La Mecánica a partir de Newton
La Primera Teoría

J. A. Martínez

Capítulo I. Descripción del movimiento. El formalismo

Capítulo 2.
Las magnitudes físicas y sus relaciones
Las Leyes de Newton. Las bases de la Mecánica

Capítulo 3.
Consecuencias de las Leyes de Newton
Teoremas de Conservación

Capítulo 4.
Aplicaciones de las Leyes de Newton
Usos de los Teoremas de Conservación

Capítulo 5. Las 'diferentes' opiniones de lo mismo

Lamentablemente el consejo de ancianos había sido diezmado. La ira de los dioses era implacable. Alguna ofensa durante los ritos sagrados los había enojado y ellos enviaban su mensaje de disgusto con la muerte, como siempre. El más anciano, el último, agonizaba en el templo acompañado por el joven monarca cuya mirada reflejaba innumerables reclamos de porqués y porqués. Antes de expirar el débil anciano levantó la mano y señaló temblorosamente la segunda abertura en la bóveda. El rey siguió el movimiento con atención pues creyó advertir que en ese gesto final estaban todas las respuestas y que los dioses estaban dispuestos a darle una nueva oportunidad. El anciano murió en silencio y el rey anunció su muerte a todo el pueblo reunido frente al templo. También anunció que tenían una nueva oportunidad y que los próximos sacrificios sería grandiosos y en el momento adecuado, para no caer nuevamente en desgracia. Y así se dispuso todo. Los jóvenes más robustos comenzaron a prepararse, los jerarcas de mayor confianza del rey escucharon atentamente las instrucciones. El las impartía con seguridad y firmeza. Los ritos se cumplieron al salir el sol por la segunda casilla de la cúpula. Cuando el sol se asomó por la tercera, se prepararon los festejos pues todo parecía indicar que los dioses habían sido satisfechos. Como parte de los rituales, se labró la tierra para la siembra tal cual se venía haciendo desde que se tenía memoria. Todo era rigurosamente cumplido y el éxito era seguro.

Las lluvias no esperaron lo que debían. Los torrentes abrieron la tierra y el intenso frío, que tampoco hizo lo que debía, mató las semillas y las esperanzas. Casi toda la población murió de hambre durante el largo invierno y los pocos sobrevivientes se dispersaron huyendo de la maldición. La tradición se perdió y sólo quedaron, para curiosidad de arqueólogos, enormes monumentos, templos y palacios, cargados de pinturas y símbolos hermosos, verdaderas obras de arte, fieles testimonios de un desarrollo social inimaginable y deslumbrante para la época. Una edificación en ruinas se veía como un círculo, con restos de muros en los que se adivinaban pequeñas aberturas simétricas, tal vez diez, tal vez doce y por creer que su techo había sido una cúpula fue llamada "observatorio"...

Capítulo 1

Descripción del movimiento. El formalismo

Introducción

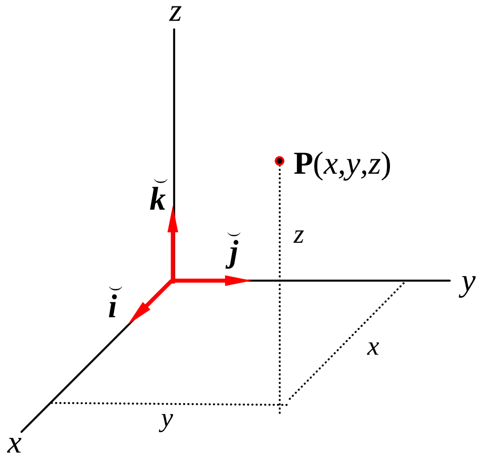
El movimiento de los objetos, unos respecto de otros, presenta una diversidad tan extraordinaria que es prácticamente imposible iniciar una descripción sin antes establecer algún tipo de límites a la tarea que pretendemos enfrentar. En primer lugar, debe resultar lo más claro y explícito posible indicar que lo que entendemos por movimiento de un objeto, es un concepto total y absolutamente relativo a otro u otros objetos. Carece de sentido hablar de movimiento de un objeto independientemente de la existencia de otros. En pocas palabras y apelando a una situación irreal, sería incomprensible caracterizar el movimiento de un objeto si éste fuera el único que existiese. Con relación a las limitaciones dentro de las cuales vamos a iniciar la descripción del movimiento de un objeto indicaremos, como primera aproximación, que no tendremos en cuenta la forma particular del objeto en cuestión. Es decir, no analizaremos aquellas características que estén vinculadas al hecho que el objeto ocupa un cierto volumen en el espacio. Iniciaremos nuestra descripción admitiendo que es suficiente representar a cualquier objeto con un punto del espacio (sin formas, ni caras, lados o facetas) y que las sucesivas posiciones de ese punto del espacio representan satisfactoriamente la trayectoria del objeto estudiado. Tal vez el lector crea que nos estamos limitando mucho al declarar que representaremos con un punto a cualquier objeto. Sin embargo, existen muchas observaciones para las cuales es perfectamente válida la asociación entre un objeto y un punto.

Ejemplos: si se estudia el movimiento de una estrella o planeta en el firmamento ¿le parece que es indispensable saber en qué lugar está la gran mancha roja de Júpiter para describir su movimiento en el cielo noche a noche? ¿Es relevante la información de para dónde apunta el Aconcagua al intentar determinar los diferentes lugares donde está nuestro planeta en su viaje alrededor del sol? ¿Hace falta indicar cuántas ruedas o puertas tiene un auto o si el motor es trasero o delantero, si pretendemos narrar su movimiento entre Buenos Aires y La Plata? Tal vez las especificaciones que hemos mencionado sean importantes en otras circunstancias (cuántas vueltas sobre sí mismo efectúa Júpiter o la Tierra en un cierto intervalo de tiempo o qué esta pasando con las ruedas pues el auto vibra al alcanzar 80 km/h). Bien, en tanto admitamos que las sucesivas posiciones de un punto representan bien lo que queremos describir del movimiento de un objeto, diremos que el objeto se comporta como una partícula. Una partícula será representada por un punto del espacio. Si, en cambio, necesitamos incluir nociones sobre la orientación del objeto porque no es suficiente la información obtenida a partir de lo que se representa con un punto, entonces diremos que el objeto se comporta como un cuerpo (realmente, se dice que no se comporta como partícula).

1.1 - El observador y lo observado

Indicar que vamos a utilizar ciertos elementos abstractos (puntos, curvas, relaciones, etc.) para representar hechos de la realidad (movimientos de objetos) es elaborar un modelo. Veremos en lo que sigue cómo es posible describir el movimiento de un objeto usando el modelo de una partícula o punto que representa materia.

Por sistema de referencia se entiende al conjunto de objetos y mecanismos que nos permiten especificar las coordenadas de un punto del espacio. A tal conjunto de cuerpos se lo simboliza como un sistema de coordenadas. Es más, comúnmente se simboliza todo en un dibujo de tres rectas que se cortan formando 90° entre sí. Al resultado de las medidas de coordenadas, junto con las indicaciones de los momentos en que fueron determinadas (indicados por un reloj), lo llamaremos observación. Es común utilizar el término "observador" para referirse al sistema de referencia. Si bien no es común mencionarlo, se admite que el resultado de una observación no es afectado ni por el observador ni por los métodos de medida que usa.



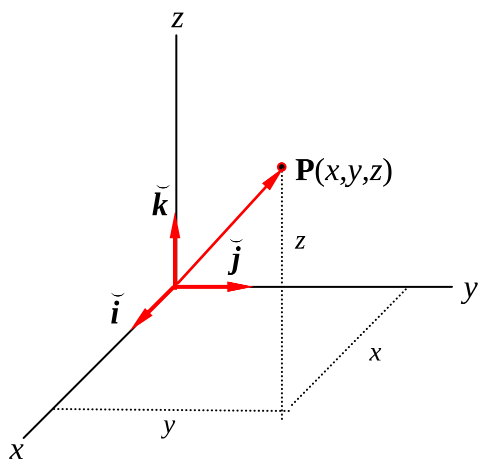
El resultado de observar el movimiento de una partícula podría ser el conjunto de coordenadas de los puntos por los que la partícula pasa acompañado de las respectivas indicaciones del reloj:

Indicación del reloj (s)	Coordenadas (m)		
t_1	x_1	y_1	z_1
t_2	x_2	y_2	z_2
...	...	...	...
t_n	x_n	y_n	z_n

Las cantidades t_i , x_i , y_i y z_i (con i = 1, 2, 3,..., n) son números y entre paréntesis se han marcado las unidades segundos (*s*) y metros (*m*).

1.2 - Las magnitudes fundamentales para describir el movimiento: posición, velocidad y aceleración

Supongamos que en el instante *t* una partícula está en el punto de coordenadas *x*, *y*, *z* respecto de un cierto sistema de referencia (no debe perderse de vista la relatividad de una ubicación o posición). Se denomina posición ***r*** de una partícula al vector, con unidades de longitud (*m*), cuyas componentes son justamente las coordenadas del punto en el que está la partícula:

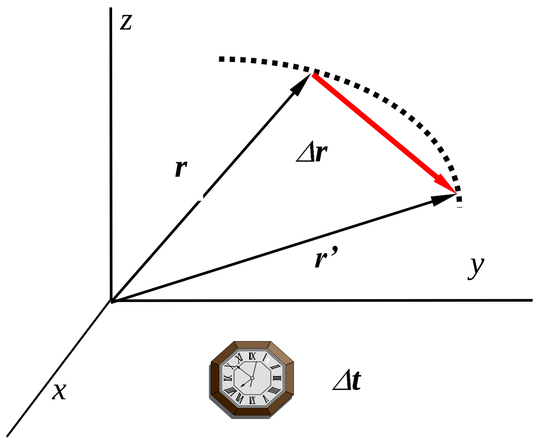


$$\boldsymbol{r} = x\,\breve{\boldsymbol{i}} + y\,\breve{\boldsymbol{j}} + z\,\breve{\boldsymbol{k}}$$

La idea subyacente en el concepto de movimiento es la de cambiar de posición o desplazarse a medida que el tiempo transcurre. Así que nos bastaría determinar que las coordenadas de la partícula observada son otras, en un instante posterior a *t*, para asegurar que la partícula se ha movido o que posee movimiento (siempre relativo al sistema de referencia en cuestión). Sea Δt el intervalo de tiempo transcurrido a partir de *t*, para el cual determinamos otras coordenadas para la partícula y llamemos a las nuevas coordenadas $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, donde los valores Δx, Δy y Δz representan los cambios respecto de las coordenadas originales. El nuevo vector posición ***r***' estará determinado por las nuevas coordenadas como:

$$\boldsymbol{r}' = (x+\Delta x)\,\breve{\boldsymbol{i}} + (y+\Delta y)\,\breve{\boldsymbol{j}} + (z+\Delta z)\,\breve{\boldsymbol{k}} =$$
$$= x\,\breve{\boldsymbol{i}} + y\,\breve{\boldsymbol{j}} + z\,\breve{\boldsymbol{k}} + \Delta x\,\breve{\boldsymbol{i}} + \Delta y\,\breve{\boldsymbol{j}} + \Delta z\,\breve{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}$$

Evidentemente, el nuevo vector posición está definido a partir del anterior y de una modificación designada por $\Delta\boldsymbol{r}$ (note que $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$ es una diferencia entre dos posiciones). Tal modificación en la posición se denomina vector



desplazamiento o simplemente desplazamiento de la partícula. Sus componentes son los cambios en las coordenadas debidos a una modificación de la ubicación de la partícula. El vector desplazamiento comienza en el punto donde está la partícula en el instante t y termina en el punto donde está la partícula en el instante $t+\Delta t$.

La magnitud que mide la relación entre el desplazamiento y el intervalo de tiempo en el que se ha producido, se denomina velocidad media de la partícula y se define como:

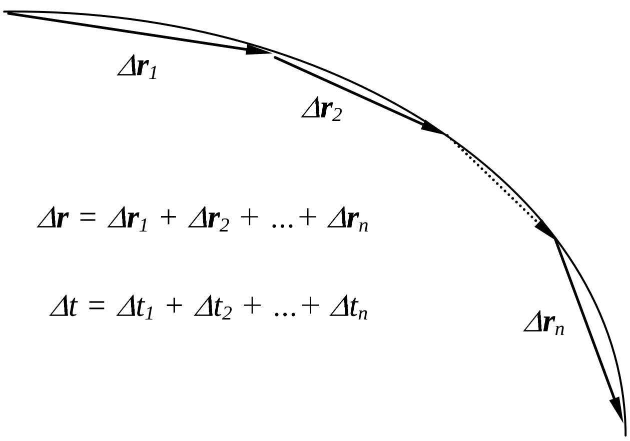
$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

De la definición surge que la velocidad media es un vector con la misma dirección y sentido que el desplazamiento (nótese que Δt es una cantidad escalar positiva, es decir, un número positivo) que se mide en unidades de longitud sobre unidades de tiempo (*m/s*). Las componentes de la velocidad media resultan:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\breve{\boldsymbol{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\breve{\boldsymbol{j}} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\breve{\boldsymbol{k}} = \bar{\mathrm{v}}_{\mathrm{x}}\breve{\boldsymbol{i}} + \bar{\mathrm{v}}_{\mathrm{y}}\breve{\boldsymbol{j}} + \bar{\mathrm{v}}_{\mathrm{z}}\breve{\boldsymbol{k}}$$

(las barras por encima de las componentes de la velocidad sólo se usan para indicar que son componentes de la velocidad media y no deben confundirse con la notación habitual para vectores).

Si llamamos trayectoria de la partícula a la sucesión de puntos por los cuales la partícula pasa al transcurrir el tiempo, está claro que la velocidad media, en un dado intervalo de tiempo, establece únicamente una relación entre dos de los puntos de la trayectoria y no posee ninguna información relativa a los puntos entre ellos. En otras palabras, la velocidad media permite una descripción



$$\Delta \boldsymbol{r} = \Delta \boldsymbol{r}_1 + \Delta \boldsymbol{r}_2 + \ldots + \Delta \boldsymbol{r}_n$$

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \ldots + \Delta t_n$$

"segmentada" de la trayectoria de una partícula. En términos geométricos, si la trayectoria se representa por una cierta curva, las velocidades medias en sucesivos intervalos de tiempo, permiten determinar desplazamientos sucesivos que aproximarían la curva mediante un conjunto de segmentos orientados (los sucesivos desplazamientos).

Evidentemente, la descripción en términos de sucesivos desplazamientos, obtenidos a través del conocimiento de velocidades medias no es enteramente satisfactoria. En tanto no se consideren velocidades medias en intervalos de tiempo suficientemente pequeños (entendiendo como pequeños a aquellos intervalos muy cortos comparados con el que transcurre entre el comienzo y el fin del estudio que estemos haciendo), no se mejorará la descripción. Cabría la pregunta: ¿cuál es el intervalo de tiempo más pequeño como para asegurar una descripción lo más detallada posible? ¿Cuál sería su valor? Tal vez las preguntas no tengan mucho sentido porque aún imaginando un intervalo de tiempo que creamos muy pequeño, siempre existirá el intervalo mil veces más chico. De manera que preguntar por algún valor particular no parece muy racional. Tenemos la absoluta seguridad de que es necesario que transcurra un cierto intervalo de tiempo para que deje de ser el instante que estamos considerando y nos damos cuenta que tal intervalo no se puede asociar a un número particular (por pequeño que sea). Para indicar el intervalo de tiempo más pequeño posible utilizaremos un símbolo: dt (léase "diferencial de t" o "diferencial t") que representa el intervalo de tiempo entre t y $t+\Delta t$, cuando Δt tiende a cero[1]. Definiremos velocidad instantánea $\boldsymbol{v}$ o simplemente velocidad $\boldsymbol{v}$ de una partícula en el instante t, como el límite al que tiende la velocidad media cuando el intervalo Δt tiende a cero:

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

siendo $d\boldsymbol{r}$ el desplazamiento en el intervalo dt.

La velocidad media tiene, por definición, la dirección de la recta secante a la trayectoria que pasa por los puntos que marca el vector desplazamiento. La velocidad de una partícula en un cierto punto de su trayectoria, tiene la dirección de la tangente a la trayectoria en el punto considerado (el lector debe analizar el límite al que tiende la dirección de la recta secante por dos puntos de una curva cuando los puntos se aproximan tanto como se quiera). El sentido es, como en el caso de la velocidad media, el sentido del desplazamiento. Los diferentes valores de la velocidad $\boldsymbol{v}(t)$, en sucesivos instantes, permiten determinar una sucesión de desplazamientos $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\, dt$, que reproducen, con tanta aproximación como se quiera, la trayectoria de la partícula. En el intervalo entre t y $t+\Delta t$, el desplazamiento a partir de la posición en el instante t será naturalmente la suma de los sucesivos desplazamientos diferenciales $d\boldsymbol{r}$ (tal suma se denomina integral). Así, se puede expresar el desplazamiento en un cierto intervalo Δt como:

$$\Delta \boldsymbol{r}(\Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} d\boldsymbol{r} = \int_t^{t+\Delta t} \boldsymbol{v}(t)\,dt\,.$$

Es fácil admitir que en una trayectoria cualquiera (representada por una curva cualquiera) la velocidad será, en general, diferente en cada posición (piense el lector en relación a la dirección de la velocidad, al menos…). Se puede definir una magnitud para caracterizar los cambios en la velocidad de una partícula,

---

[1] La palabra diferencial es una modificación de la palabra diferencia.

de manera equivalente a la que se hizo para caracterizar los cambios de la posición. Se llama aceleración media a aquel vector que mide la relación entre el cambio en la velocidad y el intervalo de tiempo en el cual ocurrió el cambio:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

En virtud del mismo criterio de descripción que se tuvo para definir la velocidad, se define el vector aceleración instantánea ***a*** o simplemente aceleración ***a*** en el instante *t*, como:

$$\boldsymbol{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

donde $d\boldsymbol{v}$ el cambio de velocidad en el intervalo dt. Así, es posible describir los sucesivos cambios en la velocidad con la aproximación que se desee y, al cabo de un intervalo Δt a partir de t, el cambio en la velocidad será:

$$\Delta \boldsymbol{v}(\Delta t) = \int_{t}^{t+\Delta t} \boldsymbol{a}(t)\,dt\,.$$

1.3 - Movimiento uniformemente acelerado

Veamos ahora un caso particular que nos sirva para concretar la descripción del movimiento de una partícula y para insistir en algunas definiciones y sus consecuencias.

