Electrónica
Curso 2023

Teorema del muestreo

Conversión A/D

Muestreo

Vivimos en un mundo de tiempo continuo: la mayoría de las señales que nos encontramos son señales de tiempo continuo; por ejemplo, $x(t)$. ¿Cómo las convertimos en señales de tiempo discreto $x[n]$?

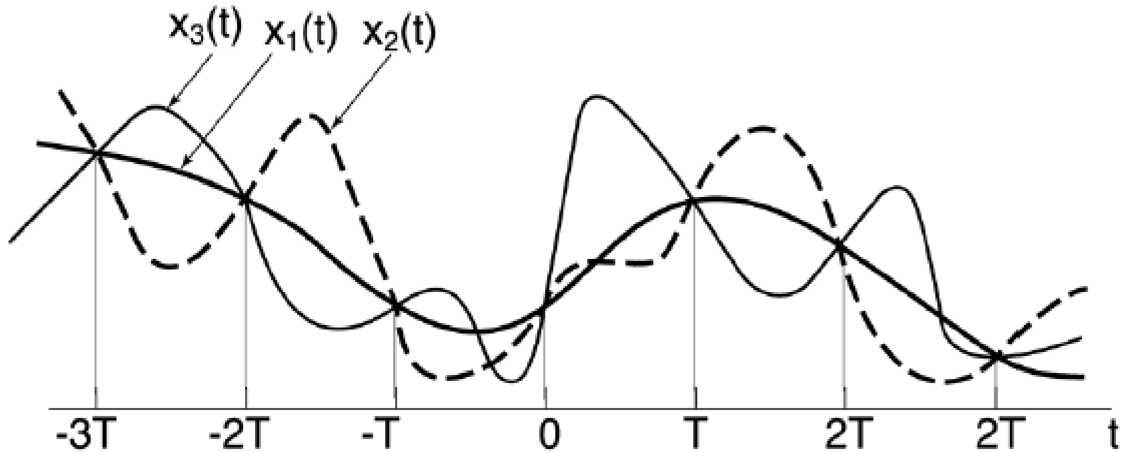
— Muestreo, tomando instantáneas de $x(t)$ cada T segundos.

T – periodo de muestreo

$x[n] \equiv x(nT)$, $n = \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$ — muestras espaciadas a intervalos regulares

¿Por qué, o cuándo, se considera adecuado un conjunto de muestras?

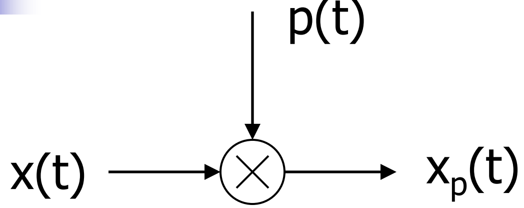
- Observación: *Muchas* señales tienen las mismas muestras



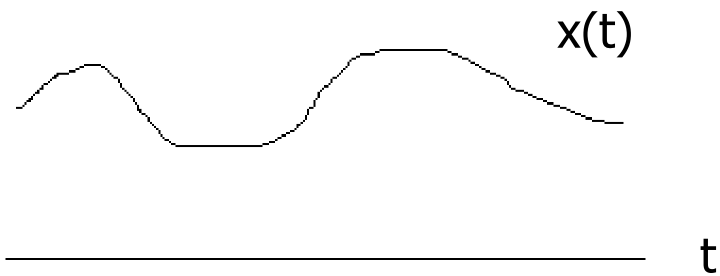
- Las técnicas de muestreo dejan de lado mucha información
  – se pierden todos los valores de $x(t)$ entre los puntos de muestreo.

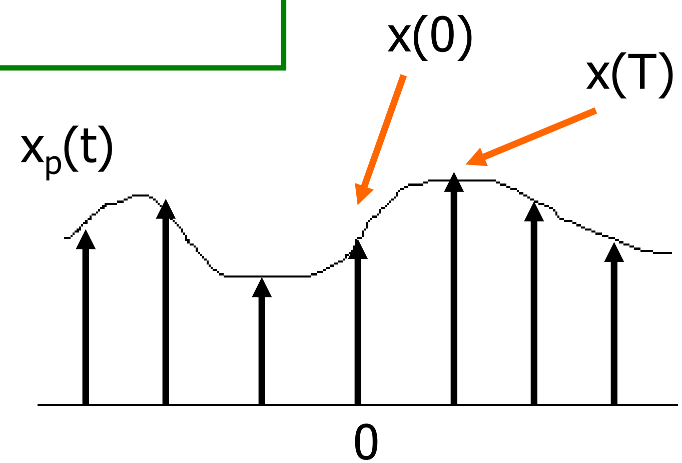
- **Cuestiones clave para el muestreo**:
  ¿Bajo qué condiciones podemos reconstruir la señal original $x(t)$ en tiempo continuo a partir de sus muestras?

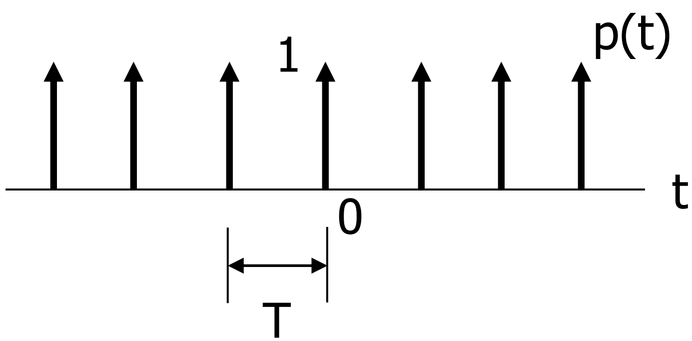
Muestreo ideal



La señal x(t) es multiplicada por p(t), obteniendo la señal muestreada $x_p(t)$







p(t) es un tren de impulsos ideales de período T, que es el intervalo de muestreo

Muestreo ideal

$$x_p(t) = x(t)\,p(t)$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\delta(t - nT)$$

