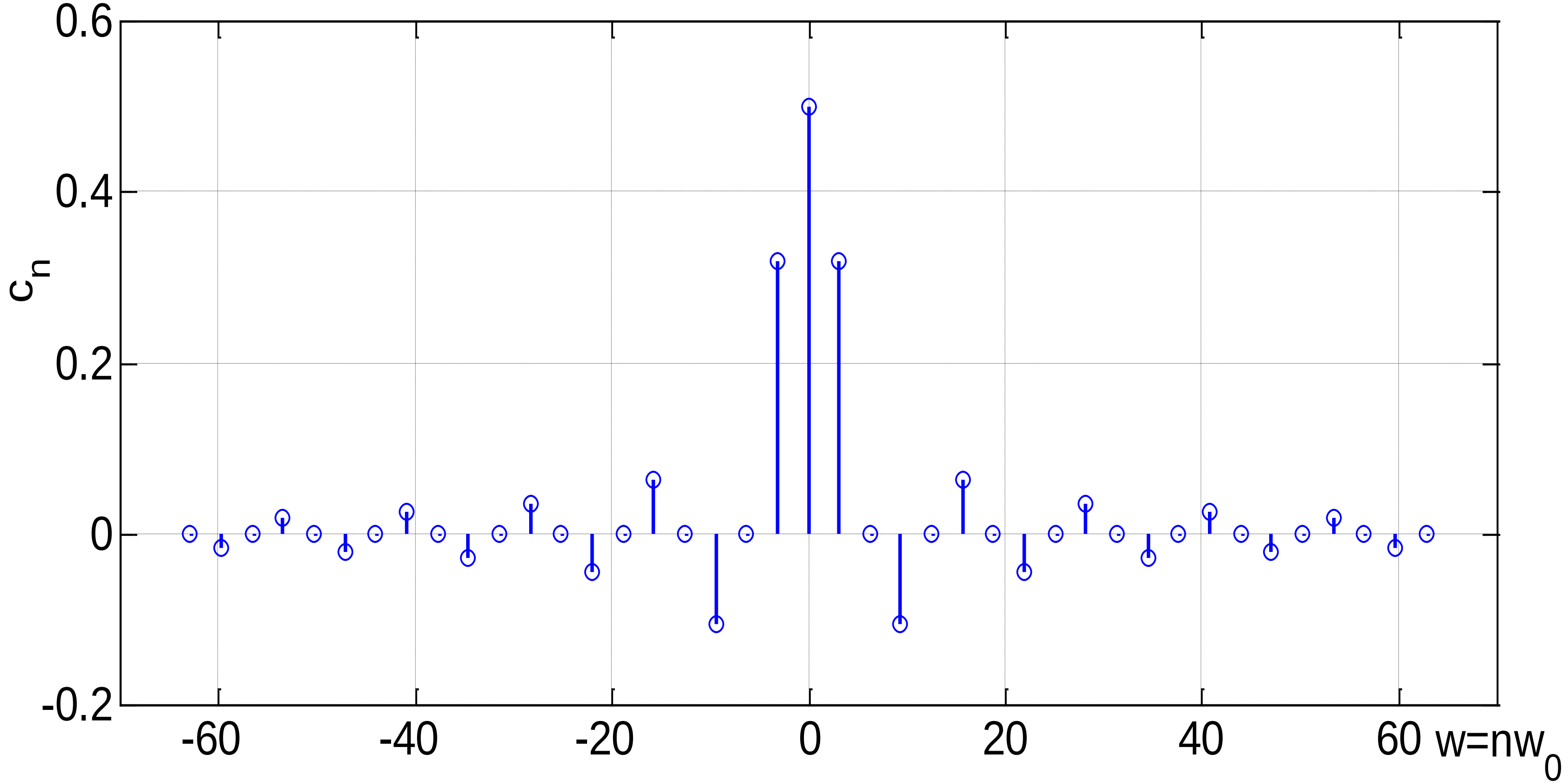
$$f(t)=\begin{cases}0 & \frac{-T}{2}<t<\frac{-p}{2}\\ 1 & \frac{-p}{2}<t<\frac{p}{2}\\ 0 & \frac{p}{2}<t<\frac{T}{2}\end{cases}$$

Los coeficientes de la serie compleja de Fourier en este caso resultan puramente reales:

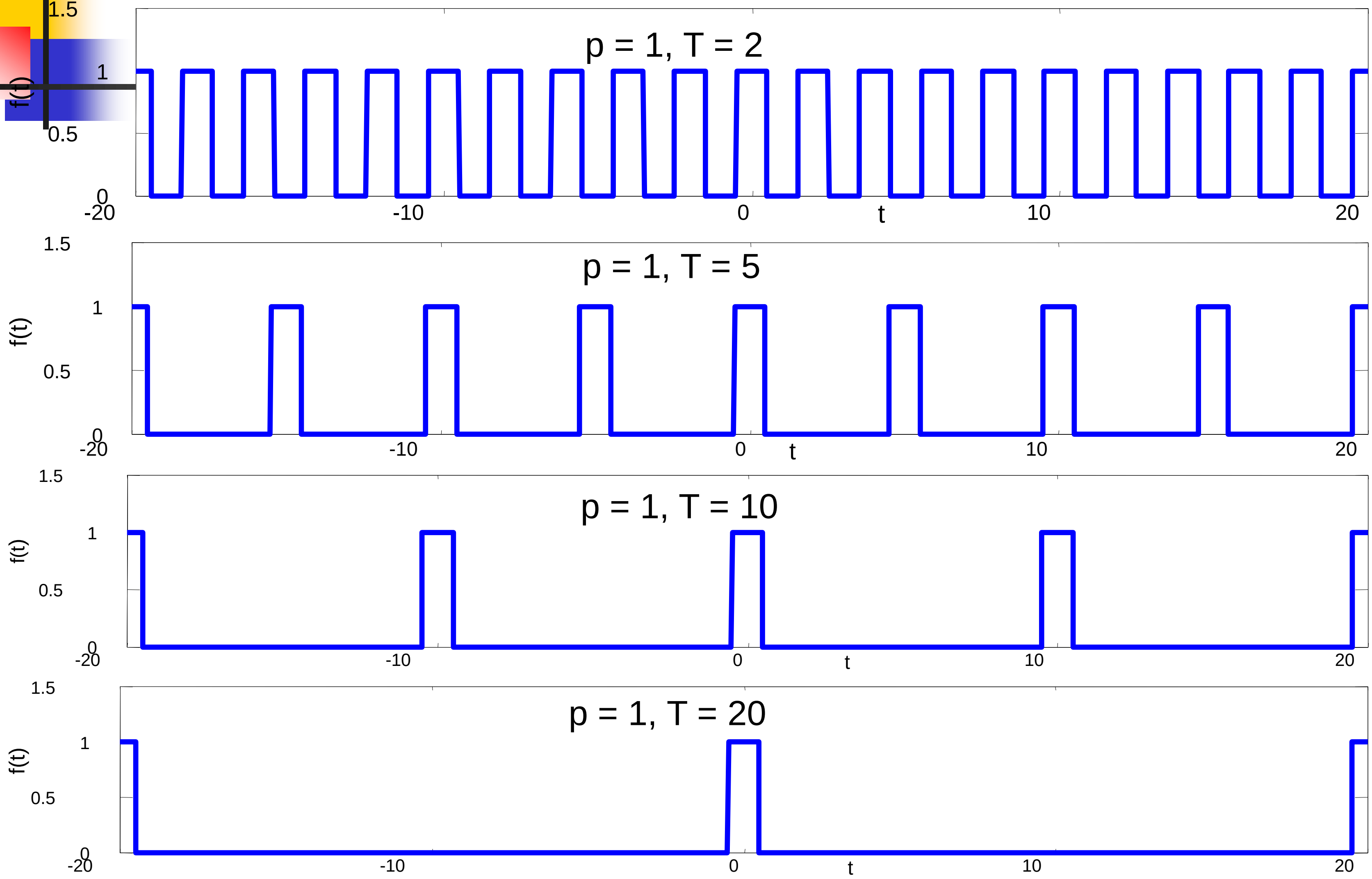
$$c_n = \left(\frac{p}{T}\right)\frac{sen(n\omega_0 \frac{p}{2})}{(n\omega_0 \frac{p}{2})}$$

El espectro de frecuencia correspondiente lo obtenemos (en este caso) graficando c_n contra $w = nw_0$.