Supongamos que una partícula se mueve de manera que su aceleración es constante. Supongamos además, que en un instante t_o cualquiera, iniciamos el estudio del movimiento de la partícula, encontrándose ésta en la posición $\boldsymbol{r}_o$ y con velocidad $\boldsymbol{v}_o$. Nos preguntamos ahora ¿cuál será la velocidad de la partícula en otro instante cualquiera t posterior a t_o? La definición de aceleración

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt},$$

nos indica que las modificaciones de la velocidad estarán determinadas en la forma:

$$d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\ dt\,.$$

De manera que en el instante t, el cambio en la velocidad será:

$$\Delta\boldsymbol{v} = \int_{t_0}^{t} d\boldsymbol{v} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}\ dt$$

Así, enfatizando una vez más que se trata de un movimiento con aceleración constante, la variación de la velocidad (a partir de su valor en t_o) resulta:

$$\Delta\boldsymbol{v} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a} dt = \boldsymbol{a}\int_{t_0}^{t} dt = \boldsymbol{a}(t - t_0) = \boldsymbol{a}\Delta t\,,$$

donde Δt=(t-t_o) es el intervalo de tiempo que ha transcurrido a partir de t_o. De esta manera, es fácil deducir que la velocidad en el instante t será aquélla del instante t_o más el cambio "acumulado"[2] hasta el instante t:

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v_0} + \Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{a}\ \Delta t$$

Siendo t_o el instante en que comenzamos el estudio del movimiento y Δt = (t - t_o) el intervalo de tiempo transcurrido a partir de dicho instante, bien podríamos elegir t_o=0 de manera que t represente el intervalo de tiempo indicado por los relojes disparados en t_o. Si esta es la elección, la expresión anterior debería leerse como: "la velocidad $\boldsymbol{v}$ de una partícula cuyo

---

[2] Se ha usado el término "acumulado" tratando de explicitar el concepto subyacente en la integración, en tanto ésta representa la suma de los sucesivos cambios de velocidad.

movimiento es uniformemente acelerado, t segundos luego del momento en que valía $\boldsymbol{v}_o$, es la suma del vector $\boldsymbol{v}_o$ y el vector que resulta de multiplicar $\boldsymbol{a}$ y t":

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{a}\ t$$

No puede perderse de vista que la cantidad t representa un valor positivo que indica cuánto tiempo ha transcurrido desde que comenzamos a analizar el movimiento.

Si conocemos la velocidad de la partícula al cabo de cualquier intervalo de tiempo, es posible determinar también, los cambios que se han sucedido en la posición de la partícula a partir de $\boldsymbol{r}_o$ donde estaba al comenzar el análisis y por lo tanto determinar la posición de la partícula en cualquier momento posterior a t_o.

Efectivamente, de la definición de velocidad surge que para cualquier intervalo de tiempo dt (contenido entre t_o y t) el desplazamiento es $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}dt$, de manera que el cambio en la posición de la partícula resulta:

$$\Delta r = \int_{t_0}^{t} d\boldsymbol{r} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}dt$$

y explicitando la velocidad se obtiene:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \int_{t_0}^{t} [\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}(t - t_0)]dt = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}_0\, dt + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}(t - t_0)dt = \boldsymbol{v_0}(t - t_0) + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}(t - t_0)^2$$

con lo cual se llega (en virtud de la elección de t_o) a:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v_0}\ t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\ t^2.$$

Así, la posición de la partícula t segundos luego de iniciar el estudio del movimiento (o t segundos luego de haber disparado los relojes), es la que se obtiene de agregarle a la posición $\boldsymbol{r}_o$ el cambio $\Delta\boldsymbol{r}$ resultante en t segundos:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{v_0}\ t + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{a}\ t^2.$$

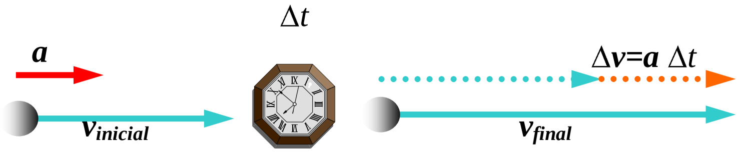
De manera tal que si una partícula se mueve con aceleración constante, la descripción de su movimiento, esta contenida en las expresiones:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{v_0}\ t + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{a}\ t^2$$
$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{a}\ t$$

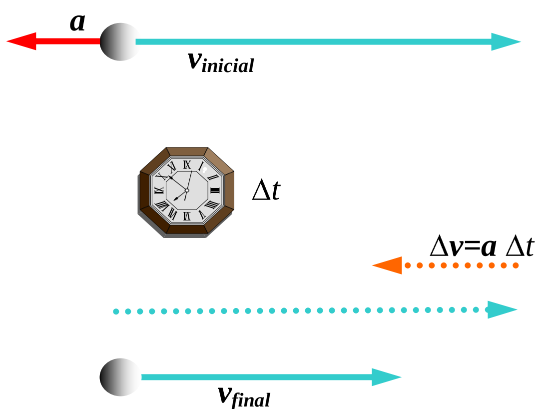
que pasaremos a interpretar y discutir a continuación.

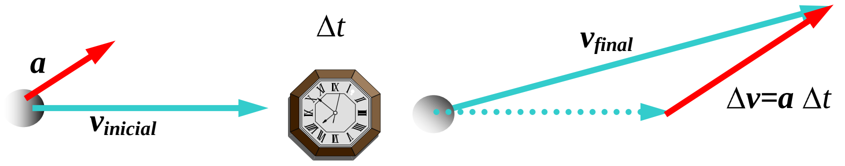
En primer lugar es indispensable destacar algo que es evidente en las ecuaciones y que puede, en otras circunstancias, conducir a nuevos puntos de vista no necesariamente intuitivos (¿el lector ha oído hablar del Principio de la incerteza o Principio de la incertidumbre?): para el movimiento con aceleración constante que estamos estudiando, la posición de la partícula se puede predecir rigurosamente (a partir de un cierto momento) si y sólo si se especifican la posición $\boldsymbol{r}_o$ y la velocidad $\boldsymbol{v}_o$ al inicio del estudio (comúnmente denominadas posición inicial y velocidad inicial respectivamente). Se parte de la base de que se conocen los vectores $\boldsymbol{r}_o$ y $\boldsymbol{v}_o$ y a partir de ellos se determinan $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{v}$.

Es indispensable adquirir experiencia en la elección del sistema de referencia, de manera que las expresiones que describen el movimiento tengan formas simples. La práctica muestra que es conveniente (no indispensable) elegir los ejes coordenados con direcciones tales que marquen alguna dirección característica del movimiento. Al describir un movimiento con aceleración constante, la dirección de la aceleración es característica del movimiento y representaremos los vectores que describen el movimiento en un sistema de



coordenadas en el cual uno de sus ejes tiene la dirección de la aceleración. Si la aceleración es paralela a la velocidad inicial, el movimiento resultará rectilíneo (todos los cambios en la velocidad serán paralelos a la aceleración y así a la velocidad inicial). Si la aceleración es además del mismo sentido que la velocidad inicial, las





subsiguientes velocidades serán cada vez mayores y, en caso contrario, serán cada vez menores. Para el caso en que la aceleración no posea la misma dirección que la velocidad inicial, los cambios en la velocidad no resultarán paralelos a la velocidad inicial y el movimiento resultará no rectilíneo.

Luego de esta descripción cualitativa tratemos de concretar algunas situaciones que nos familiarizarán con el uso de las ecuaciones encontradas ayudándonos a comprender la información que ellas poseen.

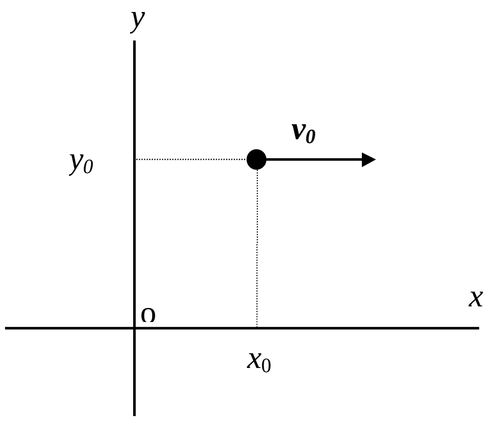
1.4 – Movimiento sin aceleración. Movimiento rectilíneo uniforme

Aceleración constante indica obviamente que es "siempre" la misma. La palabra "siempre" debe entenderse como "mientras estudiamos el movimiento". Tal condición no excluye el caso de una aceleración siempre nula. Las ecuaciones nos muestran que la posición y velocidad de una partícula en estas circunstancias son:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{v_0}\ t$$
$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v_0}$$

Estas ecuaciones se conocen con el nombre de ecuaciones del movimiento rectilíneo uniforme, es decir, movimiento a velocidad constante. Eligiendo el sistema de coordenadas con un eje (digamos el eje *x* o el que el lector mejor le parezca) coincidente con la velocidad inicial (la dirección de la aceleración no está definida) resulta:

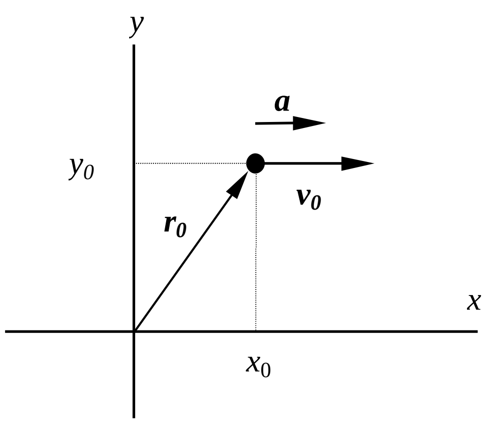
$$\boldsymbol{r_0} = x_0\ \breve{\boldsymbol{i}} + y_0\ \breve{\boldsymbol{j}}$$
$$\boldsymbol{v_0} = v_0\ \breve{\boldsymbol{i}}$$



Una vez especificados los valores de la posición inicial y la velocidad inicial, las ecuaciones del movimiento nos indican qué resulta para la posición y la velocidad *t* segundos luego del comienzo del estudio. Así, simplemente reemplazando en las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniforme, resulta:

$$\boldsymbol{r}(t) = x_0\ \breve{\boldsymbol{i}} + y_0\ \breve{\boldsymbol{j}} + (v_0\,\breve{\boldsymbol{i}})\ t = (x_0 + v_0 t)\ \breve{\boldsymbol{i}} + y_0\ \breve{\boldsymbol{j}}$$
$$\boldsymbol{v}(t) = v_0\ \breve{\boldsymbol{i}}$$

Estas relaciones nos indican cómo se comportarán la posición y la velocidad en el movimiento rectilíneo uniforme: para las sucesivas indicaciones de los relojes (tenidas en cuenta en el valor de *t*) la posición únicamente cambia la coordenada *x* manteniendo constantes las coordenadas *y* y *z* (en los valores y_o y 0 respectivamente) y la velocidad resulta paralela al eje *x* (sólo tiene componente en la dirección del versor $\breve{\boldsymbol{i}}$, independiente del momento que se esté considerando).



1.5 - Aceleración y velocidad inicial en la misma dirección

Analicemos ahora el caso de aceleración constante paralela a la velocidad inicial. Hemos mencionado la posibilidades de que la aceleración tenga el mismo sentido o sentido contrario a la velocidad inicial. Veamos lo primero. Tomemos nuevamente un sistema de coordenadas con el eje *x* paralelo a la aceleración y por ende a la velocidad inicial. Así,

$$\boldsymbol{r_0} = x_0\ \breve{\boldsymbol{i}} + y_0\ \breve{\boldsymbol{j}}$$

$$\boldsymbol{v_0} = v_0\ \breve{\boldsymbol{i}}$$

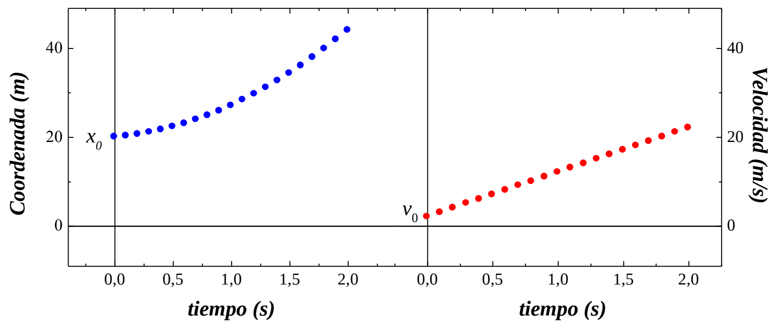
$$\boldsymbol{a} = a\ \breve{\boldsymbol{i}}$$

son los vectores que permitirán determinar la posición y la velocidad al cabo de t segundos de iniciado el análisis de este movimiento. Reemplazando los vectores correspondientes en las ecuaciones para el movimiento uniformemente acelerado, arribamos a las igualdades:

$$\boldsymbol{r}(t) = x_0\ \breve{\boldsymbol{i}} + y_0\ \breve{\boldsymbol{j}} + (v_0\ \breve{\boldsymbol{i}})\, t + \frac{1}{2}\,(a\ \breve{\boldsymbol{i}})\, t^2 = (x_0 + \boldsymbol{v_0} t + \frac{1}{2} a t^2)\ \breve{\boldsymbol{i}} + y_0\ \breve{\boldsymbol{j}}$$

$$\boldsymbol{v}(t) = v_0\ \breve{\boldsymbol{i}} + (a\ \breve{\boldsymbol{i}})\, t = (v_0 + at)\ \breve{\boldsymbol{i}}$$

Estas relaciones muestran que el movimiento es rectilíneo, variando únicamente la coordenada x y que la velocidad es siempre paralela al eje x, con módulo creciente (a medida que transcurre el tiempo).



En el caso que la aceleración tenga sentido opuesto a la velocidad inicial (comúnmente conocido como movimiento desacelerado o descelerado), el análisis es idéntico al recién planteado, salvo que la componente x del vector aceleración (siempre referido al sistema de coordenadas que hemos elegido para hacer la descripción) cambia de signo:

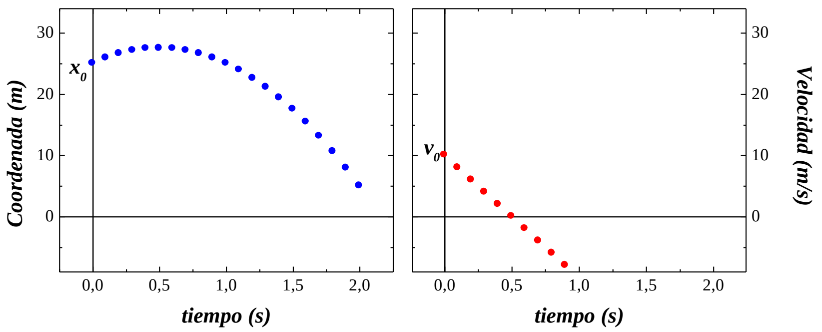
$$\boldsymbol{r_0} = x_0\ \breve{\boldsymbol{i}} + y_0\ \breve{\boldsymbol{j}}$$
$$\boldsymbol{v_0} = v_0\ \breve{\boldsymbol{i}}$$
$$\boldsymbol{a} = -a\ \breve{\boldsymbol{i}}$$

De manera que la descripción del movimiento estará expresada en:

$$\boldsymbol{r}(t) = x_0\ \breve{\boldsymbol{i}} + y_0\ \breve{\boldsymbol{j}} + (v_0\ \breve{\boldsymbol{i}})\, t + \frac{1}{2}\,(-a\ \breve{\boldsymbol{i}})\, t^2 = (x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} a t^2)\ \breve{\boldsymbol{i}} + y_0\ \breve{\boldsymbol{j}}$$

$$\boldsymbol{v}(t) = v_0 \breve{\boldsymbol{i}} + (-a\ \breve{\boldsymbol{i}})\, t = (v_0 - at)\ \breve{\boldsymbol{i}}$$

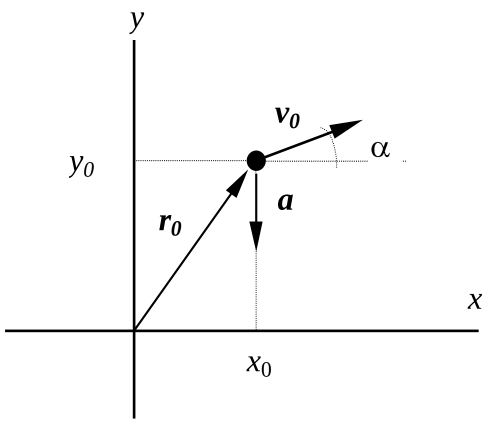
La interpretación de estas últimas relaciones es algo más rica que la que resultó antes. Veamos primero qué ocurre con la velocidad: a partir de $t = 0$, el término *at* disminuye el módulo de la velocidad de tal manera que al cabo de v_o/a segundos, la velocidad se anula; a medida que se suceden los segundos (luego del instante v_o/a) el módulo de la velocidad crece nuevamente pero el sentido del vector es opuesto al que tenía antes. En palabras comunes, la partícula se va frenando, se detiene, permanece detenida por un instante, y luego retrocede a velocidades crecientes (esta vez, sin parar).