$$X_p(f) = [X(f) * P(f)]$$

Si multiplicamos en el tiempo, convolucionamos en frecuencia

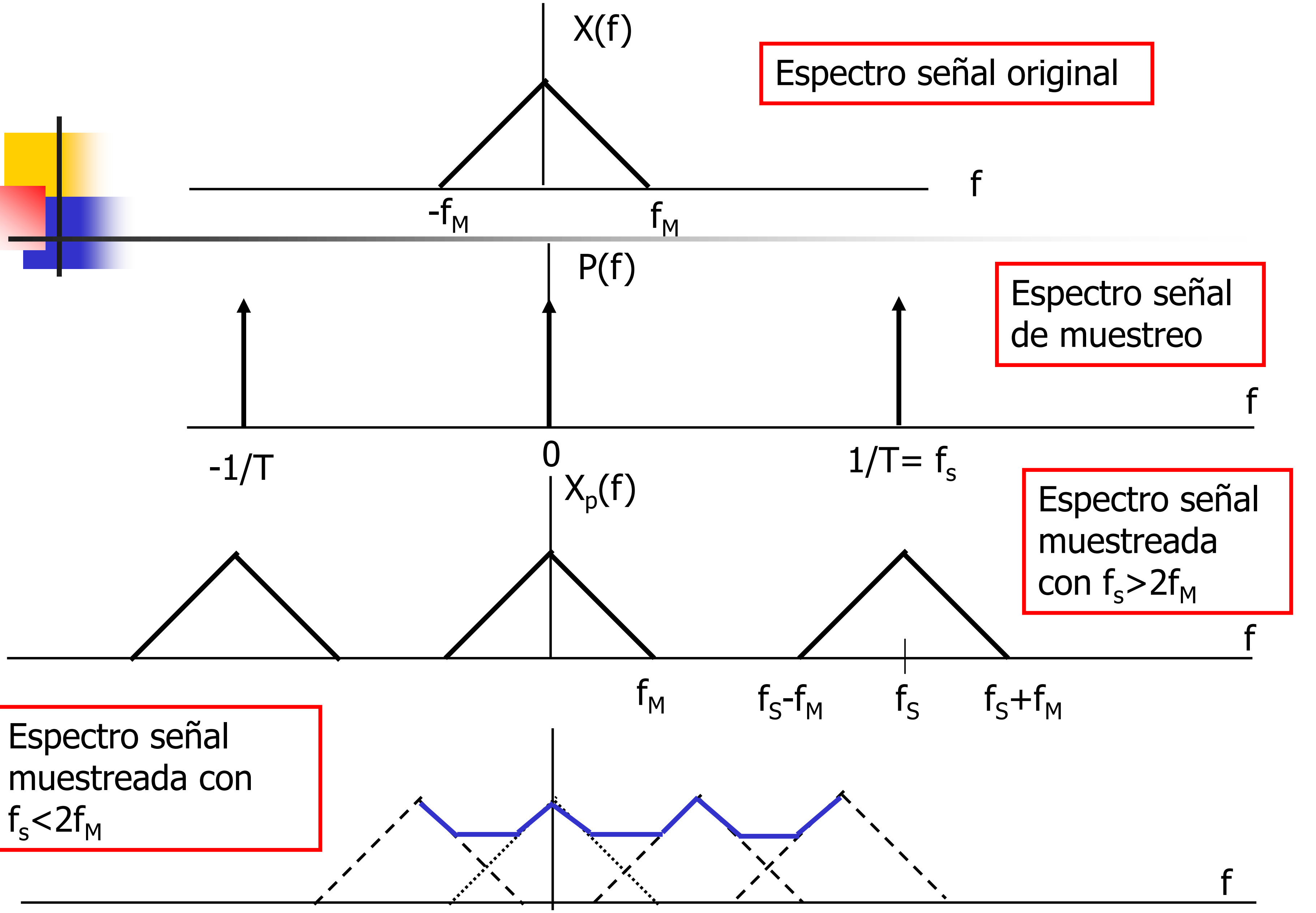
Muestreo ideal

$$P(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-k\,f_s)$$

Cada convolución con un impulso, reproduce la otra función desplazada a la posición del impulso.

$$X_p(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(w-k\,f_s)$$

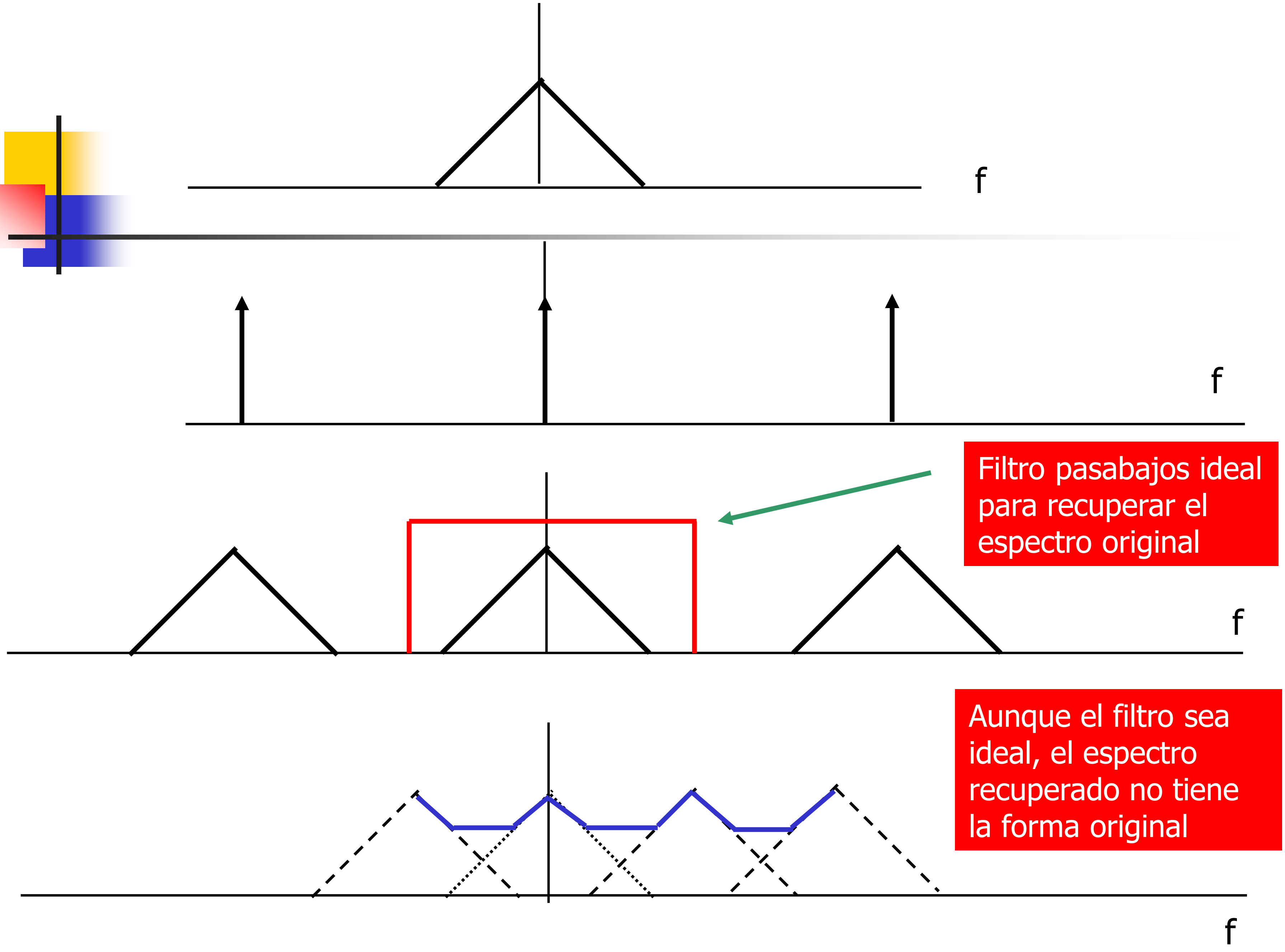
El espectro en f de la señal muestreada $x_p(t)$, es el espectro de la señal original X(w) desplazado en múltiplos de la f de muestreo $w_s=1/T$


X(f)
Espectro señal original
f
-fM
fM
P(f)
Espectro señal de muestreo
f
-1/T
0
1/T= fs
Xp(f)
Espectro señal muestreada con fs>2fM
f
fM
fS-fM
fS
fS+fM
Espectro señal muestreada con fs<2fM
f

Vemos que el efecto del muestreo ideal sobre el espectro en f original, es repetirlo alrededor de la frecuencia de muestreo f_S.