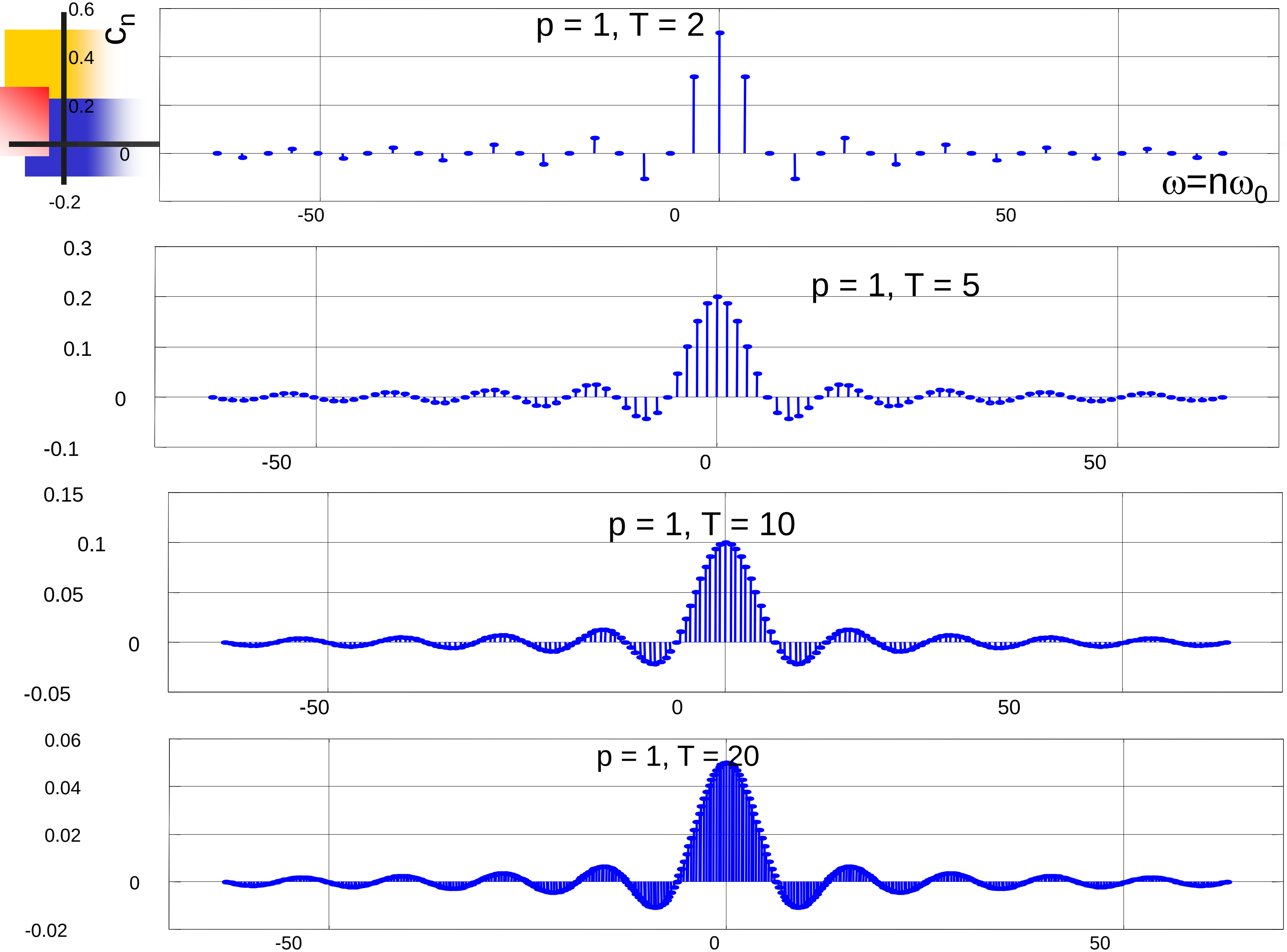
Espectro del tren de pulsos para p = 1, T = 2



Si el período del tren de pulsos aumenta...

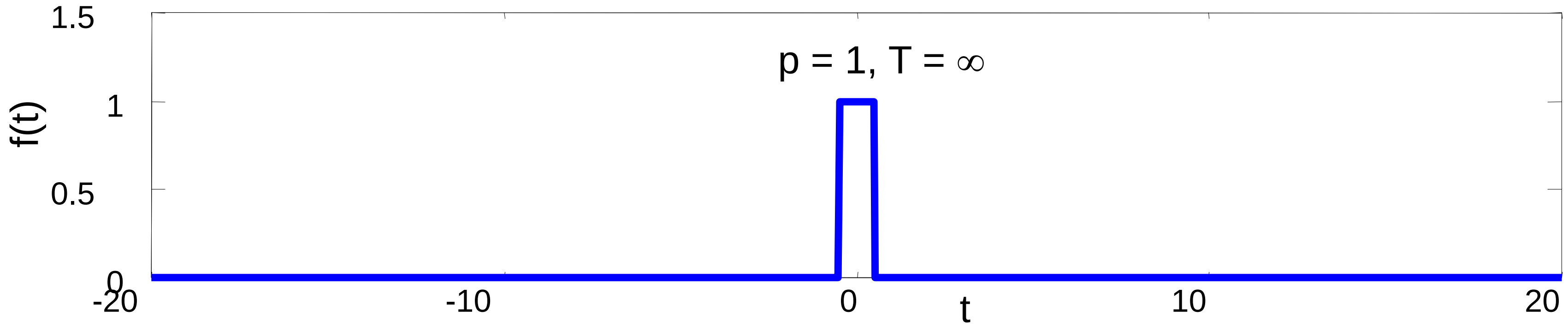


...el espectro se hace más "denso".



Derivación

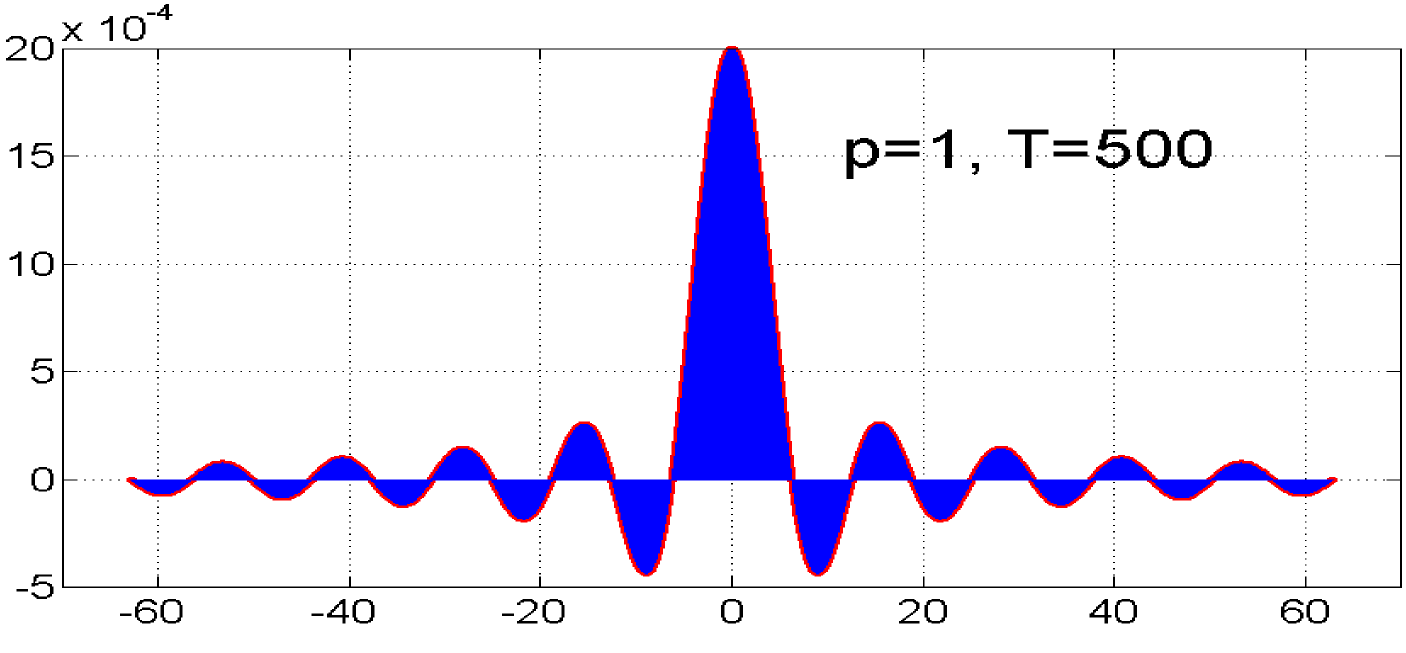
En el límite cuando $T \to \infty$, la función deja de ser periódica:



¿Qué pasa con los coeficientes de la serie de Fourier?