El análisis de la posición, naturalmente, también revela que la partícula anda un trayecto, se frena y luego desanda el trayecto ya sin detenerse. Efectivamente, para los primeros instantes (en los cuales el valor de t es más importante que el de t^2) el término $v_o t$ domina sobre el término $at^2/2$ y la coordenada x crece a partir del valor x_o. Cuando (a tiempos mayores) el término $at^2/2$ resulta más importante que $v_o t$, la coordenada disminuye su crecimiento, deja de crecer y comienza a disminuir, volviendo a tomar valores que ya había tomado (incluyendo el valor x_o). Si la situación de aceleración constante persiste, la coordenada continuará disminuyendo, pasará por el valor 0 y se hará negativa. ¿Podría el lector demostrar que el máximo de la coordenada x es $x_{\text{máx}} = x_0 + (v_o^2 / 2a)$?

1.6 - Aceleración y velocidad inicial en diferentes direcciones

¿Cómo se analiza la situación en la cual la aceleración no es paralela a la velocidad inicial? Bien, se elige un sistema de coordenadas con un eje paralelo a la dirección de la aceleración (característica del movimiento), se determinan las componentes de los vectores $\boldsymbol{r}_o$ y $\boldsymbol{v}_o$ y las ecuaciones del movimiento



permiten inferir las posiciones y velocidades de la partícula a medida que el tiempo transcurre. Tomemos por ejemplo los movimientos en las proximidades de la superficie de nuestro planeta como lanzamientos, caídas, tiros, etc. (sin considerar la influencia del aire). Se ha determinado que tales movimientos son acelerados con aceleración constante de valor muy próximo a 9,80 m/s^2 (representado habitualmente con la letra g), dirección vertical (la de la vertical del lugar) y sentido hacia el interior del planeta (hacia el centro de la Tierra). Veamos la situación planteada en la figura, que representa el hecho de arrojar un proyectil desde el punto $\boldsymbol{r}_o$ con velocidad $\boldsymbol{v}_o$ (inclinada un ángulo α respecto de la horizontal). En el sistema de coordenadas indicado en el esquema, los vectores $\boldsymbol{r}_o$ y $\boldsymbol{v}_o$ están dados por:

$$\boldsymbol{r_0} = x_{\boldsymbol{0}}\breve{\boldsymbol{i}} + y_0\breve{\boldsymbol{j}}$$
$$\boldsymbol{v_0} = v_0\cos\boldsymbol{\alpha}\ \breve{\boldsymbol{i}} + v_0\,\mathrm{sen}\boldsymbol{\alpha}\breve{\boldsymbol{j}}$$

y la aceleración por:

$$\boldsymbol{a} = -\,g\ \breve{\boldsymbol{j}}$$

De forma que, usando las ecuaciones del movimiento deducidas antes,

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{v_0}\ t + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{a}\ t^2$$
$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{a}\ t$$

se determina:

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_0 + v_{\boldsymbol{0}}\cos\alpha\ t)\ \breve{\boldsymbol{i}} + (y_0 + v_{\boldsymbol{0}}\mathrm{sen}\alpha t - \tfrac{1}{2}gt^2)\ \breve{\boldsymbol{j}}$$
$$\boldsymbol{v}(t) = (v_{\boldsymbol{0}}\cos\alpha)\ \breve{\boldsymbol{i}} + (v_{\boldsymbol{0}}\mathrm{sen}\alpha\ - gt)\ \breve{\boldsymbol{j}}$$

Estas igualdades describen cómo se desarrolla el movimiento y su análisis es el siguiente:

La coordenada x varía como la de un movimiento uniforme (la aceleración no tiene componente en la dirección x). Esta coordenada puede crecer indefinidamente.

La coordenada y obedece un movimiento uniformemente acelerado. Esta coordenada crece, pasa por un valor máximo y luego disminuye (eventualmente indefinidamente).

La coordenada z es siempre cero, lo cual indica un movimiento plano, más precisamente en el plano xy.

La componente x de la velocidad es constante (nuevamente se insiste en que la aceleración no tiene componente en la dirección x).

La componente y de la velocidad disminuye a partir de su valor inicial, se anula en un instante y luego se invierte (cambia de signo).

¿Qué curva describe la partícula en el plano xy? Una forma de obtenerla es, por ejemplo, proponer algunos valores razonables para los parámetros que figuran en las relaciones (x_0, y_0, v_0 y α) y calcular el par de coordenadas (x,y) de la partícula para valores crecientes de t. La representación gráfica de esos valores en un sistema de coordenadas muestra la forma de la trayectoria. Por otro lado, la ecuación de la trayectoria puede obtenerse eliminando t entre las ecuaciones correspondientes a cada coordenada. Así resulta,

$$x(t) = x_0 + \boldsymbol{v_0} \cos\alpha \ \ t \rightarrow t = \frac{(x - x_0)}{v_0 \cos\alpha}$$

$$y(x) = y_0 + \boldsymbol{v_0} \ \text{sen}\,\alpha \left(\frac{(x - x_0)}{v_0 \cos\alpha} \right) - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{(x - x_0)}{v_0 \cos\alpha} \right)^2$$

De lo cual se deduce una relación entre las coordenadas de la forma:

$$y(x) = Ax^2 + Bx + C$$

con:

$$A = -\frac{g}{2\, v_0^2 \cos^2 \alpha} < 0$$

$$B = \left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{g\, x_0}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \right)$$

$$C = \left(y_0 - x_0 \operatorname{tg} \alpha - \frac{g\, x_0^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \right)$$

La relación $y(x)$ describe una parábola de ramas hacia abajo (A<0) cuyos coeficientes están determinados por la aceleración y los valores iniciales de la posición y velocidad.

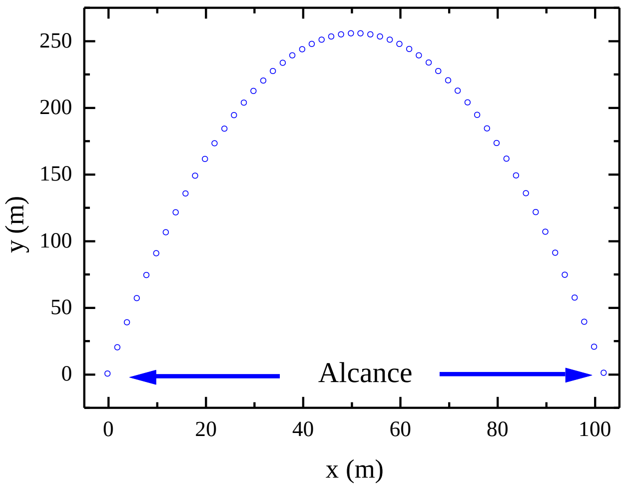
Naturalmente que una mejor elección del sistema de coordenadas puede simplificar las expresiones encontradas. Podría, por ejemplo, tomarse como origen de coordenadas el punto de lanzamiento y así, a x_o e y_o le corresponderían valores nulos (resultando B= tg α y C=0).

La ecuaciones indican que al cabo de (v_o sen α)/g segundos la componente y de la velocidad se anula por lo que la partícula no subirá mas allá de:

$$y_{\text{máx}} = y_0 + \boldsymbol{v_0} \operatorname{sen}\boldsymbol{\alpha} \left(\frac{\boldsymbol{v_0} \operatorname{sen}\boldsymbol{\alpha}}{g} \right) - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{\boldsymbol{v_0} \operatorname{sen}\boldsymbol{\alpha}}{g} \right)^2 = y_0 + \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \boldsymbol{\alpha}}{2g}$$

En el caso de un lanzamiento sería interesante predecir cuál será el alcance del tiro, es decir, cuán lejos se llega (horizontalmente hablando) desde el punto de lanzamiento.

Tal determinación es sencilla si se admite que a partir de $t = 0$ habrá un momento t_L para el cual el nivel (expresado a través de la coordenada y) vuelve a ser el de partida. Así,



$$y(t_L) = y_0 = y_0 + v_0 \text{ sen } \alpha \;\; t_L - \tfrac{1}{2} g \, t_L^2$$

de modo que

$$0 = v_0 \text{ sen } \alpha \;\; t_L - \tfrac{1}{2} g \, t_L^2 = (v_0 \text{ sen } \alpha - \tfrac{1}{2} g \, t_L) t_L$$

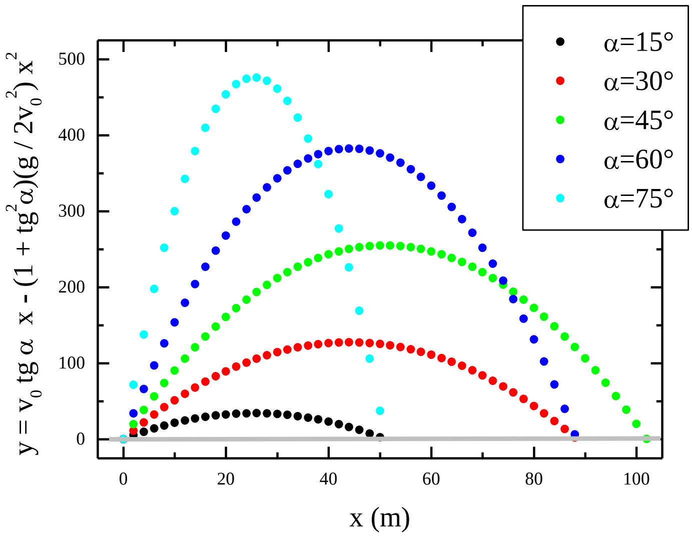
resultando

$$t_L = \frac{2 \, v_0 \text{ sen } \alpha}{g}$$

(Note el lector que el valor t_L=0, que es también solución de la ecuación, no se tiene en cuenta porque representa el instante inicial). El alcance L que resulta es:

$$L = x(t_L) - x_0 = v_0 \cos\alpha \left(\frac{2 v_0 \text{sen}\alpha}{g} \right) = \frac{2 v_0^2 \cos\alpha \, \text{sen}\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \text{sen}(2\alpha)}{g}$$

Esta última expresión muestra que el alcance se puede variar modificando la "intensidad" del tiro (expresado mediante el módulo de la velocidad inicial) y la inclinación del tiro. Para una dada intensidad de tiro, el alcance será el mismo para las inclinaciones α y (90°-α) (es decir, α grados por encima de la horizontal y α grados apartado de la vertical) y será el mayor para α=45°.



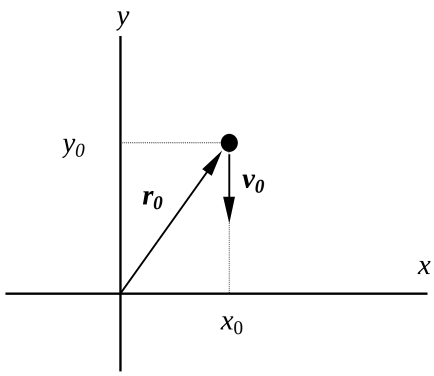
Existen situaciones particulares del lanzamiento que naturalmente están contenidas en las ecuaciones que hemos deducido y analizado.

En el caso para el cual el ángulo de inclinación es 90° se tiene para las componentes (no nulas) de la posición y de la velocidad:

$$x(t) = x_0 \; ; \; y(t) = y_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$$
$$v_x(t) = 0 \; ; \; v_y(t) = v_0 - gt$$

El caso es conocido con el nombre de tiro vertical.

La situación denominada caída libre es aquélla para la cual se suelta (v_o= 0) o se empuja ($v_o \neq 0$) una partícula hacia abajo. Tal caso se obtiene para un ángulo de inclinación de 270° (recuérdese que la inclinación es respecto al eje



x) y las ecuaciones resultantes son:

$$x(t) = x_0 \ ; \ y(t) = y_0 - \boldsymbol{v_0} t - \tfrac{1}{2} g t^2$$
$$v_x(t) = 0 \ ; \ v_y(t) = -\boldsymbol{v_0} - g t$$

1.7 - Movimiento circular de una partícula

Repasemos un poco: el movimiento es un concepto totalmente enlazado al desplazamiento de cuerpos, unos respecto de otros. El desplazamiento es aquel vector que indica cuánto (su módulo) y cómo (dirección y sentido) ha variado la posición de una partícula. Si se relaciona el desplazamiento con el intervalo de tiempo en el que ha ocurrido, se obtiene la velocidad de la partícula, la cual posee entonces la información de cuánto y cómo varía la posición por unidad de tiempo. Es la velocidad de una partícula la información esencial de su movimiento. El hecho que los diferentes momentos o instantes, durante el estudio de un movimiento, se sucedan de una manera única y ordenada (hacia el futuro) impone un signo característico a los intervalos de tiempo: los intervalos de tiempo son números positivos. Así, la velocidad de una partícula hereda características del vector desplazamiento: la dirección y el sentido, y es común describir tales características sin distinguir entre ambos vectores, la velocidad y el desplazamiento, obviamente diferentes. En esta discusión intentaremos caracterizar un cierto tipo de movimiento en el cual se ponen de manifiesto los cambios de orientación del vector posición. Vamos a comenzar por el análisis de aquellos desplazamientos que nos llevan a nuevos vectores posición que poseen el mismo módulo que los anteriores pero diferentes direcciones. El proceso mediante el cual se modifica la dirección de un vector sin alterar su módulo se denomina rotación.

Especificar una rotación requiere de algunas indicaciones:

a) Se rota en torno a un eje: debe especificarse el eje de rotación.

b) Se rota un cierto ángulo: debe especificarse el ángulo.

c) Se rota en un cierto sentido en torno al eje: debe especificarse el sentido.

Así, parece que una rotación posee más información que la que un número permite simbolizar y de ahí que intentaremos simbolizarla por un vector. No resulta muy claro qué se debe hacer frente a la instrucción: "tome ese libro y rótelo 5°". Es más clara la instrucción: "tome ese libro y rótelo 5° en torno a un eje vertical de manera tal que, si el eje fuera roscado, el libro ascienda"[3].

Para indicar una rotación haremos lo siguiente:

- tomaremos el valor del ángulo que se rota (a partir de una cierta dirección) como el módulo de un vector;
- adoptaremos como dirección del vector a la dirección del eje perpendicular al plano de la rotación (entorno al cual se rota) y

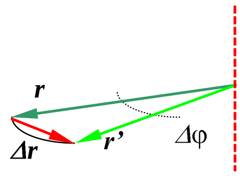
[3] Debo advertirle al lector que si no conoce la forma en que avanza un tornillo al enroscarlo, se verá en dificultades para comprender la descripción de los movimientos de rotación.

- el sentido de avance de un tirabuzón o tornillo (sobre el eje), que rota de la misma manera que la rotación que queremos describir, será el sentido del vector.

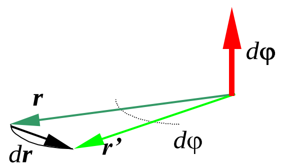
Al vector definido con las tres últimas indicaciones lo llamaremos vector rotación.

Existe una dificultad importante en cuanto a las propiedades del vector rotación: dos rotaciones sucesivas no conmutan. Es decir, se obtienen resultados diferentes si se altera la secuencia de las rotaciones. Ejemplo: tome un libro con alguna marca notable en una de las tapas; rótelo 90° alrededor de un eje vertical en el sentido que un tirabuzón o tornillo sobre el eje suba; rótelo a continuación 90° alrededor de un eje horizontal en el sentido que un tirabuzón o tornillo avance hacia su derecha. Observe la posición en la que quedó la marca del libro. Recuerde la posición alcanzada, vuelva el libro a su posición inicial y ahora ejecute las mismas rotaciones pero en otro orden. Primero la rotación de 90° alrededor del eje horizontal con sentido de tirabuzón hacia su derecha y a continuación la rotación de 90° alrededor del eje vertical con sentido de tirabuzón hacia arriba. El resultado de las rotaciones es evidentemente diferente. La falta de conmutatividad nos impedirá utilizar el vector rotación que hemos definido como un vector propiamente dicho. Las operaciones entre vectores deben satisfacer la propiedad conmutativa para que los elementos que se operan sean realmente vectores. Así que el vector rotación no debe ser tratado como tal a menos que aclaremos ciertas circunstancias bajo cuales las operaciones sean conmutativas. Veamos…Si tomamos el ejemplo del libro y reducimos los ángulos de rotación de 90° a 45°, tal vez notemos un cierto parecido entre las posiciones finales resultantes luego de ejecutar, en un orden u otro, la sucesión de rotaciones. Si en lugar de 45° rotamos 10 o 5° el parecido será más evidente. Así, si admitimos que podemos rotar ángulos tan pequeños como sea necesario para que sucesivas rotaciones (en cualquier orden) conduzcan al mismo resultado, el vector rotación tendrá las mismas propiedades que los vectores ordinarios. Concretando: un vector rotación satisface la propiedad conmutativa respecto a una sucesión de rotaciones, si su módulo es el menor posible. Dado que el módulo del vector rotación representa el ángulo que se ha rotado, el valor de tal ángulo debe ser un valor infinitesimal.