Si disminuimos el valor de f_S los espectros se empiezan a acercar y no hay problema hasta $f_S-f_M=f_M$

Como vemos en el espectro $X_p(f)$ de la figura anterior, podremos recuperar X(f) original siempre y cuando $f_S-f_M>f_M$ y los espectros repetidos no se solapen. En efecto si disminuimos f_S hasta llegar a un punto en que se mezclen, espectro en azul, no será posible recuperar el espectro original.


f
f
Filtro pasabajos ideal para recuperar el espectro original
f
Aunque el filtro sea ideal, el espectro recuperado no tiene la forma original
f

Teorema del muestreo

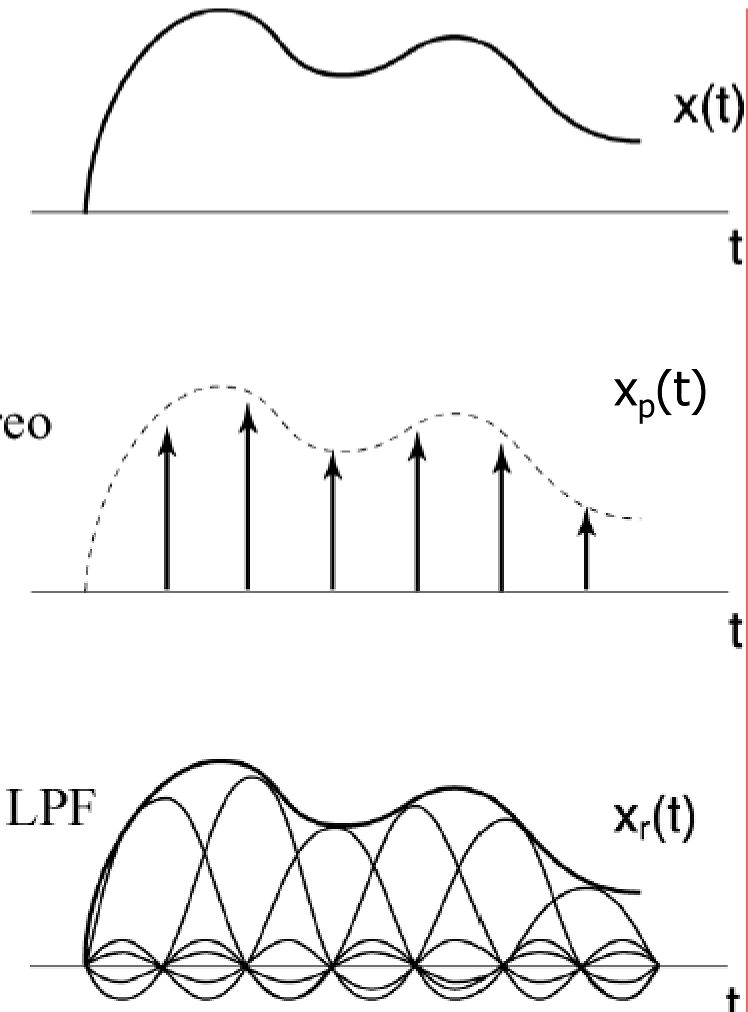
- Si $x(t)$ es de banda limitada con $X(f)=0$ para $|f|>f_M$ entonces $x(t)$ está unívocamente determinada por sus muestras $x(nT)$, $n=0,\pm1,\pm2.....$ Si $f_s>2f_{M.}$
- Para recuperar la señal original, se procesan las muestras con un filtro pasabajos ideal, con f de corte $>f_M$ y menor que $f_s-f_{M.}$
- f_s se la conoce como la frecuencia de Nyquist.

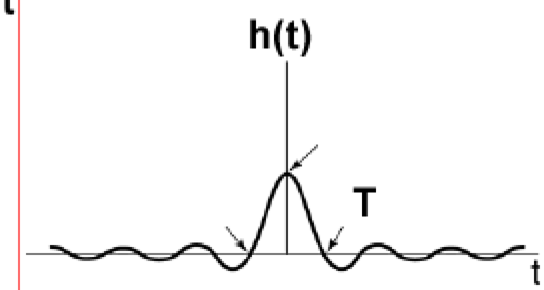
Ilustración gráfica de la interpointerpolación en el dominio del tiempo

- Señal de tiempo continuo original

Después del muestreo

Después de pasar el LPF





Respuesta al impulso de un filtro pasabajos ideal

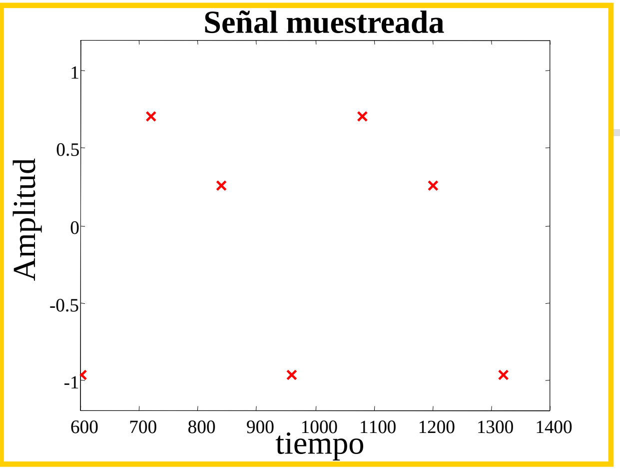
Interpolación

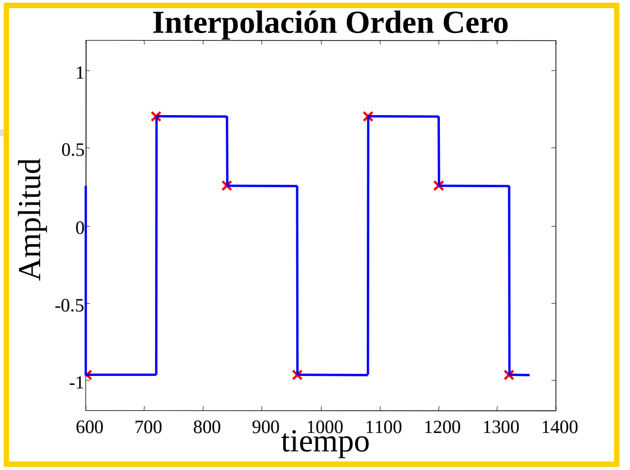
- Vimos de la diapositiva anterior que la función de interpolación es sent/t, para el caso del filtro pasabajos ideal, sumando precursores y postcursores. Este filtro es no-causal.
- En un filtro real la transferencia en f no será rectangular (rojo), pues su respuesta al impulso será 0 para t<0.

Interpolación vista en el dominio del tiempo

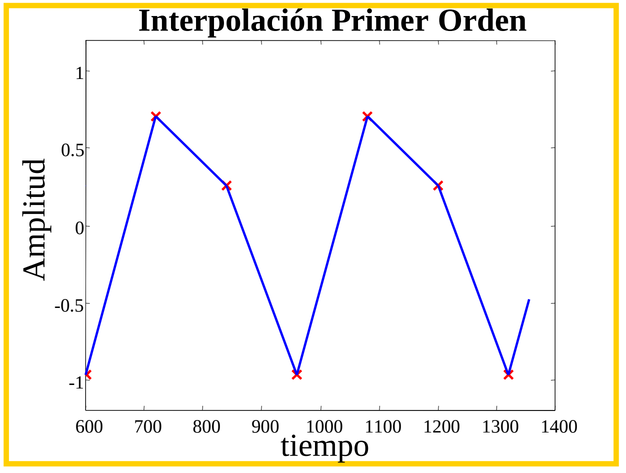
Interpolación ≡ reconstrucción (aproximada ó exacta) de una función a partir de sus muestras.