Derivación

Si se hace T muy grande ($T\rightarrow\infty$), el espectro se vuelve "*continuo*":



Resumiendo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Identidad de Fourier o antitrans-formada de Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

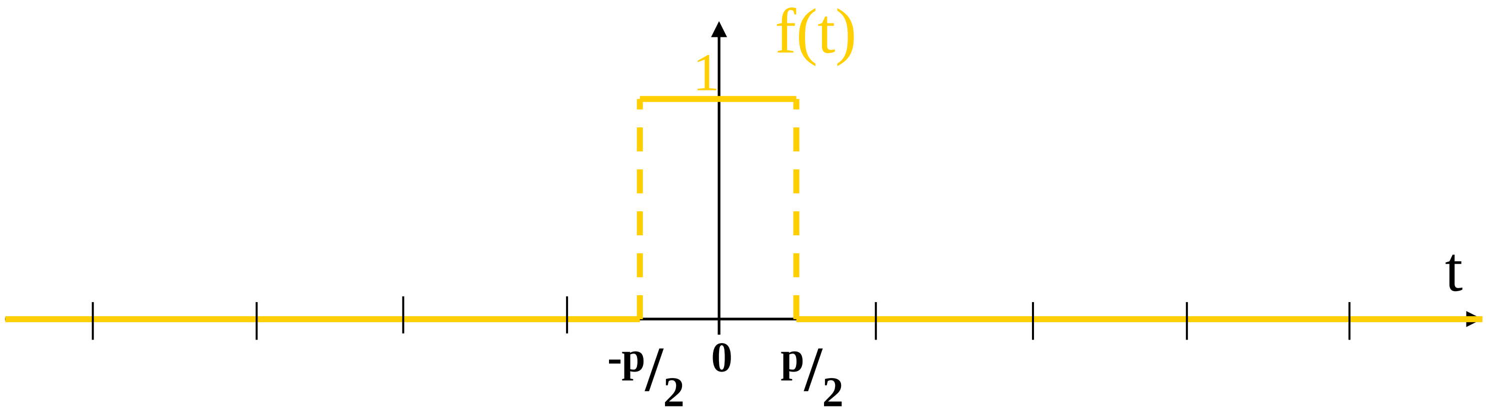
Transformada de Fourier

Estas expresiones nos permiten calcular la expresión F(w) (dominio de la frecuencia) a partir de f(t) (dominio del tiempo) y viceversa.

Par de TF

- Las ecuaciones anteriores son conocidas como el par de transformadas de Fourier. Las señales periódicas las expresamos como una suma de exponenciales complejas de amplitud a_k y para un conjunto discreto de frecuencias relacionadas armónicamente. Para señales aperiódicas, las exponenciales complejas ocurren para una sucesión contínua de frecuencias y de “amplitud” $X(jw)dw/2\pi$

Ejemplo. Calcular F(ω) para el pulso rectangular f(t) siguiente:



Solución. La expresión en el dominio del tiempo de la función es:

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<\frac{-p}{2}\\ 1 & \frac{-p}{2}<t<\frac{p}{2}\\ 0 & \frac{p}{2}<t\end{cases}$$

Integrando:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-p/2}^{p/2} e^{-i\omega t} dt$$

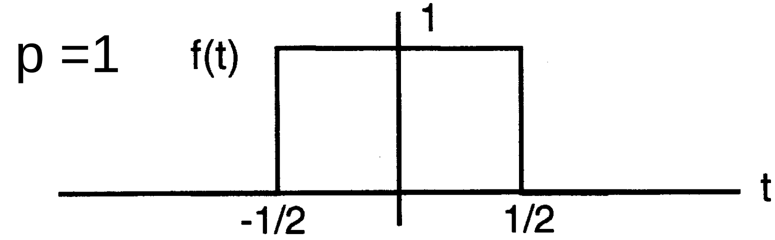
$$= \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-p/2}^{p/2} = \frac{1}{-i\omega} \left(e^{-i\omega p/2} - e^{i\omega p/2} \right)$$

Usando la fórmula de Euler:

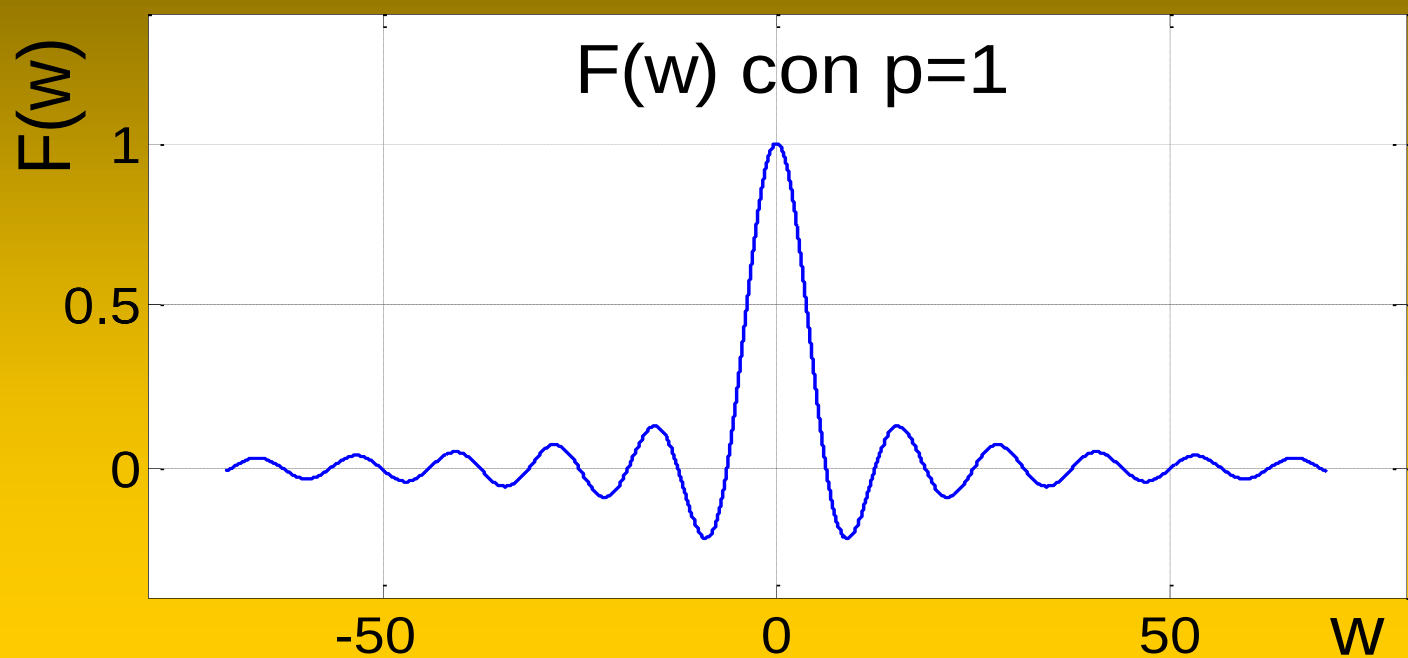
$$sen(\omega p/2) = \frac{e^{i\omega p/2} - e^{-i\omega p/2}}{2i}$$

$$F(\omega) = p \frac{sen(\omega p/2)}{\omega p/2} = p \operatorname{sinc}(\omega p/2)$$

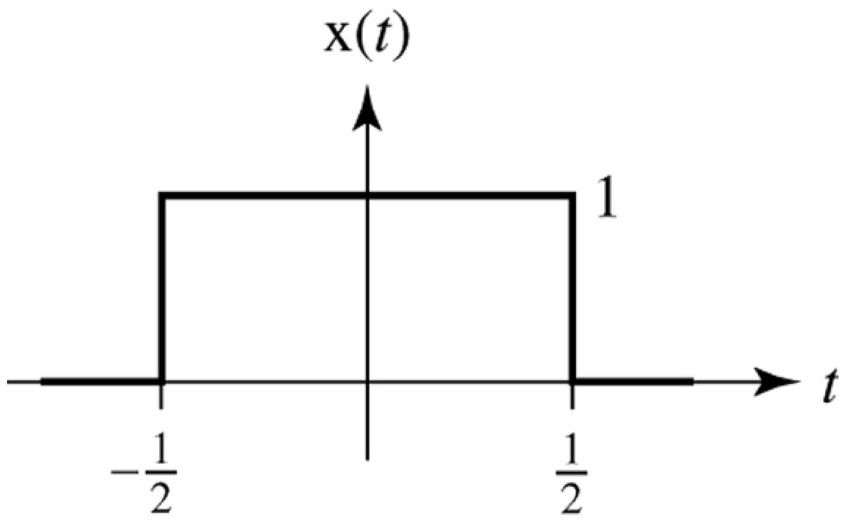
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{-p}{2} \\ 1 & \frac{-p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t \end{cases}$$