Analicemos una situación concreta de manera de usar los conceptos que se han esbozado. Imaginemos que una partícula rota en torno a un cierto eje describiendo una circunferencia. Supongamos que en un cierto instante t el vector $\boldsymbol{r}$ indica la posición de la partícula. Dejemos transcurrir Δt segundos tal que la partícula ha pasado a la posición indicada por el vector $\boldsymbol{r}$'. Sea $\Delta \boldsymbol{r}$ el desplazamiento entre las posiciones sucesivas $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{r}$' (siendo $\boldsymbol{r}$' el vector que se obtiene a partir de $\boldsymbol{r}$ rotando un ángulo $\Delta\varphi$). Por simplicidad se ha esquematizado el caso mediante una circunferencia en un plano horizontal de forma que el eje de rotación sea vertical, pero el lector no tendrá dificultad en imaginar una rotación cualquiera. El vector asociado a la rotación de valor $\Delta\varphi$, tendrá módulo $\Delta\varphi$, la dirección del eje de rotación y el sentido hacia arriba, en virtud de que un tirabuzón sobre el eje, que rota en el sentido de llevar $\boldsymbol{r}$ hacia $\boldsymbol{r}$', ascendería. Para poder usar las propiedades conocidas de los



vectores en el manejo del vector rotación, analicemos la situación haciendo Δt lo más pequeño posible ($\Delta t \rightarrow 0$). En ese caso, $\Delta\varphi \rightarrow d\varphi$, $\Delta \boldsymbol{r} \rightarrow d\boldsymbol{r}$. En estas circunstancias podemos representar a la rotación por el vector $d\varphi$ sobre el eje de rotación (hacia arriba) y el desplazamiento $d\boldsymbol{r}$ será perpendicular a $\boldsymbol{r}$. Lamentablemente no es posible representar una rotación de valor infinitesimal y el esquema de la figura es un esquema muy aproximado de la situación. Siendo (en el caso de una rotación infinitesimal) $d\varphi$, $\boldsymbol{r}$ y $d\boldsymbol{r}$ perpendiculares entre sí ya que la dirección de $d\boldsymbol{r}$ será la de la tangente a la curva, la relación entre el vector rotación $d\varphi$ y el cambio producido en $\boldsymbol{r}$ es:



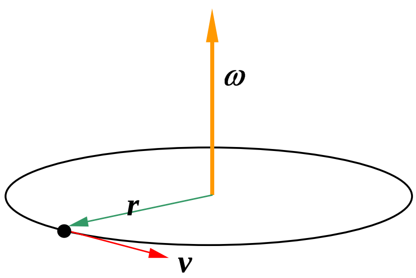
$$d\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}$$

De manera que si dt es el intervalo de tiempo en el cual se produjo el desplazamiento $d\boldsymbol{r}$, la velocidad de la partícula que rota será:

$$v = \frac{d\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

donde se ha definido el vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ como $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{d\varphi}{dt}$

La velocidad angular es un vector que, con la misma dirección y sentido que el vector rotación, representa cómo se efectúa el barrido angular de la dirección de un vector, por unidad de tiempo. Las unidades de $\boldsymbol{\omega}$ son radianes por segundos [rad/s].



La figura muestra los vectores ***r*, *v*** y ω en un cierto instante *t*, durante el movimiento circular de una partícula. En este tipo de movimiento, los vectores ***r***, ***v*** y ω son perpendiculares entre ellos y esta situación es una particularidad del movimiento circular[4]. Así, el módulo de la velocidad resulta:

$$v = |\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{\omega}| \cdot |\boldsymbol{r}| \text{ sen } 90° = |\boldsymbol{\omega}| \cdot |\boldsymbol{r}| = \omega\ r$$

De esta manera, es claro que el módulo de la velocidad variará en tanto varíe el módulo de la velocidad angular (el módulo del vector posición es el radio de la circunferencia). Las variaciones de la velocidad ***v*** están descriptas por la aceleración. Por definición, la aceleración se obtiene derivando la expresión de la velocidad. El lector debe recordar que la derivación de un producto vectorial de funciones sigue las mismas reglas que el producto ordinario de funciones. Por lo tanto, la aceleración de una partícula que efectúa un movimiento circular es:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\ = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

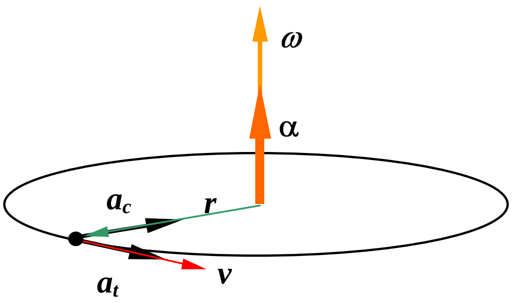
donde se ha hecho una nueva definición vinculada al cambio de la velocidad angular:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\boldsymbol{t}}.$$

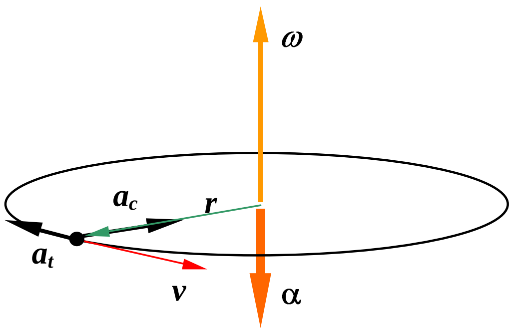
La aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ describe los cambios en la velocidad angular ω a medida que transcurre el tiempo. La aceleración angular se mide en radianes por segundo cuadrado [rad/s^2] o “radianes por segundo, cada segundo”.

[4] En un movimiento elíptico, por ejemplo, no siempre el vector posición (desde un foco) es perpendicular al vector velocidad.

Escapa al alcance de estos apuntes describir un movimiento de rotación completamente general. Nos hemos circunscripto al caso de una partícula rotando según una circunferencia, en torno a un eje fijo, pues es el caso más sencillo para analizar el movimiento de rotación y a su vez, contiene todos los elementos conceptuales de una rotación más complicada. De todas maneras, el lector no debe perder de vista que se trata de una descripción particular. Por ejemplo, la aceleración angular (que acabamos de definir) mide los cambios en la velocidad angular. Tales cambios, tratándose de un movimiento circular en torno a un eje de dirección fija (vertical, horizontal, inclinada o como quiera, pero fija!) se restringen a modificaciones del módulo y eventualmente un cambio del sentido de la velocidad angular ω. Los cambios de dirección no están contemplados. Así, la aceleración angular α, será un vector paralelo al vector ω, con el mismo sentido (si la velocidad angular es cada vez más intensa) o con sentido opuesto a ω (si la velocidad angular es cada vez más "lenta"). Dos figuras esquematizan las respectivas situaciones. La primera debe interpretarse como una



fotografía del caso en el cual la velocidad angular es cada vez mayor, de manera que al cabo de un intervalo de tiempo dt, una nueva fotografía mostraría un vector velocidad angular incrementado en $d\omega = \alpha\, dt$. La siguiente corresponde a la situación en la cual la velocidad angular disminuiría, al cabo del intervalo dt, en la cantidad $\alpha\, dt$. En ambos casos (y



volviendo a insistir en que no se consideran cambios en la dirección del vector $\boldsymbol{\omega}$), la velocidad angular y la aceleración angular son vectores paralelos y en consecuencia, el vector que representa a α es perpendicular al vector posición $\boldsymbol{r}$. No se olvide el lector que se trata de un caso particular de movimiento de rotación.

Retomando la discusión sobre la aceleración $\boldsymbol{a}$ de la partícula estudiada, hemos hallado que está constituida de dos términos (que surgen naturalmente al derivar el producto vectorial). En virtud de lo comentado antes, el primer término (realmente el orden es irrelevante) es un vector perpendicular al plano determinado por α y $\boldsymbol{r}$. Este vector tiene la dirección de la velocidad y por lo tanto se lo denomina "componente tangencial" de la aceleración o "aceleración tangencial" $\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}$. Su módulo es (teniendo en cuenta la perpendicularidad entre los vectores) $a_t = \alpha\, r$, siendo r el radio de la circunferencia. Conocer la aceleración tangencial permite determinar los cambios en el módulo de la velocidad.

El segundo término de la aceleración es un vector (perpendicular al plano determinado por $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{v}$) con dirección radial y sentido hacia el centro de la circunferencia. Así, este último término

$$\boldsymbol{a}_c = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

es denominado "componente centrípeta de la aceleración" o simplemente "aceleración centrípeta", cuyo módulo es $\omega\, v = \omega^2 r = \dfrac{v^2}{r}$.

La aceleración como suma vectorial de las componentes tangencial y centrípeta (que son perpendiculares entre sí) tiene módulo:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{(\alpha r)^2 + (\omega^2 r)^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Cabe al lector analizar la forma de la aceleración para el caso de un movimiento circular uniforme (aquél con velocidad angular constante).

Como ya se ha mencionado (tal vez en exceso), se ha estudiado un movimiento circular en torno a un eje de dirección fija, de forma que los vectores velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ son paralelos. Es ilustrativo analizar el caso de una aceleración angular constante. Si representamos dichos vectores en un sistema de coordenadas con uno de sus ejes en la dirección del eje de rotación, podemos manejarnos con ecuaciones numéricas de la siguiente manera:

Sea el eje *z* (por ejemplo) el eje del movimiento circular en el mismo sentido de la velocidad angular. La velocidad angular y aceleración angular serán $\boldsymbol{\omega} = \omega\, \breve{\boldsymbol{k}}$ y $\boldsymbol{\alpha} = \pm\, \alpha\, \breve{\boldsymbol{k}}$ respectivamente. El doble signo en la aceleración angular corresponde a los casos ya discutidos de velocidad angular que aumenta (+) o que disminuye (-). Si la aceleración angular es constante, el cambio de la velocidad angular a partir de un valor ω_0 determinado en t_0, es:

$$\Delta\omega = \omega - \omega_o = \int_{\omega_o}^{\omega} d\omega = \int_{t_o}^{t} \alpha\, dt = \alpha \int_{t_o}^{t} dt = \alpha \Delta t = \alpha(t - t_o)$$

Así, si elegimos arbitrariamente $t_o = 0$ y usamos las expresiones de ω y α resulta

$$\omega = \omega_o \pm \alpha t$$

Si incluimos en el análisis al vector rotación $d\varphi$, representado en el mismo sistema de coordenadas, es sencillo encontrar que a partir del momento en que se inicia el estudio, el ángulo rotado es

$$\varphi = \varphi_o + \omega_o t \pm \frac{1}{2}\,\alpha\, t^2$$

donde φ_o es el ángulo que forma el vector posición de la partícula respecto el eje *x* al momento inicial.

Las últimas ecuaciones son enteramente análogas a las que se deducen para el movimiento uniformemente acelerado.

La descripción de una rotación cualquiera, en la cual el eje de rotación se mueve en el espacio, incluye los mismos conceptos discutidos hasta ahora. El análisis es algo complicado en virtud de que las magnitudes de la cinemática de rotación está definidas en términos de productos vectoriales. Asímismo, lo que hemos denominado aceleración centrípeta (hacia el centro) podría perder significado si la trayectoria no fuera una curva con "centro". Los conceptos no son difíciles de generalizar pero ese análisis escapa al alcance de estas notas.

Síntesis conceptual

El concepto más relevante introducido en este capítulo es el de velocidad. La velocidad es la información que sintetiza el hecho básico de la Mecánica: *los* *cuerpos se desplazan unos respecto a otros a medida que el tiempo transcurre*.

La velocidad no es algo que un objeto posea sino algo que manifiesta en relación a otros objetos (el sistema de referencia).

Poseer velocidad es asegurar que existirá desplazamiento con el transcurrir del tiempo.

La simbolización más adecuada de la última declaración es:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}\, dt$$

siendo dt el símbolo que se usa para representar la idea de que el reloj ha dejado de marcar el instante t, pasando a indicar el instante "siguiente".

Si la velocidad es nula, el desplazamiento será nulo y se mantendrá la posición. Si la velocidad no es nula, la posición cambiará en $d\mathbf{r}$.

Describir un movimiento es indicar qué velocidad presenta un objeto cuando está en un cierto lugar del espacio en un dado momento. Tal información se puede extraer tanto de la trayectoria como de la aceleración (el comportamiento de la velocidad).

En general, la información requerida para hacer una predicción en base al fenómeno del movimientos es:

- el conocimiento de la posición y la velocidad de un objeto en un cierto instante (que son valores específicos) y
- conocer la aceleración, es decir, el comportamiento de la velocidad (una cierta función del tiempo).

CORTEN!!! Las escenas estaban casi todas filmadas. El director no veía la hora de estar compaginando y editando en la moviola lo que seguramente sería su película más importante. El broche de oro lo pondría en la última escena, la de la muerte del asesino, que al ser descubierto, era perseguido por todo el buque para terminar desplomándose sobre la cubierta principal desde alguna cubierta superior. Para aumentar el dramatismo, el director pensó en la cubierta del cuarto piso y en poner tantas cámaras como hicieran falta para filmar la caída verdadera. Cámara en una de las chimeneas altas, cámara en el piso inferior, cámara en un helicóptero que volaría pasando cerca del asesino durante la caída, cámaras en la costa, cámara en un bote viajando para un lado y en otro viajando para otro. Y si los de Green Peace (que estaban protestando por el perjuicio del gigantesco escenario para con las cristalinas aguas de tan maravilloso lago) querían una cámara, también se las daría. Presupuesto no faltaba y la esencia absoluta y total de la caída iba a ser filmada. Una semana de instrucciones, ensayos, consultas, peleas y montones de muñecos tirados por la cubierta le dieron cierta seguridad y con muchos nervios y excitación dijo: "Acción!!!". El doble se arrojó, el aire se llenó de ruido a rollos, clicks, ticks y ñacks hasta que se escuchó "CORTEN". Luego de algunos segundos eternos se oyeron aplausos aislados que terminaron convertidos en ovaciones saltos y gritos. Todos habían advertido la excelencia del trabajo, el resultado de horas de dedicación y sacrificio y, por qué no decirlo, la inminente paga del abultado salario por horas extra. La retirada del equipo técnico no estuvo ajena a comentarios interesados de los camarógrafos que sutilmente insinuaban que su escena sería la elegida por tales y cuales motivos muy bien explicados.
Al fin, el director se sentó frente a la moviola. La recta final. Miró cada rollo de cada cámara. Sonrió en cada uno de ellos. Se deslumbró con muchos. Se meció sobre el sillón y comenzó a meditar respecto a la elección, seguro de que en alguna estaba la esencia, la verdad… Pasaron días, semanas, meses… Muchos nunca entendieron qué fue lo que frustró la obra.

Capítulo 2
Las magnitudes físicas y sus relaciones

Las Leyes de Newton. Las bases de la Mecánica

Introducción

No creo que exista nada más citado y usado, en los ambientes donde se estudian ciencias, que las Leyes de Newton.

Según la traducción de los Principia (Desiderio Papp, Historia de la Física, Espasa-Calpe, S.A., Madrid, 1961, pag. 335) las Leyes de Newton se enuncian como:

I. *Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o de movimiento uniforme y en línea recta, salvo en cuanto mude su estado obligado por fuerzas exteriores.*

Los proyectiles perseveran en su movimiento, salvo en cuanto son retardados por la resistencia del aire, o por la fuerza de la gravedad que los impele hacia abajo. El trompo cuyas partes coherentes son perpetuamente desviadas del movimiento rectilíneo no cesa de girar sino en cuanto es retardado por el aire. Sin embargo, los cuerpos mayores de los planetas y cometas conservan por más tiempo sus movimientos progresivos y circulares, que se efectúan en espacios menos resistentes.

II. *El cambio del movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y se efectúa según la línea recta en dirección de la cual se comunica dicha fuerza.*

Si alguna fuerza comunica un movimiento cualquiera, la fuerza doble, triple, etc., generará doble o triple movimiento, ya sea que esas fuerzas se apliquen *simultáneamente o de modo graduado y sucesivo. Y este movimiento (en el mismo plano determinado con la fuerza generatriz), si el cuerpo se movía ya antes, se agrega a aquel movimiento, si él obra en el mismo sentido, o, al contrario, lo disminuye o lo desvía oblicuamente y se compone con él, según la acción de ambos.*

III. *A toda acción se opone siempre una reacción contraria e igual: es decir, que las acciones entre dos cuerpos son siempre iguales entre sí y dirigidas en sentido contrario.*

Es muy frecuente encontrar libros en los cuales los axiomas o postulados que se utilizan como punto de partida para el análisis del movimiento de los cuerpos y sus causas, son precisamente las leyes enunciadas. Tal vez el hecho refleja un respeto profundo por la genialidad de Newton, pero también manifiesta una falta de criterio y rigor. A mi entender, respetar a Newton es reconocerlo como el primer físico teórico, es decir, como el primer físico que intentó dar una explicación de un gran conjunto de observaciones experimentales admitiendo como verdaderas un reducido conjunto de declaraciones inferidas de los experimentos. Sin desmerecer a Newton bajo ningún punto de vista y agradeciendo su legado, vamos a reinterpretar sus declaraciones, a fin de discutir los axiomas modernos que permiten establecer un marco de discusión para los procesos mecánicos.

Actualmente contamos con un poderosísimo lenguaje simbólico que han desarrollado los matemáticos (y muchos físicos, entre ellos Newton) con el cual podemos representar hechos de la realidad. El álgebra numérica, el álgebra vectorial (y de elementos más complicados como tensores), el análisis funcional, el cálculo integral y diferencial, etc., son conocimientos indispensables para la simbolización de la realidad y en particular, el movimiento de los cuerpos. Si tales conocimientos se poseen, es posible formalizar, reproducir y predecir hechos relacionados con el movimiento. La manera de reproducir y predecir depende de la formalización y ésta última será adecuada si las predicciones realizadas se aproximan a los resultados experimentales. ¿Cómo podemos formalizar la descripción del movimiento? Trataremos de construir una secuencia de ideas basándonos en lo que sabemos sobre posición, velocidad, aceleración y fuerza. Lo último, la fuerza, es tal vez la idea menos elaborada: ¿Qué entendemos realmente por fuerzas? ¿Son realmente esas sensaciones que algunos libros describen como evidentes al tocar un objeto o son algo más simple o más complicado?