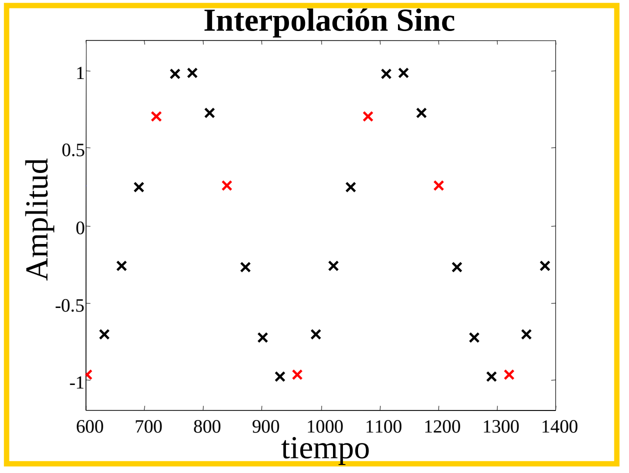
- <u>Retenedor de Orden Cero</u>: retiene el valor de la muestra hasta la próxima. Es el más simple.





- <u>Interpolación Lineal</u>: los puntos adyacentes se conectan con una línea recta.





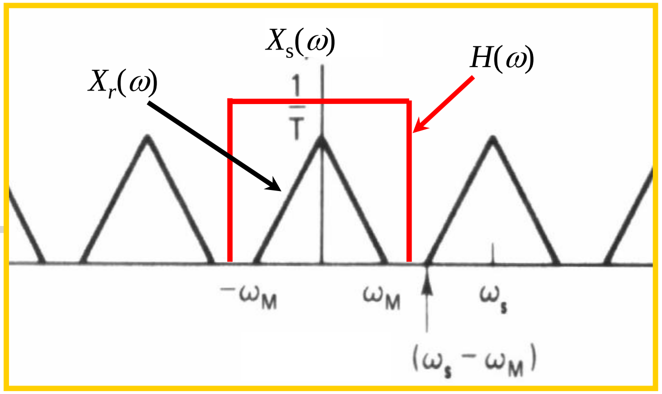
- <u>Interpolación de mayor Orden</u>: los puntos se unen mediante polinomios de grado mayor u otras funciones matemáticas.

- <u>Interpolación Sinc</u>: cada muestra corresponde al peso de una **sinc** centrada en el instante de muestreo, y los valores intermedios se otienen sumando las contribuciones de cada una de estas funciones.

INTERPOLACION SINC

Para reconstruir espectralmente la señal se emplea un LPF ideal

$\Rightarrow$ $X_r(f) = X_s(f)\cdot H(f)$ con $H(f) = \text{rect}\,[f/(2f_c)]$ y $f_c = f_s/2$



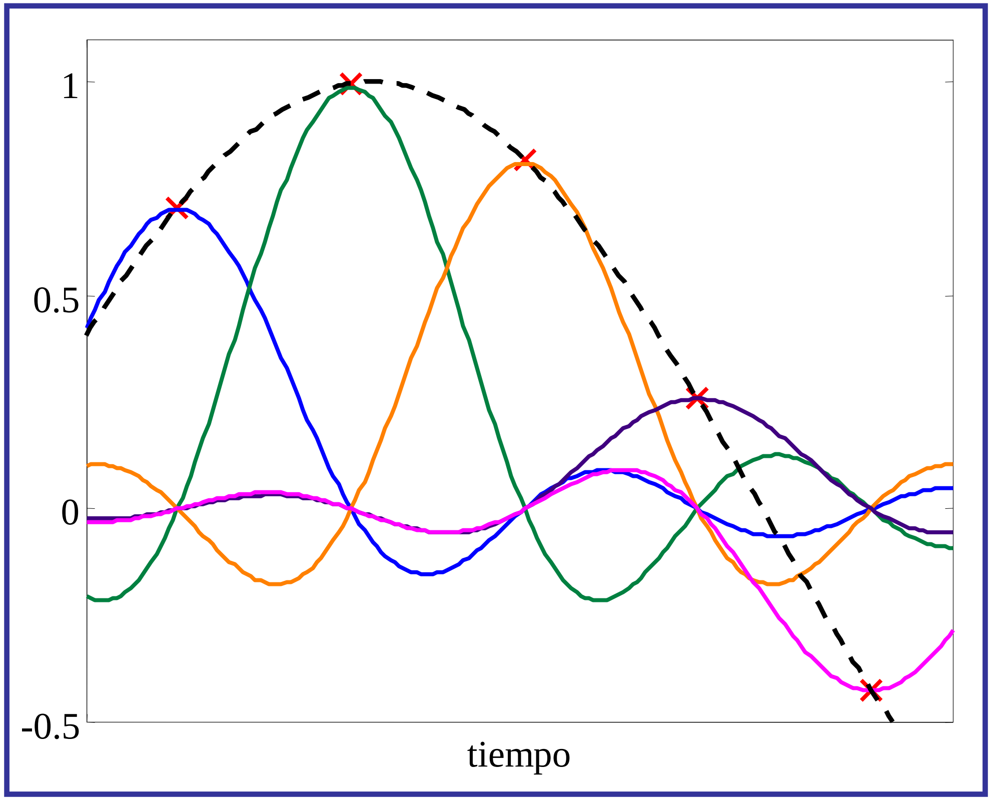
$$x_{r(t)} = x_s(t) * h(t)$$
$$= h(t) * \sum_n x(nT_s)\cdot\delta(t-nT_s)$$
$$= \sum_n x(nT_s)\cdot h(t-nT_s)$$

$$h_r(t) = \frac{T_s\omega_c}{\pi}\,\text{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right)$$

$$x_r(t) = \sum_n x(nT_s)\frac{T_s\omega_c}{\pi}\,\text{sinc}\left[\frac{\omega_c(t-nT_s)}{\pi}\right]$$

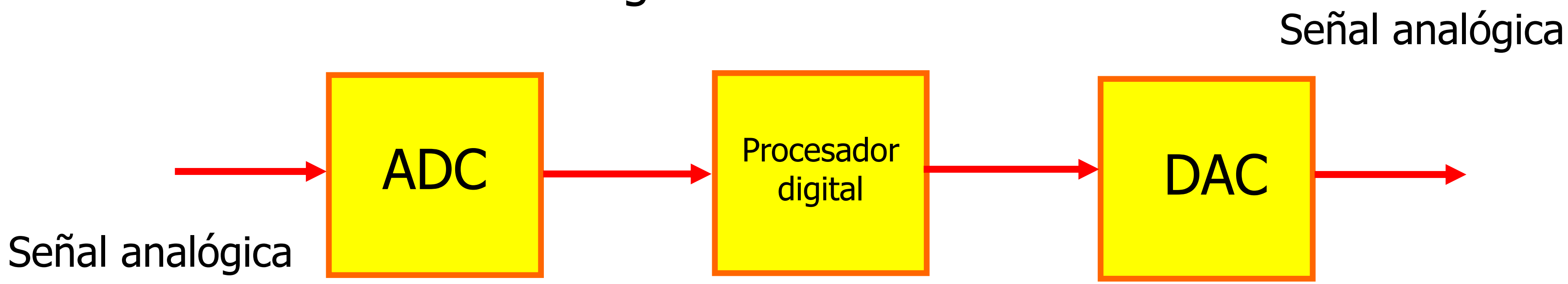
considerando $f_c = f_s/2$:

$$\boxed{x_r(t) = \sum_n x(nT_s)\cdot\text{sinc}(f_s t - n)}$$

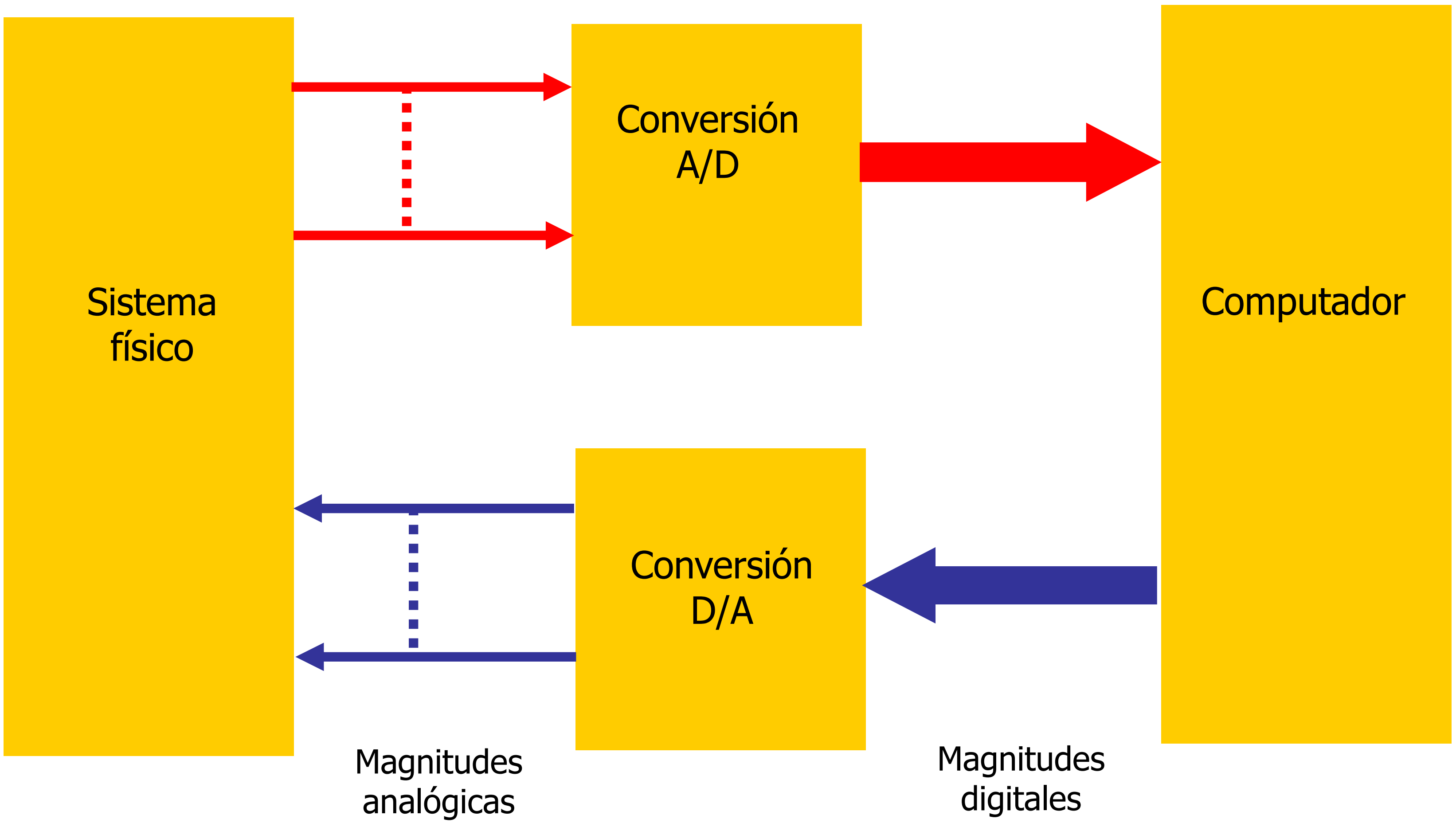


Procesamiento digital

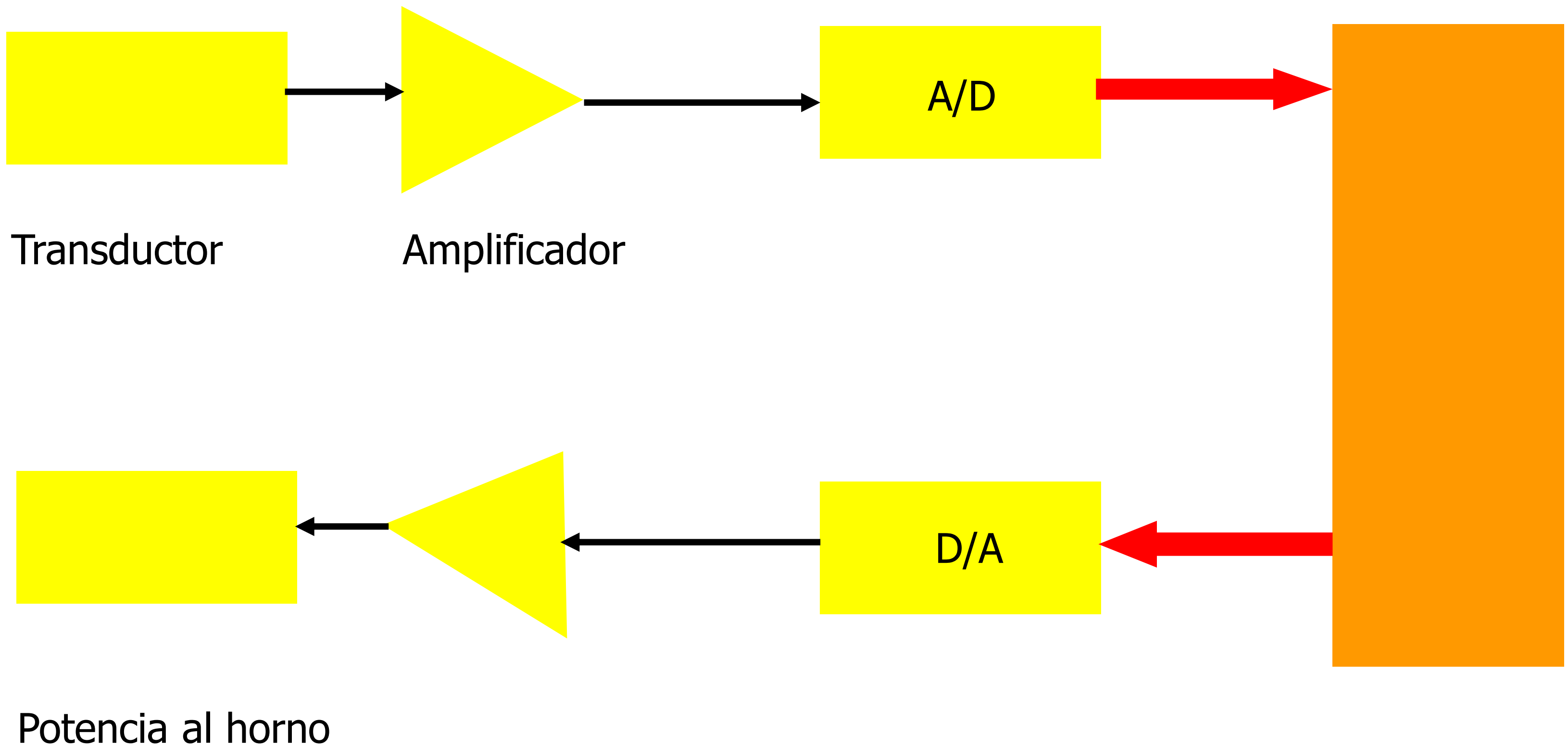
Las técnicas de señales digitales proporcionan un método alternativo para procesar una señal analógica de interés práctico tales como la voz, señales biológicas, sísmicas, del sonar y de los distintos tipos de comunicaciones. Para realizar esto, es necesario antes que nada de una interfaz entre la señal analógica y el procesador digital y viceversa. Estas interfaces son el convertidor Analógico-Digital (ADC) y el convertidor Digital-Analógico (DAC) como se muestra en la figura