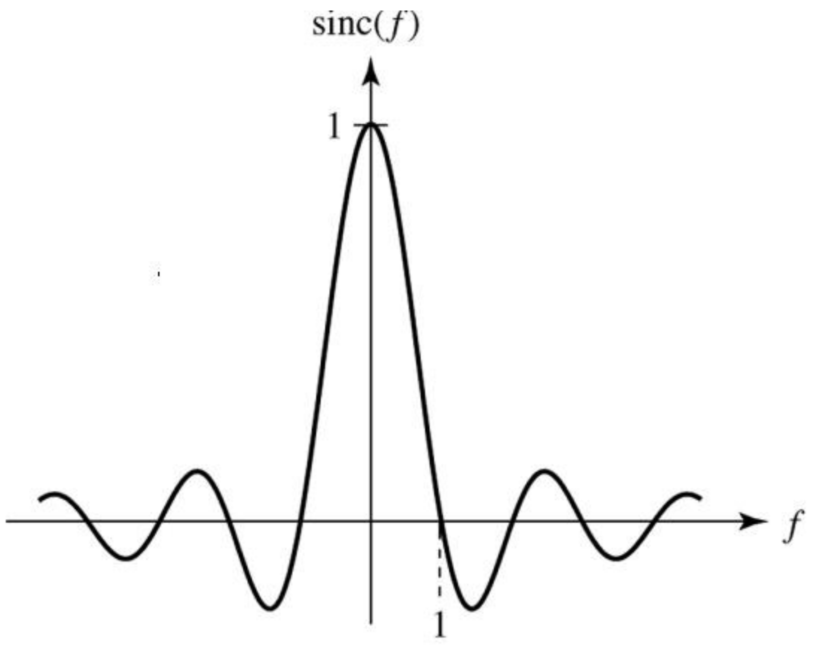


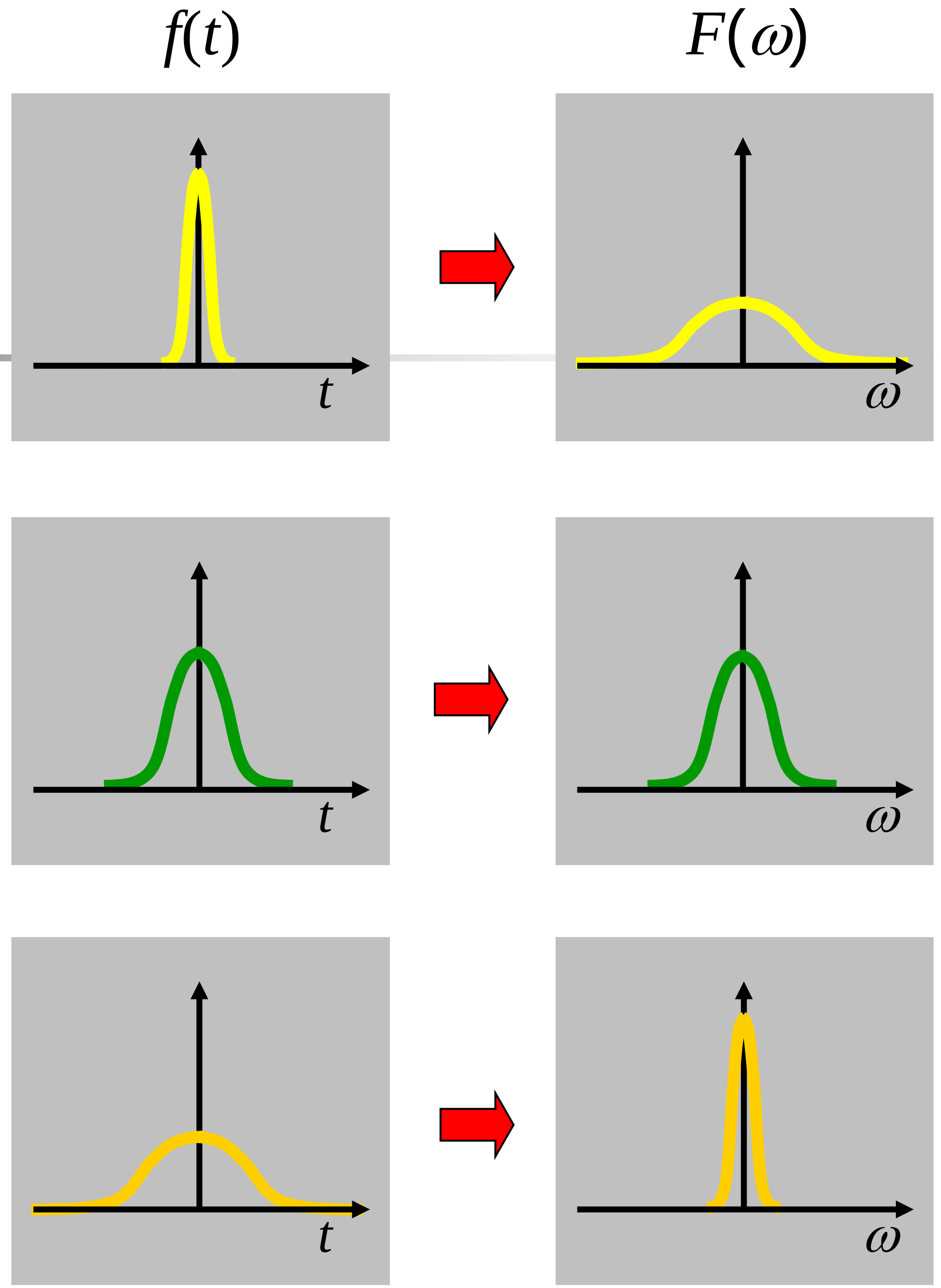
$$F(\omega) = p\,\mathrm{sinc}(\omega p / 2)$$



Ejemplo







Mientras más corto es el pulso, más ancho es el espectro.

Esta es la esencia del principio de incertidumbre en mecánica cuántica.

Linealidad

- Si $x(t) \longleftrightarrow X(jw)$
  y
- $y(t) \longleftrightarrow Y(jw)$
  entonces
- $ax(t)+by(t) \longleftrightarrow aX(jw)+bY(jw)$