La palabra fuerza deriva de la palabra fuerte, con la cual está emparentada forte que es la voz de mando en faenas marineras. Es decir, la actitud, la coordinación y el comportamiento que se obtiene en una tripulación para que actúe según lo requieran las circunstancias provienen de un forte o son consecuencia de un forte. De esta manera, la palabra fuerza es usada, en un contexto moderno, como aquéllo que representa la influencia necesaria e indispensable para conseguir un resultado. En el área de la mecánica, la fuerza es lo que representa la influencia de un cuerpo sobre otro. La fuerza es la manera con que un cuerpo manifiesta su influjo en virtud de que forma parte del medio ambiente en el que otro cuerpo (el que estudiamos) se mueve. Ahora, esto de "cómo influye" parece ser importante en la comprensión del concepto. Los resultados de los experimentos nos muestran "cómo influye" un cuerpo sobre otro y los experimentos nos indican que la influencia que un objeto hace sobre otro, es decir, la fuerza que un objeto puede hacer sobre otro está caracterizada por tener intensidad, dirección y sentido. Se influye de arriba hacia abajo, de derecha a izquierda y otras tantas posibilidades. No ocurre así con otro tipo de magnitudes como por ejemplo la temperatura pues los experimentos nos indican que no se tiene frío hacia el sudeste. La fuerza, como símbolo que representa la influencia de un cuerpo sobre otro, se revela en los experimentos como una magnitud vectorial y, retomando la discusión, intentaremos establecer alguna relación entre las particularidades del movimiento de un cuerpo y las influencias del medio en el que se desarrolla dicho movimiento.

En primer lugar diremos que el movimiento de todo cuerpo es un concepto relativo. Es decir, sin interesarnos en qué cuerpo se está moviendo, diferentes observadores advertirán diferentes tipos de movimientos. Distintos observadores podrán declarar de un mismo cuerpo, que está en reposo o que describe una trayectoria recta o curva o que da vueltas o que va y viene o lo que sea. Todas las observaciones serán válidas en el sentido que las posiciones, velocidades, etc., son el resultado de medidas objetivas hechas con instrumentos y métodos adecuados. Nada ganamos peleándonos con alguien que afirme (del movimiento de un cuerpo) cosas diferentes de las que nosotros observamos. Ambos tendremos razón.

Si el lector se ha convencido de la relatividad del movimiento, podemos hacer una nueva pregunta: ¿las diferencias evidenciadas por distintos observadores, serán consecuencia de diferentes cosas que influyen sobre el cuerpo analizado? Evidentemente, cada observador podrá extraer diferentes conclusiones según lo que haya visto[1]. Con seguridad todos los observadores coincidirán en algo muy pero muy general: “el cuerpo que estoy estudiando

---

[1] “Visto” quiere decir lo que ha establecido experimentalmente en su carácter de observador.

no está solo en el universo sino más bien inmerso en él, así que lo que observo será una consecuencia de esta situación (la de estar inmerso en un universo)". Así parece, entonces, que el comportamiento del movimiento de un cuerpo depende no sólo de quien lo observa sino de la manera en que el universo influye sobre él. Planteamos ahora una nueva pregunta: ¿será posible relacionar la manera con que el universo influye sobre un objeto con las características del movimiento que se le observa? De existir tal relación no se trataría de una sola cosa pues el mismo objeto analizado por diferentes observadores presenta características distintas de movimiento, lo que induce a pensar que para cada observador la influencia del universo se manifiesta de diferentes formas.

Como hemos propuesto más arriba, la fuerza es el concepto que sintetiza la idea de influencia entre cuerpos. Si admitimos ahora que el universo es único y fuera de él no existe ninguna otra cosa que influya sobre el cuerpo que estudiamos (esto está contenido en lo que entendemos por universo) deberíamos admitir que la influencia es también única y por lo tanto independiente del observador. Si esto es así, el problema de las variantes en el movimiento de un objeto determinadas por diferentes observadores y su relación con la influencia que ejerce el universo, es un problema del observador en particular. En otras palabras, el universo influye de manera única y distintos observadores advierten movimientos diferentes de un mismo cuerpo. Así que, de existir una relación entre influencias y movimiento, ésta no será necesariamente evidente o explícita para cualquier observador.

Nueva pregunta: ¿cuáles serán los observadores que puedan ponerse de acuerdo en algún tipo de relación entre fuerzas y comportamiento del movimiento? Aceptar que no cualquier observador posee la virtud de vincular fuerzas y tipo de movimiento (en acuerdo con otros) es la esencia del primer axioma de la mecánica y es el contenido de la Primera Ley del Movimiento enunciada por Newton (y que debe reformularse para que las palabras reflejen adecuadamente sus ideas).

La idea de que para algunos observadores habrá acuerdo al vincular fuerzas con tipos de movimiento impone la necesidad de distinguir para cuáles sí y para cuáles no se podrá entablar la vinculación. El camino adecuado para diferenciar entre observadores pasa por ponerse en alguna situación crítica que ponga en evidencia algo que nuestra razón acepte (es decir, algo que admitamos como una verdad). En pocas palabras, debemos encontrar un método razonable de "calibrar" un observador. En primer lugar nos limitaremos a describir cuerpos para los cuales la especificación de una velocidad sea suficiente para caracterizar completamente su movimiento, es decir cuerpos cuyo movimiento pueda homologarse al de un único punto del espacio. El modelo de representación del movimiento de un cuerpo mediante el movimiento de un punto del espacio se llama modelo de partícula y al cuerpo cuyo movimiento está bien descripto por el modelo de partícula se lo denomina también partícula o punto material (el concepto encerrado por la palabra partícula no contiene, en este contexto, la idea de elemento y tal vez debamos ampliarlos al estudiar conjuntos de partículas).

2.1 - Las bases de la Mecánica

Bien, para distinguir entre observadores que puedan llegar a un acuerdo al vincular fuerzas y tipo de movimiento y los que no lo puedan hacer, nos preguntaremos por la siguiente situación: ¿qué características admitiremos como razonables al observar el movimiento de una partícula totalmente libre de fuerzas? Uno espera que el movimiento de una partícula libre de toda fuerza sea un movimiento que no presente rasgo particular alguno.

Siendo la velocidad la magnitud apropiada para hablar de movimiento, deberíamos admitir en consecuencia, que lo que se debe determinar en el movimiento de una partícula libre de fuerzas es una velocidad sin variaciones o cambios: una velocidad constante. No está de más enfatizar que constante significa siempre igual a medida que el tiempo transcurre.

Pongámonos ahora en la situación de que tal partícula libre de fuerzas exista y que diferentes observadores estudien su movimiento. Los resultados de las observaciones serán variados porque es natural que distintos observadores determinen diferentes peculiaridades del movimiento del mismo cuerpo. ¿Habrá algún observador para el cual la partícula libre se presenta con velocidad constante? De ser así, ese observador es especial pues observa lo que se admite como razonable de una partícula libre de fuerzas. Es más, tal observador no será el único en determinar que una partícula libre posee velocidad constante; también lo harán todos los observadores que se muevan respecto a él a velocidad constante. Concretemos: admitiremos como una verdad que **existe al menos un observador que determina que una partícula libre de fuerzas posee velocidad constante; tal observador se denomina observador inercial**.

Esta última declaración (de contenido tan parecido a la primera Ley de Newton) que establece un observador de privilegio entre los posibles observadores del movimiento de una partícula libre, constituye el primer postulado de la mecánica. Todo observador que se mueva a velocidad constante con respecto al observador inercial, también será un observador inercial. Con toda seguridad Newton apuntó (en un lenguaje científico poco desarrollado para su época) a caracterizar un observador pero el hecho es que no lo mencionó y de ahí que hoy día debemos reinterpretar su declaración. La relatividad del movimiento impone no sólo prestar atención al cuerpo que se mueve sino a quien lo describe.

Una vez establecidas las propiedades que debe poseer un observador para poder relacionar fuerzas y comportamiento cinemático, es decir, una vez que admitimos que un observador (al menos) determina velocidad constante para una partícula libre de fuerzas, podemos afirmar lo siguiente (que es trivial): si para un observador inercial una partícula libre posee velocidad constante, para ese mismo observador una partícula no libre poseerá velocidad no constante (aceleración).

La relación entre las fuerzas y la aceleración habrá que proponerla de manera coherente con todo lo que hemos discutido hasta ahora. En particular, recordemos que hemos admitido que la partícula bajo estudio está sometida a la influencia del medio en el que desarrolla su movimiento y que nos pareció adecuado admitir que el medio influye de una sola manera sobre un cuerpo. Sosteniendo esto último diremos que: **la aceleración de una partícula no libre** (determinada por un observador inercial) **está directamente relacionada con el resultado de las fuerzas** (influencias) **que cada cuerpo del medio ejerce sobre la partícula estudiada**.

La relación entre la resultante de las fuerzas y la aceleración de la partícula es una característica exclusiva de la partícula durante su movimiento, denominada **masa inercial**. Con seguridad la palabra masa merece una discusión mucho más amplia. Ya de entrada la hemos calificado de inercial sin ningún argumento evidente. Aún cuando en un sentido doméstico la palabra masa se usa para indicar cantidad de material, el concepto de masa inercial es algo más complicado que escapa del alcance de estos apuntes. Lo que podríamos indicar sin profundizar mucho en el tema es que una partícula debe poseer alguna característica propia no relativa al observador que le permita detectar la influencia de otras partículas. En el campo de la mecánica esa característica se llama masa inercial. Sin masa inercial, una partícula es insensible a la influencia mecánica de otro cuerpo así como la falta de carga hace insensible a un cuerpo de la influencia eléctrica de otros cuerpos cargados.

Si bien nos hemos escapado de los conceptos mecánicos para intentar esclarecer la idea de masa ya que mencionamos la carga eléctrica, un lector ajeno a la idea de carga eléctrica no debería estar leyendo estos apuntes. Y ya que estamos digamos algo más en relación al concepto de masa: si la masa inercial es la característica que debe poseer una partícula para detectar la influencia de otros cuerpos manifestándola con su manera de moverse (visto por un observador inercial y de ahí su nombre), la masa gravitatoria es la característica que debe poseer una partícula para ser susceptible de participar de la atracción gravitatoria con otra partícula. No hay todavía un experimento que muestre que la masa inercial y la masa gravitatoria sean cosas diferentes así que admitiremos que son la misma característica y que la palabra masa sin calificativo ninguno basta para indicarla (Principio de equivalencia).

Bien, retomando y resumiendo: la manera de representar la relación entre fuerzas y aceleración es la bien conocida expresión:

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i = m\,\boldsymbol{a}$$

siendo $\boldsymbol{F}_i$ la fuerza ejercida por el cuerpo *i* del medio sobre la partícula que estamos estudiando, *m* la masa de la misma y $\boldsymbol{a}$ su aceleración (determinada en un sistema inercial). Si denominamos cantidad de movimiento $\boldsymbol{p}$ de una partícula al producto de su masa por su velocidad, el término $m\boldsymbol{a}$ se puede escribir como $d\boldsymbol{p}/dt$ y la relación entre fuerzas y características de movimiento se puede enunciar como:

La resultante de las fuerzas actuantes sobre una partícula coincide con el cambio en el tiempo de su cantidad de movimiento:

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

Entablar esta igualdad para un observador inercial, constituye el segundo postulado de la mecánica.

Del segundo postulado de la mecánica se deduce que las unidades en las cuales hay que expresar las fuerzas son equivalentes a $kg\ m/s^2$ (ya que éstas son las que resultan de $d\boldsymbol{p}/dt$. Tales unidades se denominan Newtons.

Hasta ahora hemos caracterizado a un observador especial y a la relación que éste puede establecer entre las características del movimiento y el resultado de las fuerzas que actúan sobre una partícula cualquiera, elegida arbitrariamente del universo de partículas que podemos estudiar. Esta última libertad de elección tal vez nos lleve a hacer una nueva propuesta.

Si un observador inercial elige una partícula cualquiera y a través del estudio de su movimiento determina cómo esa partícula experimenta la influencia de las otras, ¿las características de la influencia se revelarán diferentes según la elección? Se complica un poco imaginar una respuesta ya que lo que el observador inercial determina son las características de la influencia conjunta de todas las partículas del universo y elegir otra partícula es cambiar las influencias, así que bien podría (bah, con seguridad) determinarse un resultado diferente. Tratemos entonces de imaginar un experimento donde sólo intervengan dos partículas de manera que estudiar el movimiento de una de ellas revele alguna característica de la influencia a la que la "somete" la otra. Tal experimento es ideal pero sabemos que la imaginación es grandiosa y acompañada de la lógica, más todavía. A su vez adoptemos definitivamente a la fuerza como símbolo de la influencia.

El mecanismo con que se ejerce la fuerza de una sobre otra no puede depender de cuál elijo para estudiar. La fuerza que surja en una de ellas debida a la existencia de la otra deberá tener la dirección de la recta que une las partículas ya que tal recta marca la dirección del espacio de donde proviene la influencia. Así, admitida una dirección para la fuerza, ésta puede tener dos posibles sentidos. Si por estudiar una de las partículas se concluye que la fuerza es atractiva (o repulsiva), al estudiar la otra (bajo la influencia de la anterior) se debe obtener la misma conclusión (admitiendo, claro, que este universo de dos partículas es único). Estudiar una u otra debe llevarme a las mismas conclusiones sobre este universo único. ¿Por qué? Bueno, porque si estudiando una partícula la fuerza resulta atractiva y estudiando la otra, resulta repulsiva, ambas fuerzas apuntan en el mismo sentido y tal cosa sugiere que ese universo de dos partículas tiene predilección por una orientación en particular y tratándose del universo eso no debería ocurrir.

Concretando: si una partícula influye sobre otra, ésta última se comportará de la misma manera influyendo sobre la primera de manera equivalente. Admitiremos sin demostración que **si una partícula ejerce una fuerza sobre otra partícula, ésta última ejercerá sobre la primera una fuerza igual y de sentido contrario; ambas fuerzas tendrán la dirección de la**

recta que une las partículas.

Admitir como verdadera esta última declaración constituye el tercer axioma de la mecánica. El tercer postulado establece la equivalencia entre partículas en tanto niega la posibilidad de que una partícula, por motivo alguno, pueda ejercer sobre otra una fuerza de diferente naturaleza de la que esta última pueda ejercer sobre ella. Es más, define lo que entendemos por interacción: la acción mutua.

Debe notarse que no se ha puesto en juego ninguna relación causal: una fuerza no es consecuencia de la otra sino más bien existen de manera simultánea aunque al enunciar el postulado no quede más remedio que describir una secuencia como si una fuerza fuera consecuencia de la otra. Tal vez una mejor manera de establecer la afirmación sea:

Dos partículas se ejercen entre sí fuerzas iguales y opuestas en la dirección de la recta que une las partículas.

El hecho de que las fuerzas surjan de a pares nos permite asegurar que para cada fuerza $\boldsymbol{F}_i$ (del segundo postulado) existe, sin excepción, una fuerza $-\boldsymbol{F}_i$ influyendo sobre la partícula que aplicó $\boldsymbol{F}_i$ en la que se estudia.

Si queremos extender la discusión a casos de tres o más partículas creeremos verdadero que lo que se discutió para dos partículas es verdad aún en presencia de otra u otras partículas (Principio de superposición).

Síntesis: admitiremos por verdaderas las siguientes declaraciones e intentaremos explicar el movimiento de partículas y conjunto de partículas sin entrar en contradicción con ellas. A su vez, si el resultado de alguna observación o experimento no puede ser predicho a partir de estas declaraciones, las mismas serán modificadas para evitar la contradicción con la observación.

Primer postulado de la Mecánica:

> **Existe al menos un observador que determina que una partícula libre de fuerzas posee velocidad constante; tal observador se denomina observador inercial**.

Segundo postulado de la Mecánica:

> **La resultante de las fuerzas actuantes sobre una partícula coincide con el cambio en el tiempo de su cantidad de movimiento**.

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

Tercer postulado de la Mecánica:

> **Dos partículas se ejercen entre sí fuerzas iguales y opuestas en la dirección de la recta que une las partículas**.

El primer postulado se enuncia con relación al observador. El segundo se refiere a lo observado y su relación con el medio en el cual se encuentra y el tercero caracteriza la interacción.

Los postulados seguirán siendo llamados Leyes o Principios de Newton como homenaje a quien los concibió.

Naturalmente que se puede discutir la veracidad de los postulados de la Mecánica. ¿Qué respondería el lector a las siguientes preguntas?:

- ¿Existe una partícula libre que pueda ser observada?
- ¿Exite un observador inercial?

- ¿No es el observador en sí una influencia sobre lo observado?
- ¿Será cierto que la influencia del universo se puede pensar como la suma de las influencias individuales de cada partícula que lo componen?
- El tercer postulado se refiere estrictamente a la fuerza entre dos partículas que constituyen en sí un todo y como tal sin orientaciones privilegiadas. La existencia de alguna otra característica de una partícula que no sea la masa, como por ejemplo la carga ¿cambiará el rumbo de la discusión?
- Si los experimentos los hemos hecho en nuestro planeta y algunos pocos fueron hechos fuera de nuestro planeta (en la Luna, por ejemplo) ¿Qué indicios tenemos para creer que lo que descubrimos es verdad en cualquier otro lugar del universo?

En tanto lo que se deduzca de los postulados sea una buena descripción de los resultados de la observaciones, admitiremos que los postulados son buenos, es decir, son verdaderos. El acierto en la predicción será alentador y el desacierto fatal. La existencia de un único contraejemplo bastará para ponerlos en duda. Mientras tanto...

2.2 - La importancia del observador

La descripción del movimiento de una partícula pasa por la especificación de su cantidad de movimiento $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ (en un cierto instante) y la determinación de la resultante de las fuerzas que sobre ella actúan ya que ésta define las modificación de $\boldsymbol{p}$ con el transcurso del tiempo. El hecho que la cantidad de movimiento esté definida a través de la velocidad y que ésta a su vez dependa del cambio en la posición (y no explícitamente de la posición) desdibuja el punto de vista de la observación. Esto quiere decir, en pocas palabras, que en la cantidad de movimiento no hay información directa relativa al observador. Esta situación no es extraordinariamente traumática: se sabe que dos observadores cualesquiera determinarán, en general, diferentes cantidades de movimiento de la misma partícula y así se insiste una vez más en la relatividad del movimiento. Pero... en la situación que los observadores estén en reposo, uno respecto al otro, y como consecuencia determinan la misma cantidad de movimiento de una partícula, ¿cómo se evidencian las diferentes observaciones? En principio, no es posible. Veamos ahora si a través de alguna magnitud nueva podemos introducir explícitamente el punto de vista. Tal punto de vista está contenido en el vector posición ***r*** que es particular de cada observador y en consecuencia todo lo que de él se derive. Una combinación adecuada de la posición de una partícula y su cantidad de movimiento poseerá la información buscada.