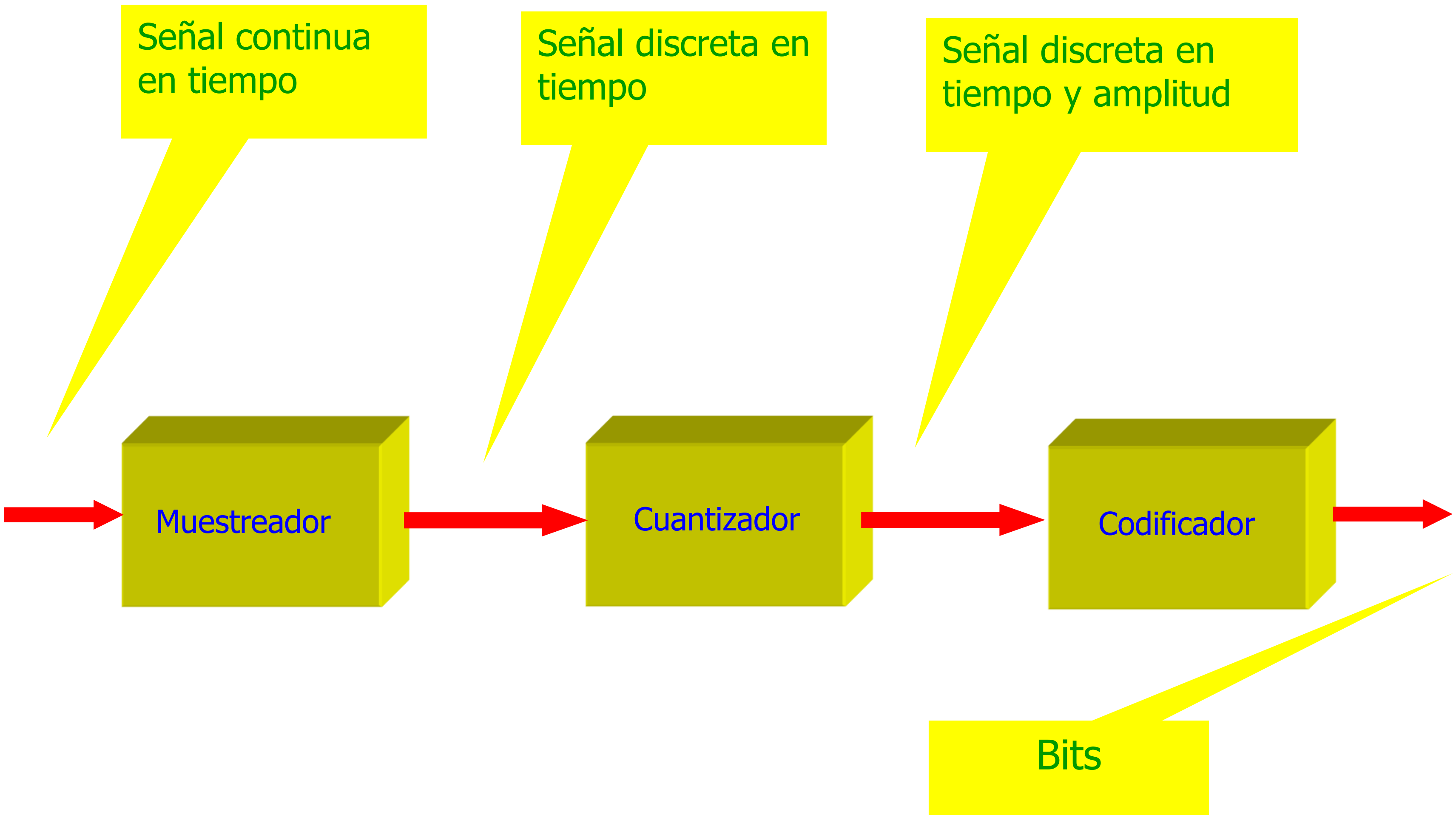
Conversión A/D



Sistema de Adquisición y Accionamiento



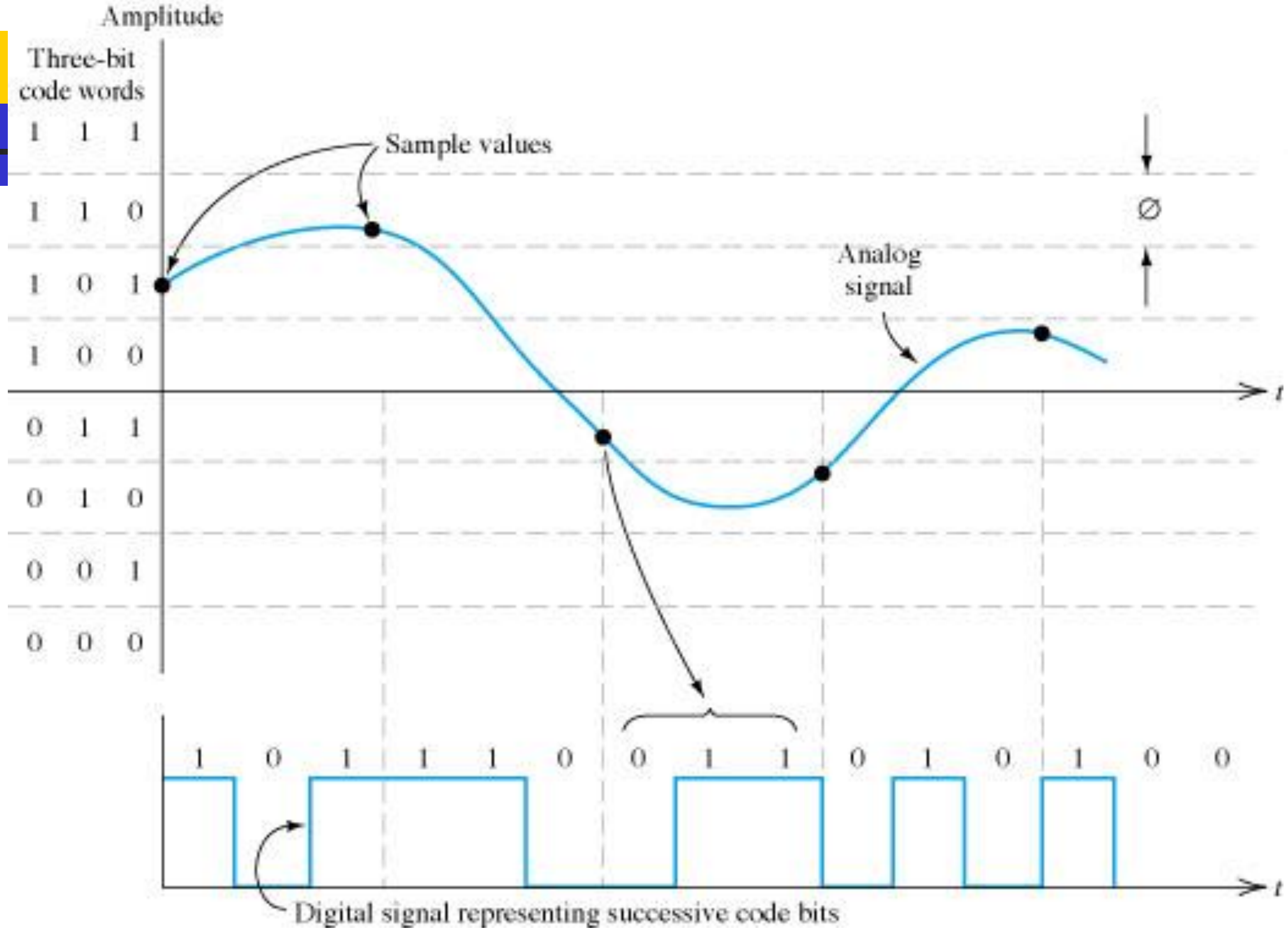
Conversión A/D - Digitalización



Conversión Analógico-Digital y Digital-Analógico

- Para procesar señales analógicas por medios digitales es necesario convertirlas a formato digital, esto es, transformarlas en una secuencia de números de precisión finita. Este procedimiento se denomina conversión analógico-digital (ADC).

Conversión analógica digital



ADC : cuatro procesos

- *Muestreo (sampling)*: tomar muestras periódicas de la amplitud de la onda.
- *Retención (hold)*: las muestras son retenidas hasta "evaluarlas".
- *Cuantificación*: la amplitud de la señal muestreada toma valores discretos.