Desplazamiento de tiempo

- Si $x(t) \longleftrightarrow X(jw)$

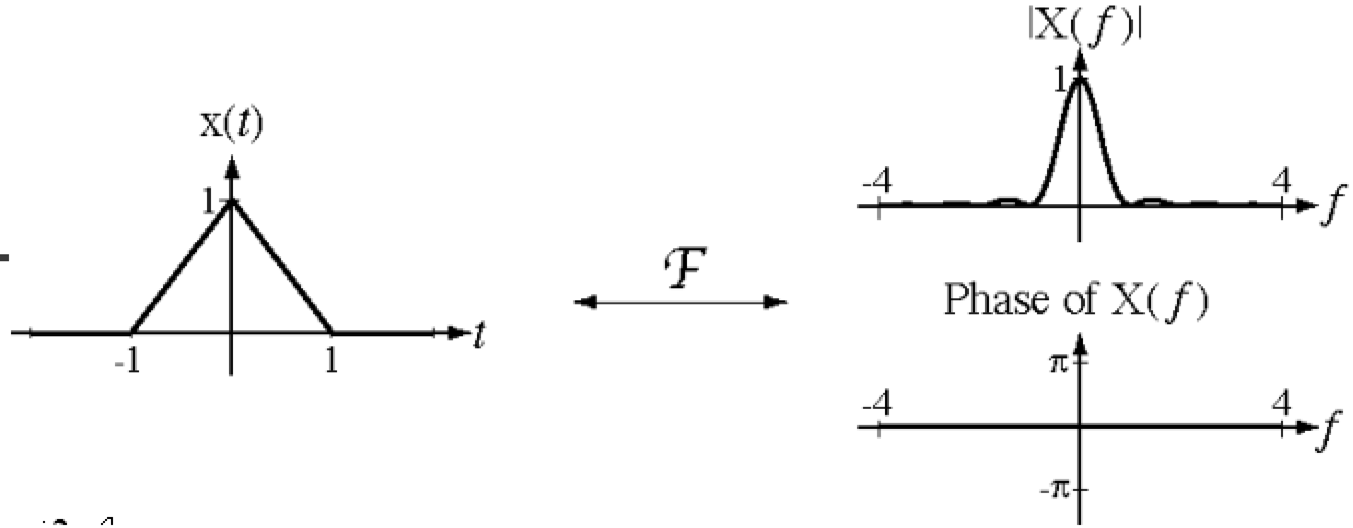
  entonces

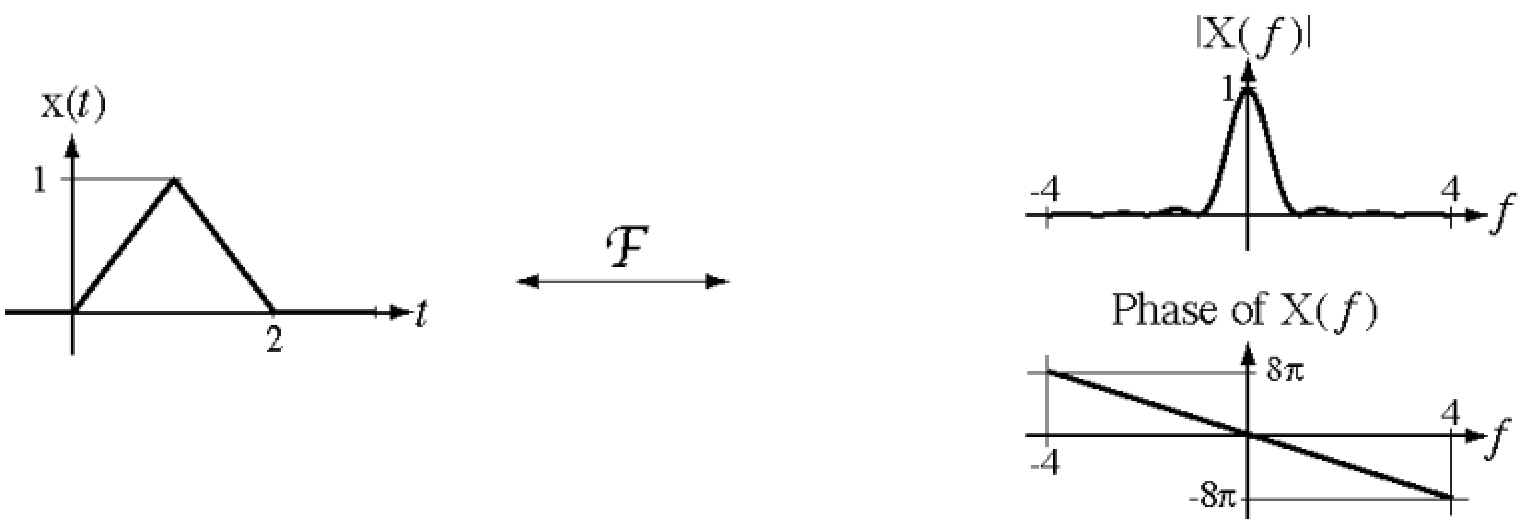
- $x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-jwto}\,X(jw)$

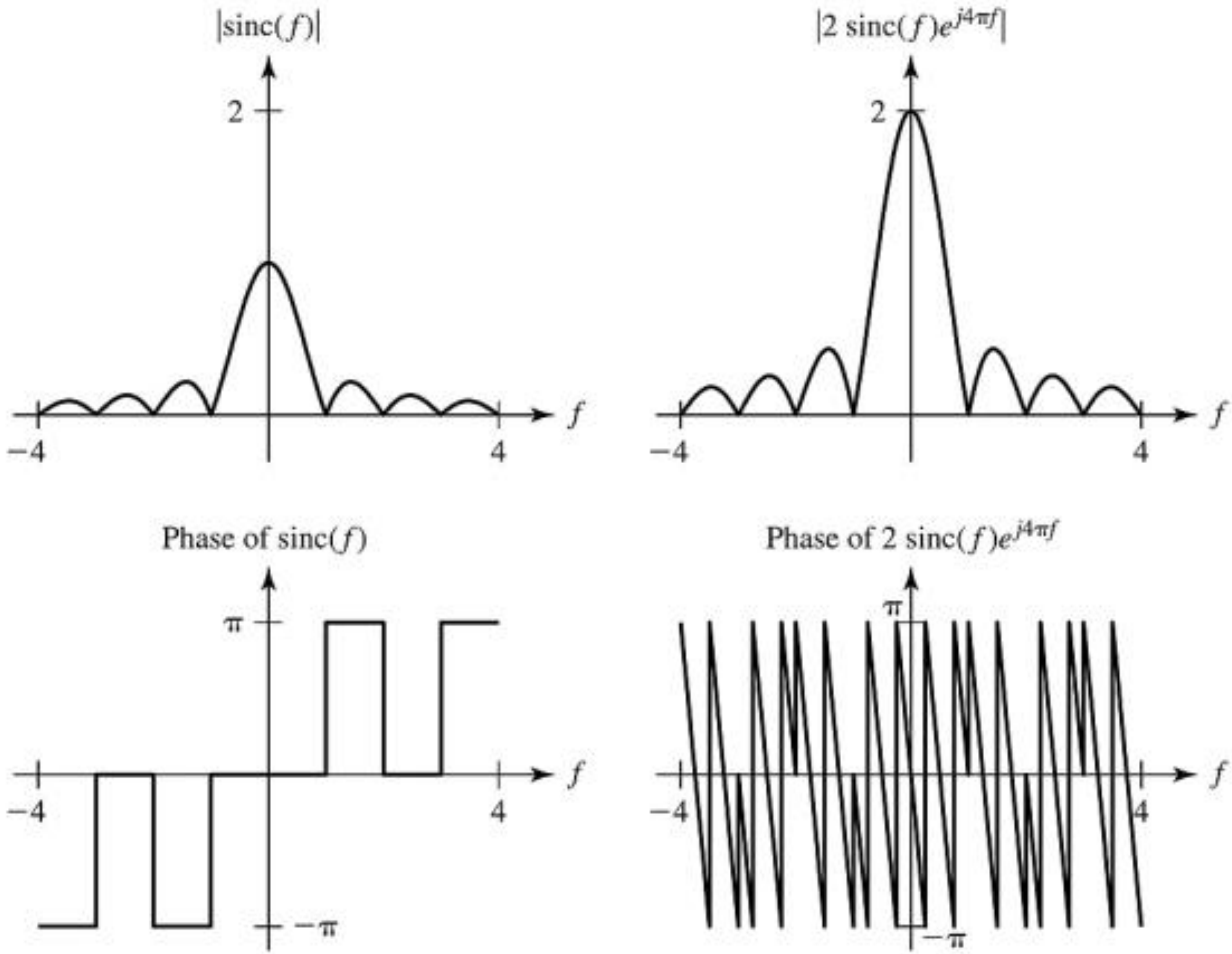
Diferenciación e integración

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow jwX(jw)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) \leftrightarrow \frac{1}{jw} X(jw) + \pi X(0)\delta(w)$$