2.3 - Momento angular

Se define momento angular o momento cinético o momento de la cantidad de movimiento de una partícula, en el instante *t*, al vector ***l*** que resulta de la operación:

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

El momento angular tiene dirección perpendicular al plano que determinan ***r*** y ***v***, sentido determinado por la regla del tirabuzón (haciendo rotar ***r*** hacia ***v***) y módulo

$$l = |\boldsymbol{r}| \; |\boldsymbol{p}| \; \operatorname{sen} \alpha$$

siendo α en ángulo entre ***r*** y ***v***. Las unidades de momento angular resultan de la combinación de unidades de longitud y de cantidad de movimiento [m^2 kg/s] y no tienen nombre en particular.

El momento angular de una partícula es una magnitud instantánea que resulta no nula en el caso que la posición y la velocidad de la partícula no tengan la misma dirección. En efecto,

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$$

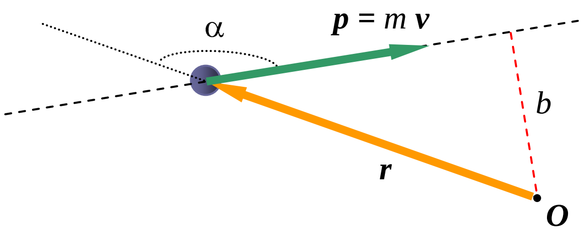
resulta nulo si $\boldsymbol{r}$ es paralelo a $\boldsymbol{v}$.

El hecho que una partícula posea momento angular en un cierto instante indica que su vector posición y el cambio que ocurrirá en él (contenido en la velocidad) no son paralelos y así el vector posición en el instante siguiente tendrá, con certeza, dirección distinta del anterior. El cambio de dirección del vector posición es una manifestación directa de lo que llamamos rotación y resulta entonces que el momento angular evidencia el hecho que una partícula rote, o no, respecto de un dado observador. Si para un observador, durante un cierto intervalo de tiempo, el momento angular no es nulo (pudiendo eventualmente variar o no), se puede afirmar que la partícula rota respecto a dicho observador. Por el contrario, si en los sucesivos instantes del intervalo considerado el momento angular de una partícula relativo al observador se mantiene como el vector nulo, tal observador no detectará rotaciones de la partícula y sólo podrá indicar que ésta se aleja de o se acerca hacia el origen de su sistema de coordenadas.

Resumiendo, si para un observador el movimiento de una partícula requiere que el vector posición vaya cambiando de dirección a medida que transcurre el tiempo, se dice que la partícula rota respecto a tal observador y en ese caso la partícula tendrá momento angular. Si el movimiento es tal que el vector posición no cambia de dirección, la partícula no está rotando (respecto al tal observador) y el momento angular es nulo. El momento angular es la magnitud física que manifiesta explícitamente el fenómeno de rotación de una partícula.

La cantidad de movimiento de una partícula pone de manifiesto su movimiento ya que la velocidad marca los cambios en el vector posición. El momento de la cantidad de movimiento (momento angular) evidencia, por su parte, si los cambios en la posición incluyen o no modificaciones en la dirección de vector posición. Analicemos ahora algunas situaciones apuntando a determinar el momento angular de una partícula.

Supongamos que una partícula se mueve en un trayectoria rectilínea y evaluemos el momento angular respecto a un observador cuyo origen de coordenadas *O* se encuentra fuera de los puntos de la trayectoria. El momento angular de la partícula en el instante que muestra la figura será, por definición ($\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$) un vector perpendicular al plano de la hoja, con sentido entrante a la hoja y de módulo:



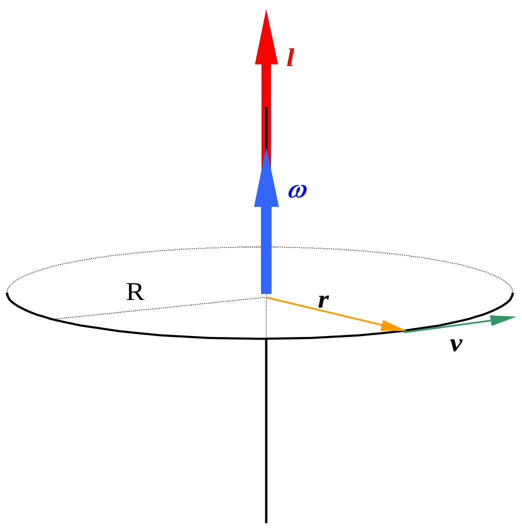
$$l = r\,p\,\mathrm{sen}\,\alpha = bmv$$

donde b es la distancia desde el origen a la recta que contiene a la trayectoria y es llamado parámetro de impacto. Una partícula en movimiento rectilíneo posee momento angular salvo para aquellos observadores cuyo origen de coordenadas esté sobre la recta que describe la partícula (b=0). Según el observador, la partícula puede describirse como rotando o no y para el caso analizado se puede afirmar que la partícula rota. En tanto la partícula continúe en su movimiento rectilíneo, el momento angular mantendrá su dirección y sentido. El módulo será variable o no según lo sea la velocidad de la partícula.

Si la trayectoria de la partícula no es rectilínea, la evaluación del momento angular es más complicada. De las trayectorias no rectilíneas, la circular es la más sencilla de considerar. En un movimiento circular, se pone de manifiesto de manera superlativa, lo que llamamos rotación. Supongamos que una partícula describe una circunferencia de radio R y en un cierto instante su velocidad angular es $\boldsymbol{\omega}$. En relación a un observador con origen en el centro de la circunferencia, el momento angular resulta:

$$\boldsymbol{l} = mR^2\boldsymbol{\omega}$$

es decir, directamente proporcional a la velocidad angular. El elemento de proporcionalidad ($m\,R^2$) se denomina Momento de Inercia I de la partícula relativo a un eje que pasa por el centro de la circunferencia. El momento de inercia posee información relativa al objeto que se está moviendo: cuánta masa y cuán separada del eje de rotación está.



Hagamos un paréntesis para obtener la expresión del momento angular.

A partir de la definición de momento angular se obtiene:

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\,\boldsymbol{v} = m\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = m\,\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

donde se ha usado la relación $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ entre la velocidad de la partícula y la velocidad angular.

Elijamos un sistema de coordenadas de manera que el plano de rotación sea el plano *xy* y la rotación se efectúe de manera tal que la velocidad angular tenga la misma dirección y sentido que el eje *z*. Iniciemos el estudio en el instante en que la partícula pasa por el eje *x*. En un instante posterior cualquiera, el vector posición de la partícula estará inclinado un cierto ángulo ϕ respecto al eje *x* y será $\boldsymbol{r} = R\ cos\,\phi\ \breve{\boldsymbol{i}} + R\ \mathrm{sen}\,\phi\ \breve{\boldsymbol{j}}$ y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\ \breve{\boldsymbol{k}}$ (con $\omega = \dfrac{d\phi}{dt}$). Así, el producto vectorial $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ es:

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = -R\ \omega\ \mathrm{sen}\,\phi\ \breve{\boldsymbol{i}} + R\ \omega\ cos\,\phi\ \breve{\boldsymbol{j}}$$

De esta manera, el vector que resulta del producto $\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$ tiene sólo componente *z*:

$$\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = R^2 \omega\ \breve{\boldsymbol{k}}$$

El momento angular ***l*** resulta, como se había visto $\boldsymbol{l} = mR^2 \boldsymbol{\omega}$.

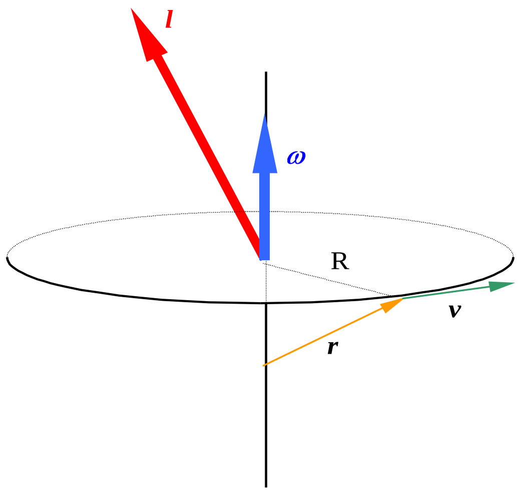
Continuemos hora con la discusión. El caso que hemos analizado (que es una situación muy particular) da lugar a que se entable una relación entre momento angular y velocidad angular a través de una cantidad numérica (positiva): el momento de inercia. Siendo así, los vectores ***l*** y $\boldsymbol{\omega}$ son, en términos domésticos, parientes directos. Claro que la información física que posee cada uno de ellos no es la misma. La velocidad angular manifiesta que hay un movimiento de rotación en torno a un eje, pero no se sabe qué se esta moviendo ni qué características tiene. El momento angular por su parte posee la misma información que la velocidad angular sumada a la del momento de inercia, es decir, informa sobre cómo rota una cierta distribución de masa en torno a un dado eje.

La relación $\boldsymbol{l} = I\boldsymbol{\omega}$ es de validez general aun en casos en que el momento angular y la velocidad angular no sean vectores paralelos. En tales casos resulta que el momento de inercia no es simplemente un número sino una entidad algo más complicada denominada tensor. Está fuera del alcance de estos apuntes llevar a ese grado la discusión del momento de inercia y realmente no se agrega contenido conceptual al significado del momento angular conocer rigurosamente la forma del momento de inercia.

Tal vez sirva de ejemplo, para tener alguna idea de la complicación a la que nos podemos enfrentar, analizar el mismo caso anterior pero cambiando el origen de coordenadas. Supongamos que estudiamos el mismo movimiento circular de una partícula pero descripto desde un sistema de coordenadas con origen sobre el eje de rotación por debajo del centro de la circunferencia. Debemos calcular nuevamente la expresión

$$\boldsymbol{l} = m\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = m\,\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

con el inconveniente que el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{r}$ no es recto.



Hagamos un nuevo paréntesis con el fin de obtener el resultado.

Para el caso en que el origen de coordenadas esté por debajo del centro de la circunferencia, el vector posición $\boldsymbol{r}$ tendrá componente en la dirección *z* de manera que:

$$\boldsymbol{r} = R\,cos\,\phi\;\breve{\boldsymbol{i}} + R\;\mathrm{sen}\phi\;\breve{\boldsymbol{j}} + r_z\;\breve{\boldsymbol{k}}$$

resultando para el producto $\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$:

$$\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = -r_z R\,\omega\;\;\cos\varphi\,\breve{\boldsymbol{i}} - r_z R\,\omega\;\;\;\mathrm{sen}\;\varphi\;\;\breve{\boldsymbol{j}} + R^2\omega\;\;\breve{\boldsymbol{k}}$$

El momento angular se obtiene multiplicando la expresión anterior por *m*. Así,

$$\boldsymbol{l} = -m\;r_z\;\;R\,\omega\,\cos\phi\,\breve{\boldsymbol{i}} - m\;r_z\;\;R\,\omega\,\mathrm{sen}\,\phi\;\breve{\boldsymbol{j}} + m\;R^2\omega\;\breve{\boldsymbol{k}}$$

Es evidente que la misma situación descripta desde dos sistemas de coordenadas diferentes manifiesta características diferentes. En el primer caso, por ejemplo, la constancia de la velocidad angular impone un momento angular constante y proporcional a la velocidad angular a través de un número (mR^2). En el segundo caso, no es así; no sólo el momento angular no es constante sino que la relación entre el momento angular y la velocidad angular no se establece a través de un número.

El momento angular de una partícula es la magnitud adecuada para poner en evidencia la componente de rotación que pueda tener un cierto movimiento. Si prestamos un poco de atención al hecho que el momento angular marca de qué manera rota una partícula o si se dirige hacia la izquierda o hacia la derecha según la dirección de observación, advertiremos que el momento angular encierra propiedades de simetría y tal vez sea el concepto de simetrías aquél al que se apunta con el momento angular. Se insiste en que depende totalmente del punto de vista (del observador) y que, por lo analizado antes, la descripción puede ser algo complicada. Sin embargo, y retomando el enfoque que hemos hecho hasta ahora, hay innumerables situaciones para las cuales, con una elección experta del sistema de coordenadas, es simple extraer información relativa al movimiento a partir del momento angular.

Tal vez, pensando un poco, el lector descubra que "el punto de vista del observador" tiene mucho que ver con las simetrías del espacio.

2.4 - Generalización de las Leyes de Newton El movimiento de un sistema de partículas

Veamos ahora (si admitimos conocer la metodología para describir el movimiento de una partícula en términos de las Leyes de Newton) cómo encaramos la descripción del movimiento de un sistema de partículas. Es decir, si por algún motivo estamos interesados en un objeto que está constituido por más de una partícula, cómo describimos su movimiento. Empecemos por partes. Analicemos qué sabemos hacer para describir el movimiento de una partícula:

- elegimos un sistema de referencia inercial, es decir, un sistema para el cual una partícula libre es observada con cantidad de movimiento constante
- admitimos que respecto a tal sistema, la cantidad de movimiento de la partícula en un instante cualquiera t, es $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$
- evaluamos la influencia del medio componiendo las fuerzas (que ejercen los objetos del medio) sobre la partícula en cuestión: $\boldsymbol{F_R} = \sum_k \boldsymbol{F_k}$. ($\boldsymbol{F_R}$ será, en general, un vector dependiente de la posición y del tiempo y, eventualmente, de la velocidad)
- planteamos la Segunda Ley de Newton:

$$\boldsymbol{F_R}(\boldsymbol{r},t)=\frac{d\boldsymbol{p}(t)}{dt}=m\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}=m\frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}$$

- planteamos, si es necesario el punto de vista del observador, el momento angular y analizamos la información que aporta y (tal vez con la ayuda de libros de matemática o por algún amigo matemático)
- resolvemos a partir de la cantidad de movimiento o del momento angular (o de ambos) las ecuaciones para obtener alguna de las funciones $\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$ o $\boldsymbol{a}(t)$ y, a través de las operaciones que las vinculan, determinamos cualquiera de las otras. No debe perderse de vista que la determinación de la posición de una partícula requiere de la especificación de dos constantes (posición y velocidad en un dado momento) y la determinación de la velocidad, de una constante (la velocidad en un cierto momento).

Discutamos un poco más el último punto. Se mencionan a la cantidad de movimiento y al momento angular como magnitudes alternativas en la caracterización del movimiento de una partícula. Tratándose ambas de magnitudes instantáneas, no permiten *per se* una predicción. Sus valores en un instante no contienen información de los valores que se tenían ni del que tendrán en instantes anteriores o posteriores al considerado. La relación que determina la forma en que dichos valores evolucionan en el tiempo es la que contribuye a la predicción. Para la cantidad de movimiento, la Segunda Ley de Newton aporta la relación, pero para el momento angular no la hemos determinado aún.

Veamos si podemos calcular los cambios en el tiempo del momento angular.

A partir de la definición $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ se puede evaluar $d\boldsymbol{l}/dt$ como:

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_R$$

donde se ha usado la propiedad que $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{p}$ son siempre paralelos y la segunda Ley de Newton para resumir $d\boldsymbol{p}/dt$ en la resultante $\boldsymbol{F_R}$ de las fuerzas que actúan sobre la partícula. Así, hemos obtenido la relación:

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_R$$

Este resultado debe discutirse en términos del concepto de momento de un vector (que ya fue introducido al analizar el momento angular). En efecto, los cambios del momento angular al transcurrir el tiempo, ocurren según el resultado de la operación $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_R$ entre la posición de una partícula y la resultante de las fuerzas sobre ella. Tal operación es absolutamente análoga a la que define el momento angular (o momento de la cantidad de movimiento) y consecuentemente encierra conceptos matemáticos equivalentes.

El resultado del producto $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ es conocido como momento de la fuerza $\boldsymbol{F}$ y habitualmente designado con la letra $\boldsymbol{\tau}$ (tau):

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

El momento de una fuerza $\boldsymbol{F}$ resulta no nulo cuando la fuerza no es paralela al vector que indica la posición del punto donde está aplicada. El vector momento de una fuerza $\boldsymbol{\tau}$ tiene dirección perpendicular al plano determinado por $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{F}$, sentido según la regla del tirabuzón y módulo:

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\boldsymbol{r}|\ |\boldsymbol{F}|\ \mathrm{sen}\,\alpha$$

siendo α el ángulo entre vectores. Agrupando $|\boldsymbol{r}|$ sen α se observa que el módulo del momento es directamente proporcional al módulo de la fuerza y a la distancia entre la dirección de la fuerza y el origen de coordenadas, distancia que se conoce como brazo de palanca de la fuerza respecto a un origen dado (el brazo de palanca es el análogo al parámetro de impacto introducido al discutir el momento angular).

Evaluar el momento de una fuerza sobre una partícula es evaluar la posibilidad que, por acción de la fuerza, cambie la dirección del vector posición de la partícula, es decir, evaluar si la fuerza puede inducir una rotación de la partícula.

Retomando la discusión relativa a los cambios del momento angular de una partícula, hemos encontrado que

$$\boldsymbol{\tau}_R = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_R = \frac{d\boldsymbol{l}}{dt}$$

o sea que el momento de la resultante de las fuerzas sobre una partícula es responsable de los cambios del momento angular de la partícula. En otras palabras, si el momento angular indica si una partícula rota o no respecto a un dado observador, el momento de la resultante de las fuerzas modifica esta situación: si no rota en un instante, lo hará en el instante siguiente o, si está rotando de una cierta manera en un instante, cambiará la manera de rotar en el instante siguiente.