- *Codificación*: se traducen los valores obtenidos a N bits, asigna un valor entre 2^N posibles.

Hasta aquí ADC

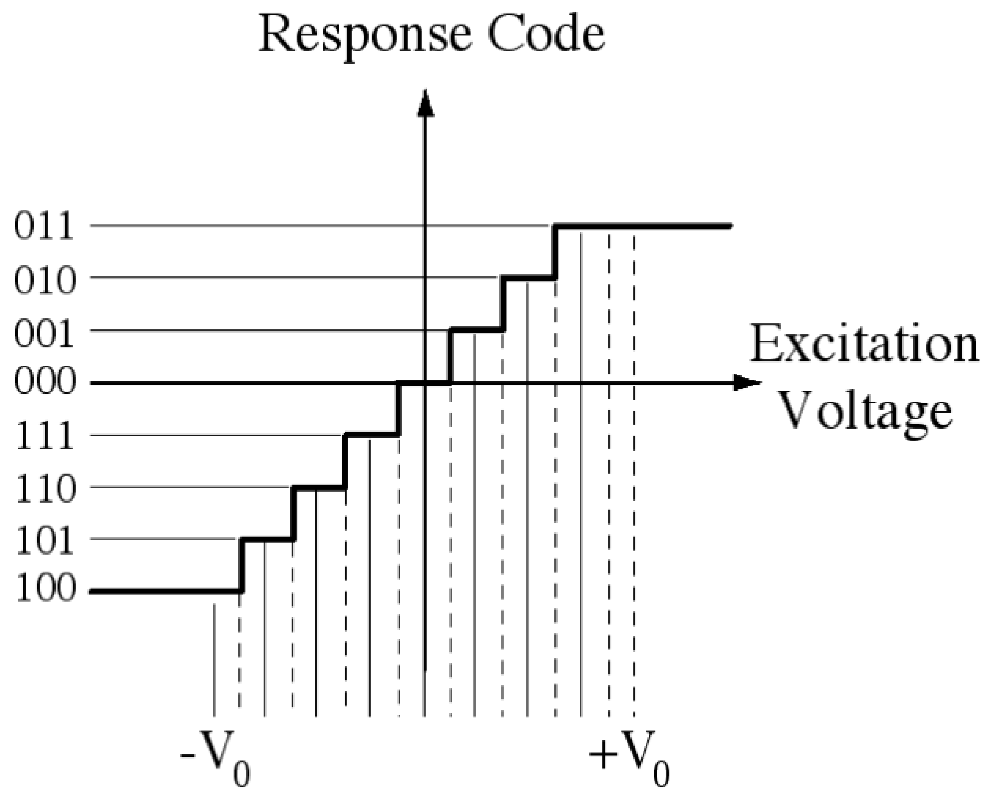
- Luego se podría *comprimir* la información, en bits, para tener en cuenta la capacidad de almacenamiento, tasa de datos, etc. que el sistema de cómputo puede manejar. (MP3, JPEG, etc)

Seguimos……

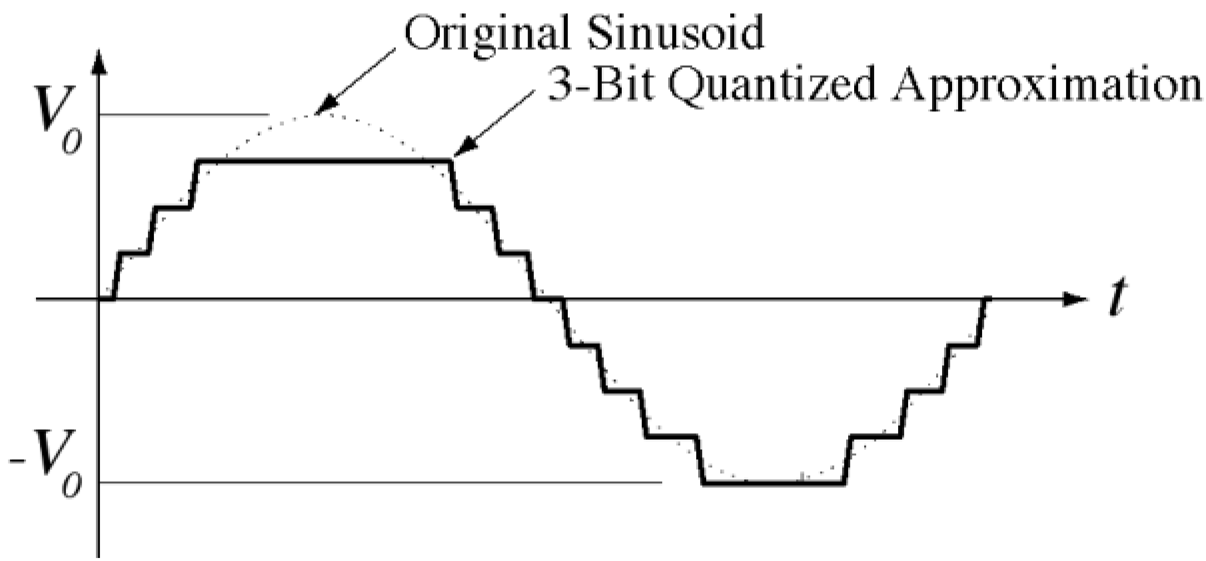
- De acuerdo a lo que es una señal analógica, esta puede tener una cantidad de valores infinitos.
- Como es imposible representarlos a todos, estas señales se dividen en niveles determinados, y así se convertirán en un número finito de niveles (niveles de cuantización).
- Las muestras se convierten en un número binario, cuyo valor es cercano al valor de la muestra.
- Ej : con 8 bits podemos representar 256 niveles