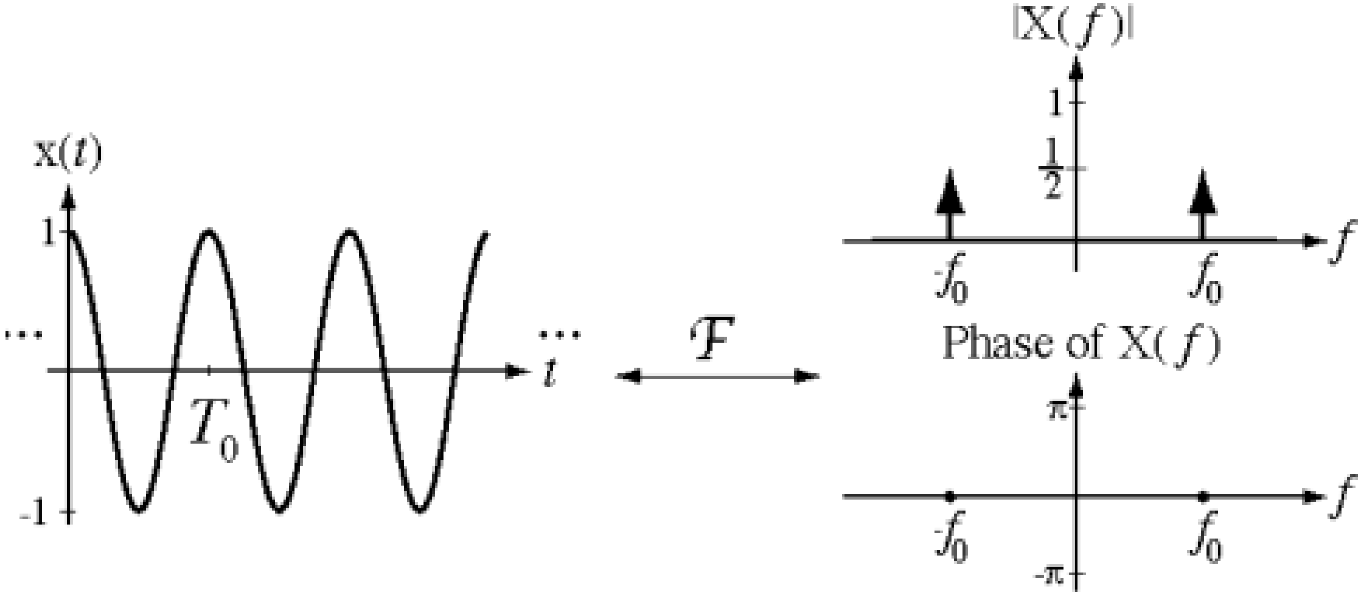

x(t)
1
-1
1
t
F
|X(f)|
1
-4
4
f
Phase of X(f)
π
-4
4
f
-π


x(t)
1
2
t
F
|X(f)|
1
-4
4
f
Phase of X(f)
8π
4
f
-4
-8π

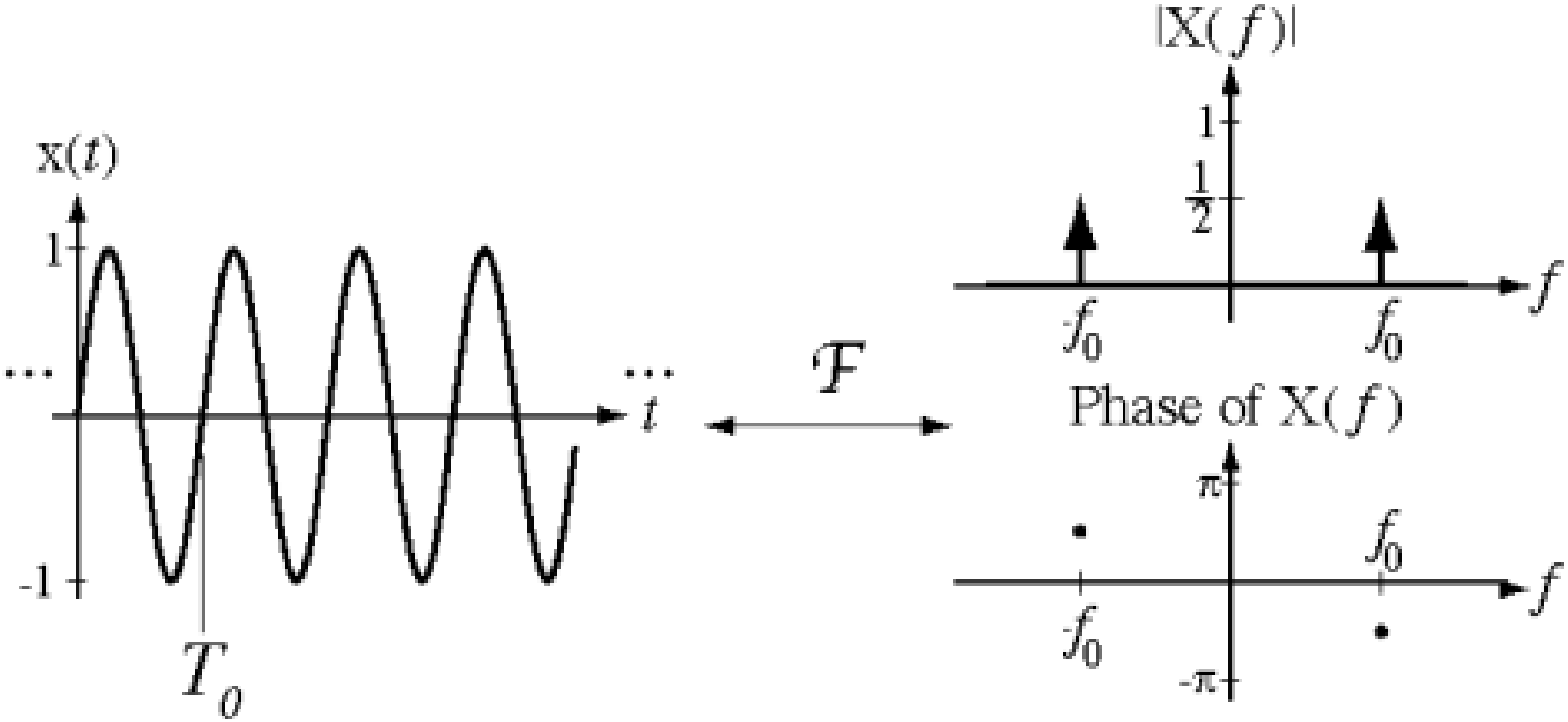


$|\mathrm{sinc}(f)|$
$|2\,\mathrm{sinc}(f)e^{j4\pi f}|$
2
2
-4
4
f
-4
4
f
Phase of sinc(f)
Phase of 2 sinc(f)$e^{j4\pi f}$
π
$-\pi$
π
$-\pi$
-4
4
f
-4
4
f

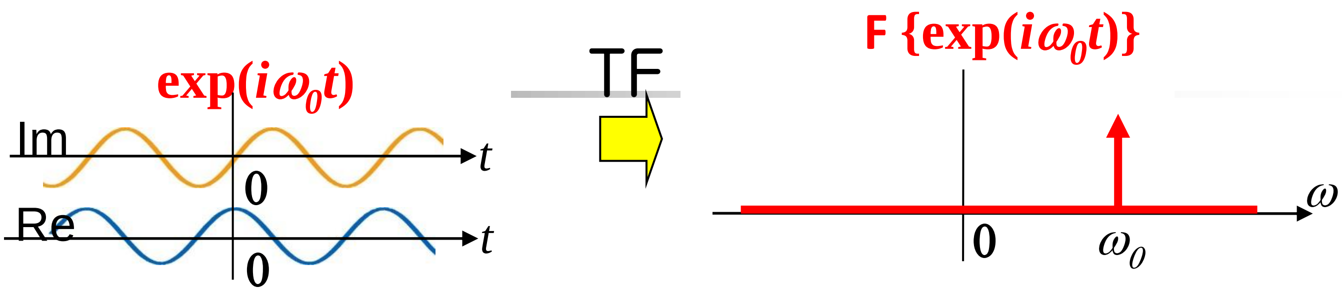
$\cos 2\pi f_0 t \longleftrightarrow \frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$



$\text{sen}\ 2\pi f_0 t \longleftrightarrow \frac{1}{2}j[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)]$



En forma más general:



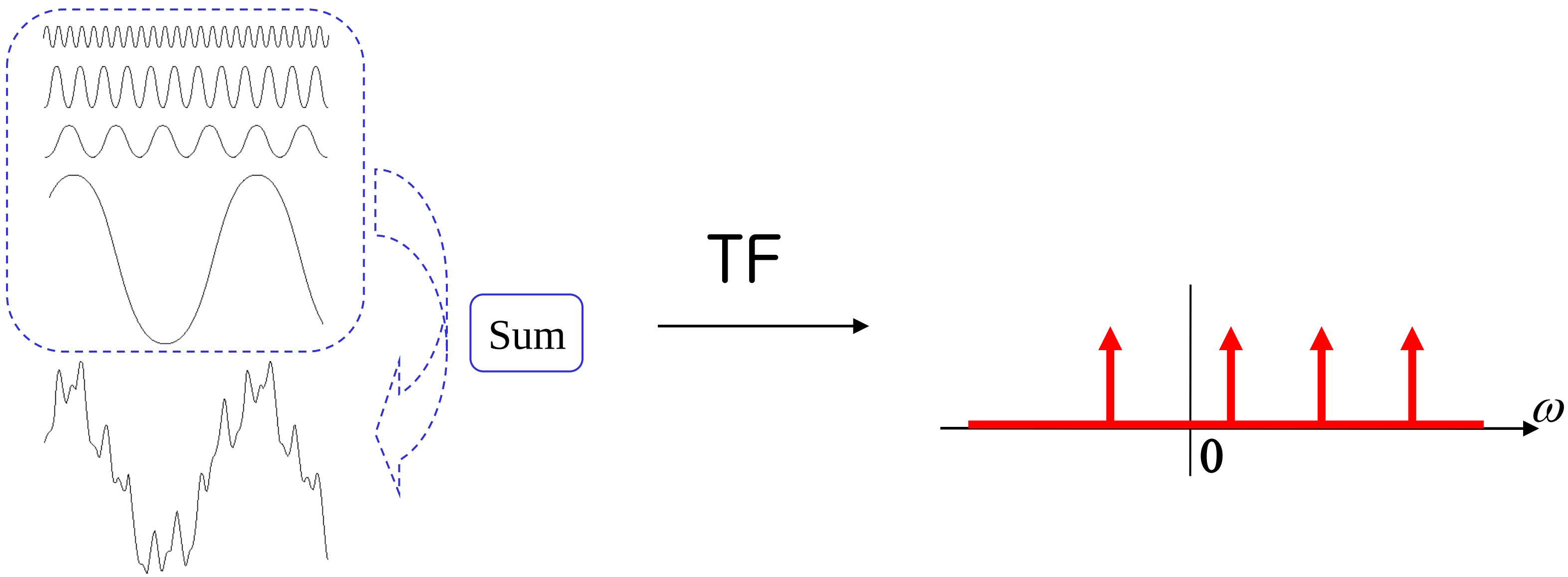
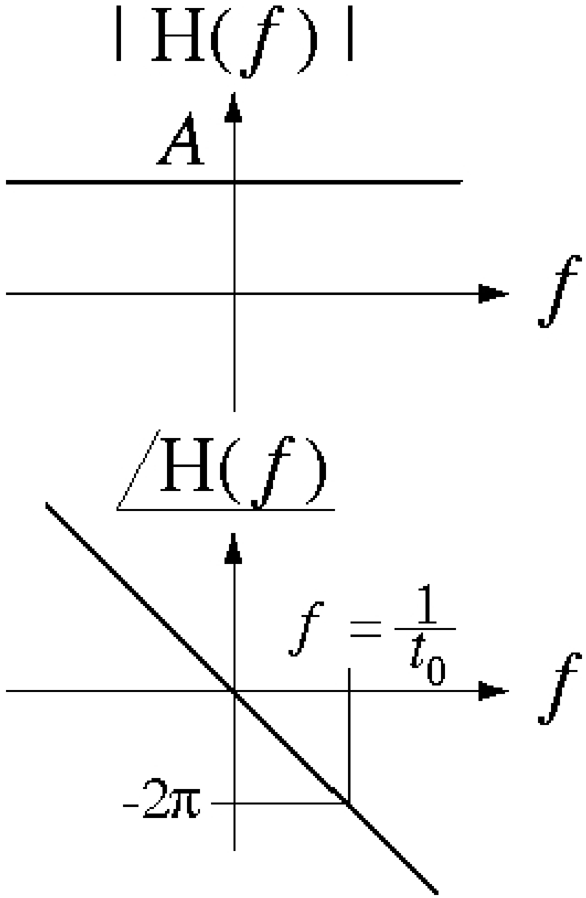


FIGURE 4.1 The function at the bottom is the sum of the four functions above it. Fourier's idea in 1807 that periodic functions could be represented as a weighted sum of sines and cosines was met with skepticism.

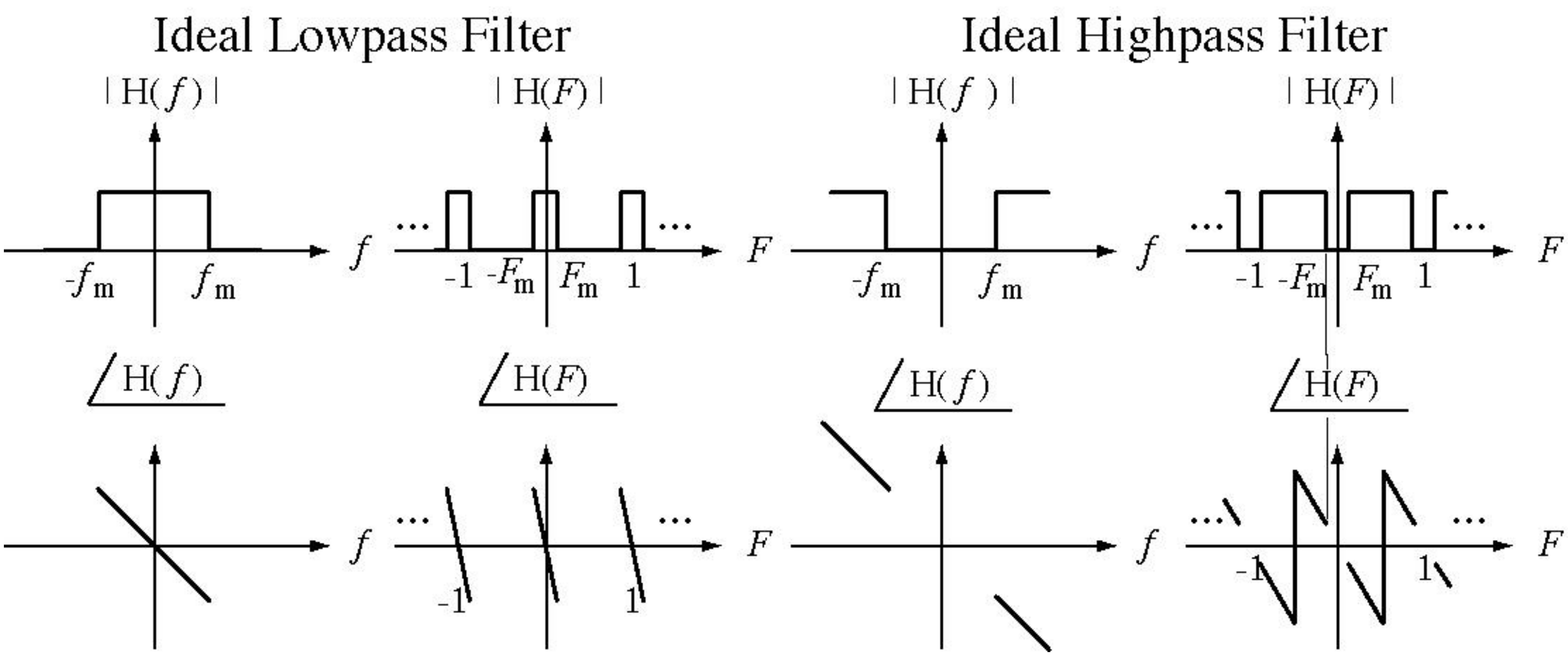
Filtros ideales en TC

- Filtro: separa lo deseado de lo que no es deseado.
- En señales un filtro separa señales en un rango de f, de señales en otro rango de f.
- Un filtro ideal “pasa” toda la señal en su banda de paso sin distorsión y bloquea la señal fuera de su banda.