Si el resumen fue bueno, tiene que haber quedado claro que independientemente del enfoque, para determinar por ejemplo la posición de un conjunto de ocho partículas, debemos plantear y resolver ocho ecuaciones y conocer diez y seis constantes y para un conjunto de un gran número de partículas la tarea se complica bastante por el número de ecuaciones a resolver y constantes a determinar.

La descripción de un conjunto cualquiera de partículas se puede hacer de una manera “compacta” si se generalizan los conceptos definidos para una partícula. Por “compacto” queremos indicar a través de un número reducido de ecuaciones –menor, en lo posible, que el número necesario para resolver el problema partícula por partícula.

Diremos para comenzar que cualquier propuesta que hagamos al generalizar magnitudes que ayuden a describir un sistema de N partículas, debe coincidir con lo determinado por las Leyes de Newton al particularizar el caso N=1. A su vez, usaremos la palabra *sistema* para referirnos al conjunto de partículas que estamos estudiando sin confundirla con la que indica al sistema de referencia (que lo llamaremos *observador*). Bien, comencemos…

Si un sistema está constituido por N partículas, cada una de masa m_i, definimos masa M del sistema a la suma de las masas de las partículas que lo componen:

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

y, recordando que la cantidad de movimiento representa la idea de que hay materia desplazándose en el espacio, definiremos a la cantidad de movimiento $\boldsymbol{P}$ del sistema a la suma de las cantidades de movimiento de cada partícula que compone el sistema. Así, si en un cierto momento t las velocidades de las partículas son los vectores $\boldsymbol{v_i}$, se tiene:

$$\boldsymbol{P} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{N} \boldsymbol{p_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v_i}$$

Por su parte, si la resultante de las fuerzas sobre cada partícula representa la influencia del medio en el cual se mueve cada partícula y determina los cambios en la cantidad de movimiento de cada partícula (perdón por la repetición de "cada partícula" pero no quisiera que se pierda la idea de que las leyes fueron enunciadas para UNA partícula), la composición de todas las resultantes sobre todas las partículas del sistema debería determinar el cambio de la cantidad de movimiento del sistema. Efectivamente,

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F_i}^{\boldsymbol{R}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\boldsymbol{p_i}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p_i} = \frac{d\boldsymbol{P}}{dt}$$

Pues bien, las generalizaciones que hemos hecho parecen intuitivas y adecuadas en tanto lo que de ellas se obtiene al considerar un sistema constituido por una sola partícula (N=1) es justamente lo que indican las Leyes de Newton. Sin embargo, tengamos un poco de cuidado. Veamos…

Es claro, para una partícula, que su velocidad puede obtenerse dividiendo su cantidad de movimiento por su masa. Pues también lo es para un sistema de partículas. Así, lo que se entiende por velocidad de un sistema $\boldsymbol{V}_{\text{Sist.}}$ es:

$$\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{Sist.}} = \frac{\boldsymbol{P}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v_i}}{M} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M}\boldsymbol{v_i}$$

Evidentemente, no es la suma de las velocidades de cada partícula que constituye el sistema. Según se puede interpretar de la expresión anterior, las partículas de un sistema contribuyen a la velocidad del conjunto de acuerdo con una cierta jerarquía. La jerarquía se establece dependiendo de cuán representativa sea la masa de la partícula en relación a la masa del conjunto, es decir, según lo indique el cociente m_i/M. El rango de valores del cociente m_i/M (para un sistema cualquiera) es:

$$0 < \frac{m_i}{M} \leq 1$$

La cota superior de 1 se alcanza para el caso particular de un sistema de una sola partícula. El cociente marca con qué peso la velocidad de una cierta partícula aporta a la velocidad del todo. Las partículas más masivas (respecto al total) son las determinantes de la velocidad del sistema.

De forma equivalente se analiza lo que se entiende por posición de un sistema de partículas. Si retomamos la definición de velocidad, se puede admitir que la velocidad de un sistema es el cambio respecto al tiempo de la "posición del sistema". Así,

$$\boldsymbol{V}_{Sist.} = \frac{d\boldsymbol{R}_{Sist}}{dt}$$

de lo cual se deduce que el punto del espacio marcado por el vector $\boldsymbol{R}_{\text{Sist.}}$ es lo que se denomina "posición del sistema" y se lo define como:

$$\boldsymbol{R}_{Sist.} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r_i}}{M} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \boldsymbol{r_i}$$

de interpretación análoga a la hecha para la velocidad del sistema.

De manera especial debemos detenernos en el análisis de la resultante de las fuerzas sobre un sistema. Efectivamente, la resultante de las fuerzas sobre un sistema es la suma de las fuerzas resultantes sobre cada partícula que lo constituye. Estas últimas resultantes manifiestan la influencia sobre cada partícula de aquéllas otras que también son parte del sistema y de las que no lo son. La fuerza que una partícula del sistema ejerce sobre otra, también del sistema, se llama fuerza interna y la ejercida por una partícula que no pertenece al sistema, se llama fuerza externa. De manera que la resultante de las fuerzas sobre un sistema resume la influencia del medio sobre el sistema y la influencia que las partículas del sistema se hacen entre sí. El Principio de Acción y Reacción permite asegurar que a la resultante de las fuerzas sobre un sistema sólo contribuirán las fuerzas externas ya que las internas se anulan de a pares en tanto son pares de vectores iguales y opuestos. De esta forma la resultante de las fuerzas sobre un sistema será:

$$\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{R}} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^{\boldsymbol{R}} = \sum_k \boldsymbol{F}_k^{Ext.}$$

siendo *k* el índice contador de fuerzas externas.

Es habitual sintetizar todas las definiciones introducidas en la descripción de un conjunto de partículas en la relación:

$$\sum_k \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{Ext.}} = \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}} = \frac{d}{dt} M\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{Sist.}}$$

Esta relación es absolutamente análoga a la que se tiene para una partícula y da lugar a interpretar un sistema de partículas como una única partícula de masa *M*, situada en el punto del espacio indicado por $\boldsymbol{R}_{\text{Sist.}}$ y con velocidad $\boldsymbol{V}_{\text{Sist.}}$, influida por el medio que la rodea. Lo que se ha llamado posición del sistema $\boldsymbol{R}_{\text{Sist}}$ se denomina de manera más adecuada centro de masa del sistema y la velocidad del sistema, velocidad del centro de masa.

Pues bien, según parece hasta ahora, la descripción de un sistema no es buena en tanto es idéntica a la de una partícula. No está claro en las generalizaciones que hemos hecho y que parecen muy intuitivas, cómo se distribuyen las partículas que constituyen el sistema y de qué manera se transporta la materia que ellas representan. Mejoremos un poco la descripción introduciendo el momento angular del sistema y repasando un poco las ideas que encierra. Recordemos que el momento angular es una magnitud que relaciona ambas informaciones: posición y cantidad de movimiento. Se definió momento angular ***l*** de una partícula en el instante *t*, como:

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

siendo $\boldsymbol{r}$ la posición de la partícula en ese mismo instante y $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ su cantidad de movimiento. Así, para un sistema de partículas, llamaremos $\boldsymbol{L}$ al momento angular que resulta de sumar todos los momentos angulares de las partículas que componen el sistema:

$$\boldsymbol{L} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{N} \boldsymbol{l_i} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{p_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{v_i}$$

El momento angular de una partícula manifiesta por definición la eventualidad de que la posición y la cantidad de movimiento sean o no colineales. Si en un instante resultaran colineales ($\boldsymbol{l}=\boldsymbol{0}$), en el instante siguiente la partícula se habrá acercado (o alejado) sin cambiar su dirección (relativa al origen del observador). Por el contrario, si en un dado momento la dirección de $\boldsymbol{r}$ no es paralela a la dirección de $\boldsymbol{p}$ ($\boldsymbol{l}\neq\boldsymbol{0}$), un instante después la posición de la partícula tendrá necesariamente una dirección diferente de la que tenía. Cuando el seguimiento de una partícula, por un dado observador, requiere del cambio de dirección del vector posición de la partícula, se dice que la partícula está rotando relativa al tal observador. El fenómeno depende explícitamente del observador (analice la definición) y debe entenderse al momento angular como un pariente directo de una rotación. Poseer momento angular es asegurar que el vector posición está cambiando su dirección. Claro ¿el vector posición de qué? Para el caso de una partícula, es evidente; pero… ¿para una sistema de partículas?

Analicemos el momento angular de un sistema de partículas. Por definición es:

$$\boldsymbol{L} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{N} \boldsymbol{l_i} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{p_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{v_i}$$

Ahora bien, si en lugar de considerar de manera directa la posición de cada partícula relativa al observador, la reemplazamos por la posición relativa al centro de masa más la posición del centro de masa,

$$\boldsymbol{r_i} = \boldsymbol{R_{CM}} + \boldsymbol{r_i^{CM}}$$

es posible acomodar la expresión del momento angular como:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R_{CM}} \times \boldsymbol{P} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r_i^{CM}} \times m_i \boldsymbol{v_i^{CM}}$$

Note el lector que se ha usado una propiedad característica de las posiciones y velocidades relativas al centro de masa:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r_i^{CM}} = \boldsymbol{0}$$

y

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v_i^{CM}} = \boldsymbol{0}$$

(el lector advertirá que si se dividen las sumas por la masa del sistema, las mismas representan la posición y la velocidad del centro de masa respecto al centro de masa; ambos nulos).

El momento angular de un sistema de partículas expresado en términos relativos al centro de masa nos permite modelar el movimiento del sistema como si se efectuaran dos tipos de movimientos simultáneamente. Uno de ellos corresponde al momento angular del sistema como un todo con cantidad de movimiento ***P*,** cuya forma es idéntica a la del momento angular de una partícula, conocido con el nombre de momento angular orbital. El otro es el asociado al momento angular de las partículas relativo al centro de masa y es denominado momento angular intrínseco o momento angular de *spin* (palabra inglesa usada para *giro*). Es común hablar de translación de un sistema cuando su momento angular intrínseco es nulo o despreciable frente al momento angular orbital y por otra parte, cuando el momento angular orbital es nulo o despreciable frente al momento angular intrínseco, se habla de rotación del sistema. A su vez, la comparación entre el momento angular de spin y el orbital es lo que permite encuadrar el estudio de un sistema dentro del modelo de partícula: una partícula sólo posee momento angular orbital y por ende, un sistema con momento angular intrínseco nulo se comporta como una partícula.

La magnitud cuyo efecto es modificar en el tiempo al momento angular puede ser encontrada por simple derivación. En efecto, a partir de la definición de $\boldsymbol{L}$ tenemos:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{l}_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{d\boldsymbol{l}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\times\boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{r}_i\times\frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{\tau}^R$$

donde se ha considerado la Segunda Ley de Newton y que la velocidad $\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}$ es paralela a la cantidad de movimiento $\boldsymbol{p}_i$. La magnitud $\boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{R}}$ es la resultante de los momentos de las fuerzas. De manera que el comportamiento temporal del momento angular de un sistema está determinado por la resultante de los momentos de las fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema.

Si un sistema de partículas posee, en un instante cualquiera t, una cantidad de movimiento $\boldsymbol{P}$ y un momento angular $\boldsymbol{L}$, en un instante posterior $t+dt$, dichas magnitudes se habrán modificado en las cantidades $d\boldsymbol{P}$ y d$\boldsymbol{L}$ como consecuencia de la acción de la resultante de las fuerza y la resultante de los momentos de las fuerzas de acuerdo con las relaciones:

$$d\boldsymbol{P} = \left(\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{N} \boldsymbol{F_i} \right) dt$$

$$d\boldsymbol{L} = \left(\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{N} \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{F_i} \right) dt$$

Resumiendo, si se conocen $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{L}$ de un sistema en un instante dado, la resultante de las fuerzas y la de los momentos de las fuerzas permiten conocer la evolución de dichas magnitudes y en consecuencia la del sistema. Las relaciones que establecen la evolución son conocidas con el nombre de *ecuaciones de movimiento* del sistema y su forma más ortodoxa es:

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{N} \boldsymbol{F_i} \qquad \text{y} \qquad \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{N} \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{F_i}$$

La validez del Principio de Acción y Reacción simplifica las relaciones pues permite demostrar que tanto la resultante de las fuerzas sobre un sistema como la resultante de los momentos de dichas fuerzas están determinadas exclusivamente por las fuerzas que el medio ejerce sobre el sistema (las fuerzas que las partículas del sistema se ejercen entre ellas se anulan de a pares de la misma manera que los momentos de las mismas). Veamos qué ocurre con los momentos de las fuerzas.

Analicemos el resultado de un par de fuerzas internas en relación al momento que producen. Supongamos que de un sistema de partículas seleccionamos la partícula *i* y la partícula *j*. Admitamos también que sobre la partícula *i* actúa, entre otras, una fuerza $\boldsymbol{F_{ij}}$ producida por la partícula *j*. Entonces, por el Principio de Acción y Reacción, sobre la partícula *j*, actuará una fuerza $\boldsymbol{F_{ji}}$ producida por la partícula *i*, de igual magnitud, sentido contrario (ambas fuerzas en la dirección de la recta que une las partículas - tenga esto muy presente). Se trata, por definición, de un par de fuerzas internas. Si la partícula *i* está ubicada en la posición $\boldsymbol{r}_i$, el momento de la fuerza $\boldsymbol{F_{ij}}$ será:

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} = \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{F_{ij}}$$

Análogamente, para la partícula *j*, el momento de la fuerza $\boldsymbol{F_{ji}}$ será:

$$\boldsymbol{\tau}_{ji} = \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F_{ji}}$$

de manera que la suma de ambos momentos es:

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} + \boldsymbol{\tau}_{ji} = \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{F_{ij}} + \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{ji}$$

Teniendo en cuenta la relación entre las fuerzas $\boldsymbol{F_{ij}} = -\boldsymbol{F_{ji}}$ la última relación se puede reescribir como:

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} + \boldsymbol{\tau}_{ji} = (\boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F_{ij}}$$

dando como resultado el vector nulo en virtud del paralelismo entre $(\boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{r}_j)$ y $\boldsymbol{F_{ij}}$.

Como la resultante de los momentos de las fuerzas internas es una suma sobre todos los pares de fuerzas $\boldsymbol{F_{ij}}$ existentes, tal suma es siempre nula.

En virtud de las ecuaciones de movimiento podemos afirmar que ninguna acción interna puede cambiar el movimiento de un sistema. Un conductor de automóvil no consigue nada tirando del volante ni nos podemos elevar tirándonos de la cabellera; las fuerzas son efectivamente ejercidas (el volante se puede marcar o torcer y el cuero cabelludo duele) pero únicamente un mecanismo que induzca la aplicación de una fuerza ejercida por el sistema sobre el medio externo producirá la debida reacción que, desde afuera, altere el movimiento del sistema (frenos o paracaídas de cola o flexión de las piernas haciendo fuerza contra el piso o guinche).

Las ecuaciones que representan a la cantidad de movimiento y el momento angular de un sistema de partículas no presentan diferencias funcionales significativas en relación a las de una partícula, salvo en la expresión del momento angular, que en el caso de un sistema tiene término intrínseco.

Las ecuaciones de movimiento de un sistema de N partículas que hemos encontrado permiten determinar la evolución de la cantidad de movimiento del sistema y de su momento angular. Ambas magnitudes son vectores que caracterizan el sistema de manera aditiva (por suma de las magnitudes correspondientes) y en el resultado no se obtienen detalles del movimiento de los constituyentes del sistema. En pocas palabras, la descripción es global. Para algunos casos particulares de sistemas cuyos constituyentes están obligados a mantener alguna relación específica, la descripción puede ser más detallada. La existencia de relaciones entre las partículas que forman un sistema agrega ecuaciones que permiten completar la información que se obtiene con las ecuaciones de movimiento. Toda ecuación adicional (a las de movimiento) se denomina ecuación de vínculo y contribuye a profundizar la descripción. Veamos... los denominados sistemas rígidos o cuerpos rígidos o sólidos perfectos son conjuntos de partículas cuyas distancias relativas son constantes. Tal constancia suministra una gran cantidad de relaciones que involucran a todas las partículas de manera que, conociendo el movimiento de una de ellas, se puede inferir el movimiento de cualquier otra. El hecho de que una partícula arrastre a otra mediante una cuerda inextensible establece una relación (la constancia de la distancia entre partículas) que permite asegurar que, en todo instante, los valores de las velocidades de las partículas son iguales. Si se advierte que una partícula rota alrededor de un eje, todas las demás efectuarán la misma rotación (salvo las que están eventualmente sobre el eje, claro). Las ecuaciones de vínculo deben establecerse para cada caso en particular y siempre representan relaciones entre los constituyentes de un sistema.

Intentaremos en lo que sigue discutir algunas consecuencias de las ecuaciones de movimiento. Probablemente repetiremos algunos conceptos. No está mal ya que la idea es que se comprendan. Las magnitudes ya definidas requieren de algún tipo de encuadre según la temática en que se las va a usar y tal encuadre es una especie de reiteración de la idea. Con seguridad, al presentar algunos ejemplos, el lector notará que siempre se describe lo que le pasa a un cubo, esfera o cilindro y en consecuencia muchos lectores creen que la Física es eso que estudia cuerpos y cosas que no se ven, ni de casualidad, en la vida cotidiana. Pues lamento desilusionar a esos lectores. En primer lugar el movimiento de un cuerpo real cualquiera (aún de formas sencillas) es sumamente complicado de simbolizar y por otra parte, la simbolización de cuerpos mediante objetos simples (los tales cubos, esferas o cilindros) es muy pero muy útil para destacar los fenómenos fundamentales (y no los accesorios que no hacen a la esencia). También es claro que a veces lo accesorio es lo que interesa, pero sólo podrá entrar en detalles aquél que conozca perfectamente el significado de las Leyes y sus consecuencias.