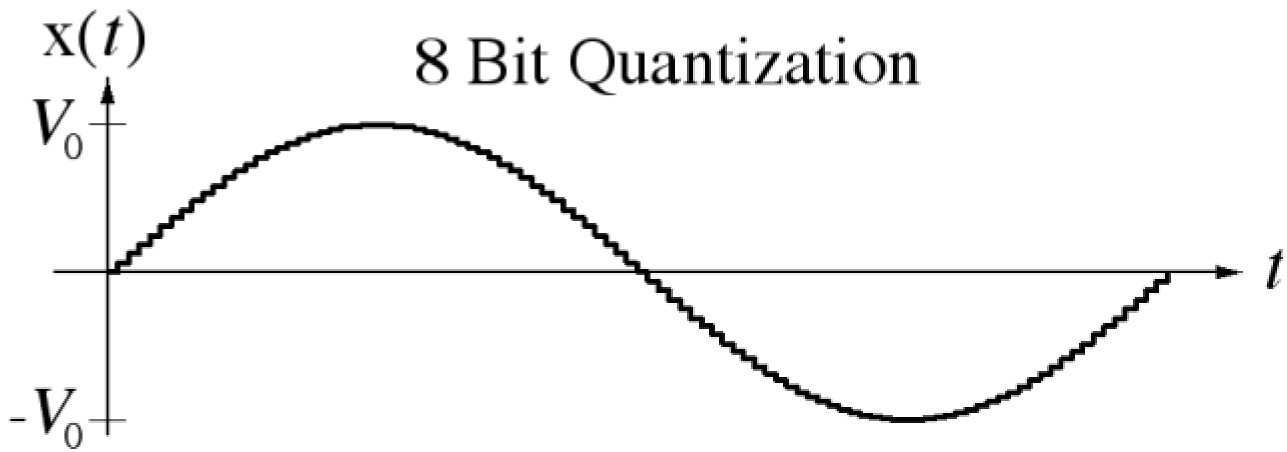
Relación entrada/salida para un ADC

Código digital de salida

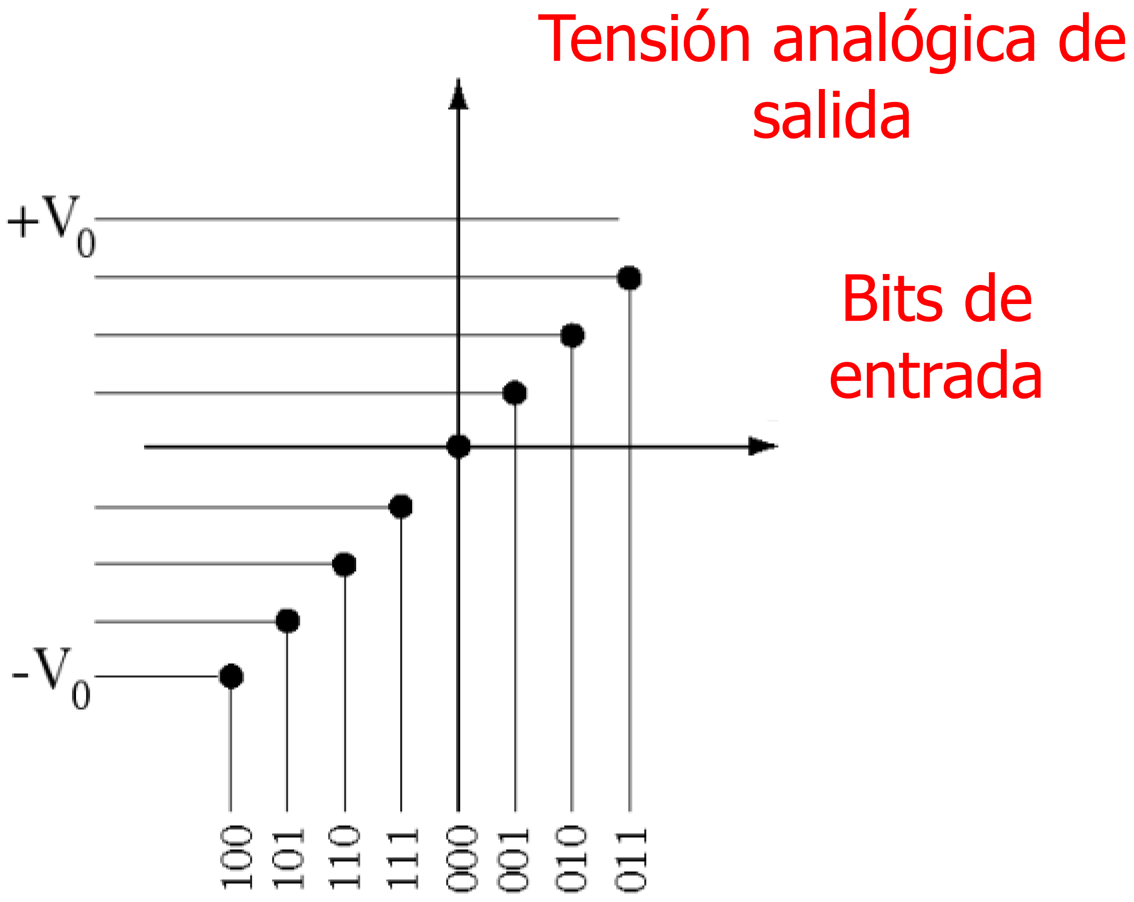


Señal analógica de entrada


Original Sinusoid
3-Bit Quantized Approximation
V0
-V0
t


x(t)
8 Bit Quantization
V0
-V0
t

Relación entrada salida DAC



Ejemplo

- Supongamos un convertidor A/D produce 4 bits de salida.
- Con estos 4 bits tenemos 16 niveles de voltaje a representar.
- De acuerdo a la figura, consideremos un intervalo de señal analógica entre 0 y 15 volts.

Ejemplo

- El convertidor A/D divide el intervalo en 16 niveles, los cuales representan 15 incrementos, entre 0 y 15 volts.
- Si medimos el valor 0 Volt, el ADC producirá el valor binario 0000.
- Si la muestra es de 8 volt, obtendremos un 1000.

Ejemplo

- Si ahora medimos 11,8 Volts, el ADC, produce el número binario 1100, cuyo equivalente decimal es el 12.
- Por lo tanto aquí apreciamos el error producido y que según vimos es el ERROR DE CUANTIZACION.
- Para reducirlo , no nos queda más que aumentar la cantidad de niveles de voltaje, lo que lleva a aumentar la cantidad de bits a utilizar
- Ej : con 8 bits, tendremos 256 niveles para dividir la señal analógica.
- Así, podemos acercarnos más al valor real analógico

Ejemplo

- La conversión A/D , es un proceso de muestreo o de mediciones de la señal analógica, en intervalos de tiempos regulares.
- En los tiempos mencionados, se mide el valor instantáneo de la señal analógica, y se genera un valor binario proporcional a la muestra.

Ejemplo

- Como ya vimos este tiempo está dado por la frecuencia de muestreo expresada por Nyquist, que dará un número de muestras que nos permitirá representar en forma adecuada la señal analógica.
- Por lo tanto “tenemos” que conocer la máxima frecuencia presente en la señal a muestrear.
- El fabricante suele especificar un tiempo llamado de conversión: “de la señal analógica a los bits”.
- Este tiempo nos fija la máxima frecuencia de mustreo con un dado conversor.

Ejemplo

- Analicemos el caso de una emisora de FM, que deseamos digitalizar.
  - La frecuencia más alta de audio es 15 (KHZ)
  - Por lo tanto la frecuencia de muestreo debiera ser de 30(KHZ).
  - Pero la frecuencia real de muestreo se hace entre 3 a 10 veces mayor, es decir entre 45 a 150 (KHZ).
- En el caso de discos compactos CD, que almacenan señales de música hasta 20 (KHZ), usan frecuencias de muestreo de 44,1 a 48 (KHZ)