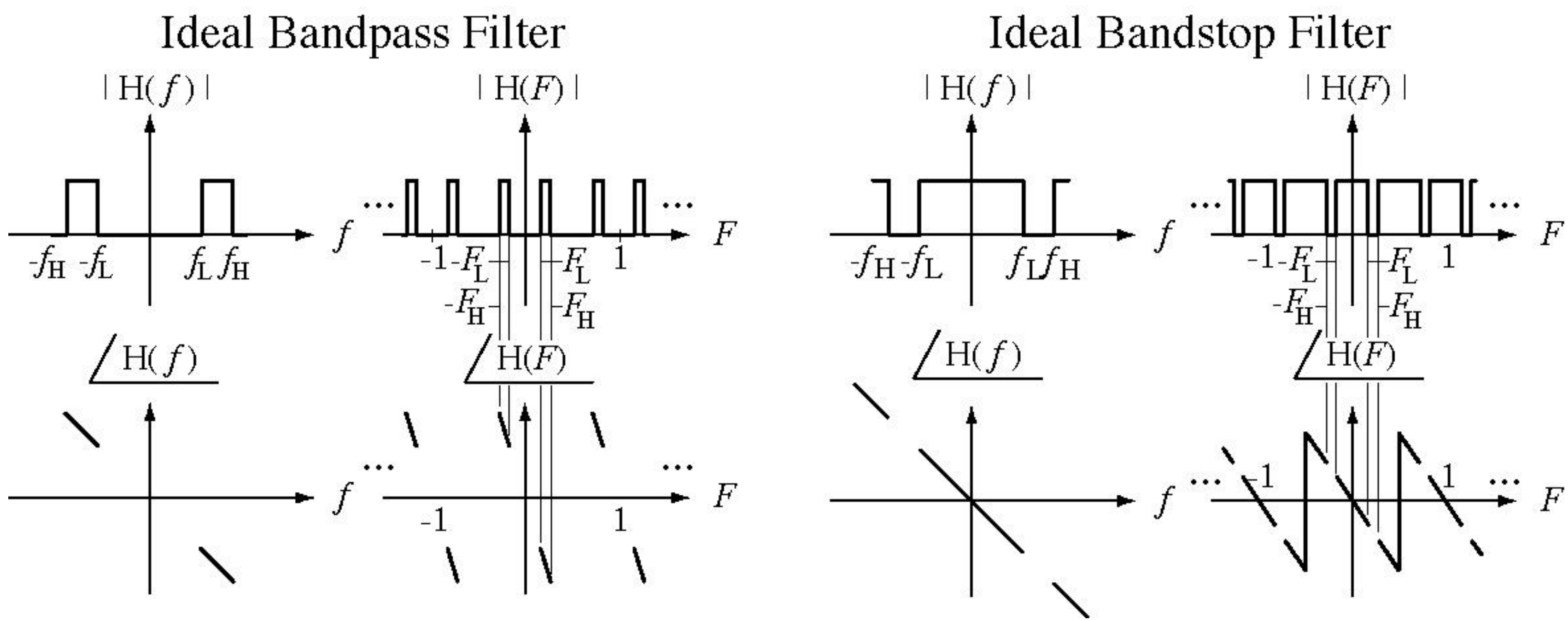
Filtro ideal



Pasa bajos ideal – Pasa altos ideal



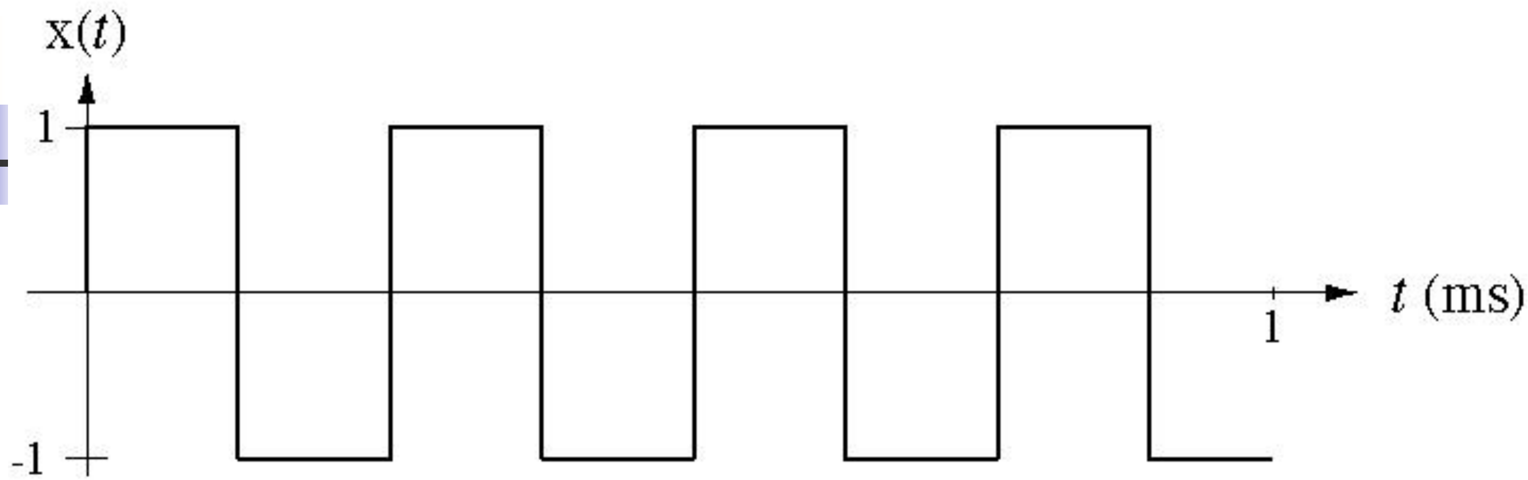
Pasa banda ideal – Rechazo de banda ideal



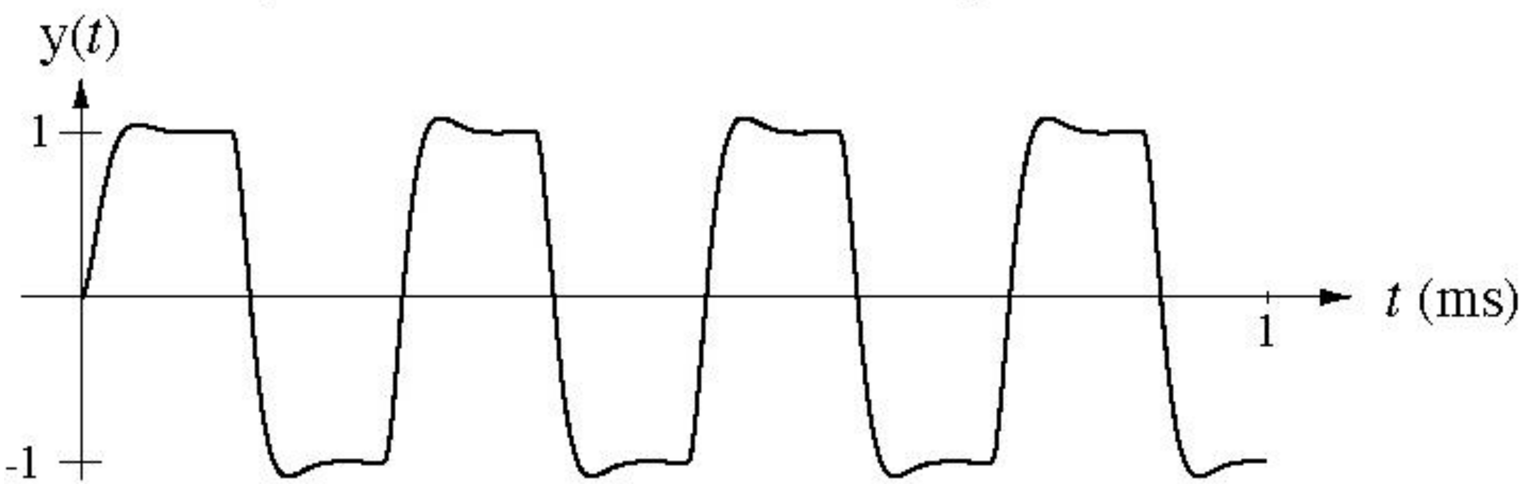
Ancho de banda

- Rango de f.
- Rango de frecuencias que deja pasar el filtro ó rango de frecuencias presentes en la señal.

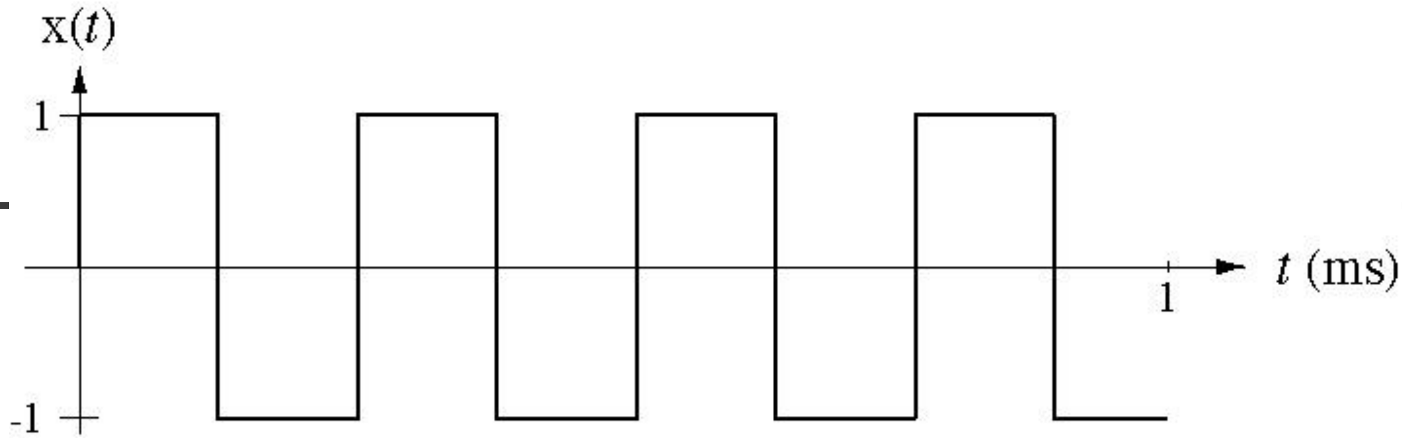
Excitation of a Causal Lowpass Filter



Response of a Causal Lowpass Filter



Excitation of a Causal Highpass Filter



Response of a Causal Highpass Filter