2.5 - Cuerpos rígidos

El sistema mecánico más sencillo de estudiar es denominado cuerpo rígido. Un sistema de partículas es un cuerpo rígido si las distancias entre partículas es constante bajo cualquier circunstancia. Si bien los objetos sólidos no son realmente cuerpos rígidos, en la mayoría de los estudios se los puede suponer como tales. Analizaremos en lo que sigue la descripción mecánica de un cuerpo rígido.

Las ecuaciones que describen el movimiento de un sistema cualquiera de partículas son:

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j^{Ext.} \qquad \text{y} \qquad \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_j^{Ext.}$$

donde $\boldsymbol{F}_j^{Ext.}$ es una de la n fuerzas externas aplicadas sobre el sistema en el punto indicado por $\boldsymbol{r}_j$,

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i = M\boldsymbol{V}_{CM}$$

es la cantidad de movimiento del sistema y

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R}_{CM} \times \boldsymbol{P} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i^{CM} \times m_i \boldsymbol{v}_i^{CM} = \boldsymbol{L}_{Orbital} + \boldsymbol{L}_{Interínseca}$$

es el momento angular del sistema.

Tratándose de un cuerpo rígido (recordar que las partículas mantienen distancias constantes entre ellas) la masa del cuerpo es constante y la única posibilidad de movimiento de las partículas respecto al centro de masa es la de rotar (no es posible alejarse o acercarse al centro de masa). Más todavía, si una de las partículas rota respecto a un eje que pasa por el centro de masa, con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, todas las demás también lo hacen con la misma velocidad angular. Cada partícula que constituye el cuerpo describe un circunferencia alrededor del eje de rotación. Así,

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{CM}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{CM}}$$

Entonces, la ecuación correspondiente a la cantidad de movimiento se puede llevar a la forma:

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{j}^{Ext.} = \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = M\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{CM}}$$

y en el momento angular del sistema, la parte intrínseca (o de spin) tiene un elemento común a todas las partículas: la velocidad angular.

$$\boldsymbol{L}_{\text{Interínseco}} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{CM}} \times m_i \; (\omega \times \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{CM}})$$

Evaluar esta última expresión es un poco laborioso. Las etapas a seguir son: elegir un sistema de coordenadas de manera que el eje z, por ejemplo, tenga la dirección de la velocidad angular ($\boldsymbol{\omega} = \omega\, \breve{\boldsymbol{k}}$), admitir que el vector $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{CM}}$ tiene componentes $x_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{CM}}$, $y_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{CM}}$, $z_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{CM}}$ y hacer las operaciones. El resultado es

$$\boldsymbol{L}_{Int.} = \left(-\sum_{i=1}^{N} m_i x_i^{CM} z_i^{CM} \right) \omega\, \breve{\boldsymbol{i}} + \left(-\sum_{i=1}^{N} m_i y_i^{CM} z_i^{CM} \right) \omega\, \breve{\boldsymbol{j}} +$$
$$+ \left(\sum_{i=1}^{N} m_i [x_i^{2^{CM}} + y_i^{2^{CM}}] \right) \omega\, \breve{\boldsymbol{k}}$$

La forma del momento angular intrínseco es aún algo complicada pero con nuevas consideraciones sobre el cuerpo que se estudia se puede simplificar un poco más.

Si la forma del objeto estudiado presenta ciertas simetrías respecto al eje de rotación, algunas sumas de la última expresión se pueden anular. Veamos, presentar simetrías quiere decir cumplir con algunas condiciones geométricas. Estudiaremos cuerpos en los cuales para toda masa m_i en las coordenadas $x_i^{CM}, y_i^{CM}, z_i^{CM}$ existe siempre otra masa igual en las coordenadas $-x_i^{CM}, -y_i^{CM}, z_i^{CM}$. De tales cuerpos se dice que poseen simetría cilíndrica y son anillos, cilindros huecos o macizos, discos, etc. Cuerpos como esferas o cubos (huecos o macizos) satisfacen la condición más amplia que para toda masa m_i en las coordenadas x_i^{CM}, y_i^{CM}, z_i^{CM} existe siempre otra masa igual en las coordenadas $-x_i^{CM}$, $-y_i^{CM}$, $-z_i^{CM}$.

Así, el momento angular intrínseco de cuerpos simétricos que rotan alrededor de un eje cuya dirección no cambia en el espacio (y que fue elegida como el eje z) se puede reducir a la forma

$$\boldsymbol{L}_{\text{Interínseco}} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i [x_i^{2^{CM}} + y_i^{2^{CM}}] \right) \omega \, \breve{\boldsymbol{k}}$$

siendo $x_i^{2^{CM}} + y_i^{2^{CM}}$ el cuadrado de la distancia de cada masa m_i al eje de rotación.

El contenido del paréntesis de la última expresión se conoce como momento de inercia I_{CM} del cuerpo, respecto a un eje de simetría que pasa por el centro de masa del sistema. Y entonces se obtiene

$$\boldsymbol{L}_{Interínseco} = I_{CM} \; \omega \, \breve{\boldsymbol{k}} = I_{CM} \; \boldsymbol{\omega}$$

Al cabo de todas estas consideraciones para el momento angular, las ecuaciones que describen el movimiento de un cuerpo rígido simétrico que rota alrededor de un eje cuya dirección se mantiene en el espacio son

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_j^{Ext.} = \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \frac{d(M\boldsymbol{V}_{CM})}{dt} = M\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{CM}}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_j^{Ext.} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{R}_{CM} \times \boldsymbol{P} + I_{CM}\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{R}_{CM} \times M\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{CM}} + I_{CM}\boldsymbol{\alpha}$$

siendo $\boldsymbol{\alpha}$ la aceleración angular del cuerpo.

La forma más simple de las ecuaciones se obtiene para cuerpos con simetría cilíndrica o esférica que se desplazan en línea recta. En estas circunstancias se puede elegir el origen de coordenadas tal que el vector posición del centro de masa sea paralelo a la aceleración del centro de masa. El origen debe ser un punto cualquiera sobre la trayectoria descripta por el centro de masa (una recta). En ese caso las ecuaciones son

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_j^{Ext.} = M\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{CM}}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_j^{Ext.} = I_{CM}\boldsymbol{\alpha}$$

El uso de estas ecuaciones, junto con algunas otras que representen circunstancias particulares (ecuaciones de vínculo) en las que ocurre el movimiento del cuerpo estudiado, permite proponer buenos modelos para un gran número de situaciones en las que hace falta describir y predecir eventos en base al movimiento de los cuerpos.

Una conclusión importante en lo desarrollado hasta ahora es que resulta trascendental establecer, al momento de encarar algún estudio relacionado con el movimiento de un cuerpo, las fuerzas y sus puntos de aplicación para poder explicitar las ecuaciones.

Cómo representar las fuerzas y dónde están aplicadas, de eso trata los que sigue. El enfoque se hace a través de algunos ejemplos.

2.6 - La especificación de fuerzas.

Es claro, al menos eso me parece a esta altura de la lectura, que la problemática de la mecánica pasa, por un lado, por la adecuada especificación de fuerzas y los lugares donde están aplicadas en un cierto instante y, por el otro, por la evaluación de lo que está ocurriendo con la cantidad de movimiento y el momento angular del sistema bajo estudio en el mismo momento. También es claro que la declaración anterior no es más que la lectura de las ecuaciones que se obtienen para la descripción de un sistema de partículas a partir de los postulados fundamentales (Las Leyes de Newton). También en importante la evaluación del trabajo de las fuerzas, que nos llevará al concepto de energía. Pero lo primero es lo primero, así que tratemos de generar un método que nos ayude a evaluar qué fuerzas hay (y dónde están aplicadas) para un conjunto de casos frecuentes en el planteo de problemas mecánicos.

El método estará basado en unas pocas preguntas cuyas respuestas nos permitan establecer las condiciones en las que analizaremos un problema.

Primera pregunta: ¿qué fuerzas a distancia influyen en el cuerpo que estoy estudiando?

La respuesta es, en la mayoría de los casos, UNA SOLA: LA ATRACCION GRAVITATORIA DE LA TIERRA o **EL PESO** del cuerpo considerado.

La fuerza de atracción gravitatoria fue propuesta por Newton para explicar las características del movimiento de los cuerpos en caída (inclusive la Luna, que cae interminablemente sobre la Tierra). Los hechos experimentales muestran que entre dos partículas cualesquiera de masas *M* y *m* se establece una interacción atractiva (siempre) que es proporcional al producto de las masas de las partículas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. La dirección de las fuerzas en esta interacción se ajusta al Principio de Acción y Reacción. Así, el módulo de la fuerza de atracción gravitatoria entre las partículas es:

$$F_g = \gamma \frac{M m}{r^2}$$

siendo *r* la distancia entre partículas y γ una constante, denominada constante de gravitación universal, que se puede determinar experimentalmente midiendo la fuerza que ejerce un objeto de masa M sobre otro de masa m, ambos separados por una distancia conocida. El valor de la constante de gravitación universal:

$$\gamma = 6{,}672 \times 10^{-11}\ (\mathrm{N\ m^2 / kg^2})$$

es suficientemente pequeño como para que los objetos de la vida diaria (incluyendo las personas) que tienen masas que van de algunos kilos hasta las toneladas (como una locomotora) no se anden pegoteando entre ellos.

Si usamos esta ideas para analizar cómo influye la Tierra sobre un cuerpo de masa *m* localizado cerca de su superficie (a unos 6.370 km del centro del planeta), advertimos que el valor de la fuerza gravitatoria que el planeta aplica sobre tal cuerpo es:

$$F_g = \gamma \frac{M_T\ m}{(R_T + h)^2}$$

donde hemos llamado M_T a la masa de la Tierra, R_T al radio de la Tierra y *h* al apartamiento del cuerpo de la superficie de la Tierra. Así, para cuerpos que están cerca de la superficie (apoyados o no sobre ella) de manera que *h* no modifique significativamente el resultado de R_T+h, el peso está bien aproximado por:

$$F_g = m\gamma \frac{M_T}{{R_T}^2} = m\ g$$

El número *g* contiene a la constante de gravitación universal, a la masa de la Tierra y al cuadrado del radio medio de la Tierra. Su valor es 9,80 en unidades de m/s^2 y conocido con el nombre de aceleración de la gravedad. Ahora retomemos la discusión sobre las fuerzas a distancia. En virtud del valor de la constante de gravitación universal, sólo cuerpos muy masivos producen fuerzas apreciables sobre algún otro que pretendemos estudiar, así que la única fuerza a distancia que vamos a considerar relevante al estudiar el movimiento de objetos tales como aviones, satélites, barcos, heladeras, automóviles, personas, ruedas, etc., etc., será la que produce nuestro planeta. El punto de aplicación del peso se denomina centro de gravedad y si el cuerpo ocupa una región no muy extendida y próxima a la superficie de la tierra, tal punto coincide con el centro de masa del cuerpo. Sólo al estudiar cuerpos de masa despreciable (sogas, poleas, resortes, etc.) esta fuerza no será considerada relevante frente a otras. Si nos alejamos de la superficie terrestre distancias no despreciables frente al radio de la tierra, la atracción gravitatoria deberá ser analizada de manera particular. La característica fundamental, la que no podemos perder de vista de manera ninguna, según el contexto que hemos especificado para esta fuerza a distancia (el peso), es que es **siempre la misma** para un dado cuerpo **y está aplicada en el mismo punto del cuerpo**: módulo *mg* (*m* es la masa del cuerpo), dirección vertical y sentido hacia el centro de la tierra, punto de aplicación, el centro de gravedad (coincidente con el centro de masa si movimiento se desarrolla en las proximidades de la superficie de la tierra).

Para conocer la posición del centro de masa hay ecuaciones disponibles. También se pueden plantear las correspondientes del centro de gravedad pero son tan parecidas y su planteo es tan similar a lo que se hace para las del centro de masa que siempre tuve la idea de que el lector termina confundiendo uno con el otro. El planteo pasa por admitir que la tierra atrae a cada partícula que compone un cuerpo (la masa de cada partícula debe ser considerada como un elemento de masa diferencial con relación a la masa del cuerpo) y buscar la resultante de las fuerzas y su punto de aplicación. ¿El lector se anima?

Segunda pregunta: ¿cuántas superficies en contacto con otro u otros cuerpos comparte el que estamos estudiando? La respuesta no es única sino que depende de cada caso en particular. Lo que es seguro es que habrá tantas fuerzas aplicadas sobre el cuerpo estudiado como superficies de contacto comparta con otros y el punto de aplicación de cada una será alguno de la superficie de contacto correspondiente. Denominaremos a estas fuerzas: fuerzas de contacto (en contraposición a las fuerzas a distancia). Lo que llamamos fuerza de contacto no es más que el modelo que nos ayuda a representar un resultado experimental cotidiano y frecuente: se trata del hecho de que dos cuerpos no pueden ocupar el mismo volumen en el mismo momento. La superficie de un cuerpo es aquélla que marca la región donde comienza a haber o deja de haber material que constituye el cuerpo. En general son formas difíciles o imposibles de expresar matemáticamente así que nos limitaremos (y mucho) a tratar casos muy sencillos e idealizados para analizar lo que pasa con las fuerzas de contacto. Sin embargo, debe destacarse que las ideas no se modificarán al considerar casos complicados.

Lo primero que tenemos que tener claro es que lo que llamamos fuerza de contacto es el resultado de una enorme cantidad de fuerzas a distancia. El lector no puede ignorar el modelo molecular de la materia ni las características de los modelos atómicos sencillos y por lo tanto no imaginará que los átomos de la superficie de un cuerpo estarán en *contacto* con los átomos de la superficie del otro cuerpo. Tal cosa no ocurre en términos de los modelos atómicos. Pero si nos conformamos con observar los hechos de manera global sin desmenuzar lo que ocurre a pequeñísima distancia (comparada con las dimensiones de los objetos) podemos usar la palabra contacto. La propuesta de describir de manera global hechos que se suponen son una consecuencia de hechos a escalas pequeñas se denomina descripción macroscópica. Resumiendo, en el contexto de una descripción macroscópica, es adecuado y práctico describir procesos mecánicos en términos de fuerzas de contacto (además de las fuerzas a distancia).

Si el lector revisa las suposiciones que hemos hecho en relación a las fuerzas a distancia y recuerda que las leyes de la mecánica vinculan las diferentes variantes de los movimientos con las fuerzas y/o momentos de fuerzas, se dará cuenta inmediatamente que, siendo el peso de un cuerpo una “fuerza constante” (relea si le hace falta porque realmente no es así) las “diferentes variantes de los movimientos” serán consecuencia de la variedad de comportamiento en las fuerzas de contacto. De manera tal que las fuerzas de contacto se comportan de forma algo más complicada que el peso de un cuerpo y habrá que hacer experimentos que pongan de manifiesto las características de las distintas fuerzas de contacto que propongamos en estudios mecánicos. Lo primero que se advierte es que las fuerzas de contacto no tiene una dirección típica como el peso. En general se trata de fuerzas variables según el comportamiento de las superficies en contacto. Veamos entonces qué comportamiento puede advertirse (con alguna generalidad) entre dos pequeñas superficies paralelas (de dos cuerpos) que entablan contacto. Analizaremos lo que eventualmente ocurre con las fuerzas en una cualquiera de las superficies ya que el principio de acción y reacción nos indica qué ocurre en la otra.

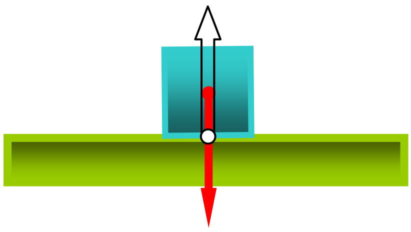
La descripción la haremos en términos un poco domésticos y tratando de representar los que muchos experimentos sugieren: la fuerza de contacto que una superficie aplica sobre la otra debe ser tal que se cumplan dos objetivos. Uno es que un cuerpo no penetre en el otro y para satisfacer ese objetivo admitimos que la fuerza de contacto tiene una componente perpendicular a la superficie. El otro objetivo es que una superficie no se mueva respecto de la otra (debido al enganche entre imperfecciones de las superficies o, si son perfectas, al enlace atómico entre los componentes de ambas superficies). Para este otro objetivo admitimos como parte de la fuerza de contacto una componente paralela o contenida en la superficie que evita el movimiento relativo de ambas superficies. La primera componente que hemos propuesto se denomina componente normal de la fuerza de contacto y la segunda es conocida como componente de roce. La componente normal tiene una dirección y sentido bien establecido. Por otro lado la dirección y sentido de la componente de roce depende del eventual movimiento de una superficie respecto de la otra. Según el material y el tipo de superficie (en el sentido de rugosa o pulida o muy pulida o…) y también dependiendo de otras fuerzas aplicadas al cuerpo estudiado, la fuerza de contacto puede o no poseer componente de roce, es decir, puede ser o no inclinada respecto a la perpendicular a la superficie.

El lector ya se perdió en estas explicaciones cualitativas? Veamos algunos ejemplos para concretar lo discutido.

Regla general para las situaciones más frecuentes: sobre un cuerpo actúan tantas fuerzas como superficies en contacto tenga el cuerpo con otro u otros cuerpos (y además si el cuerpo no tiene masa despreciable hay que considerar la fuerza peso).

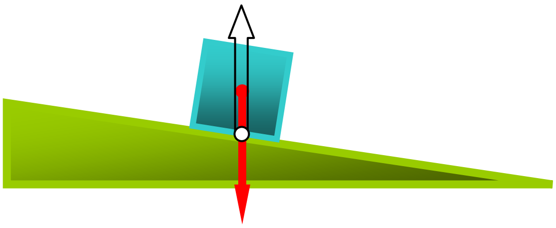
Es práctico representar a las fuerzas de contacto por sus componentes relativas a la dirección perpendicular a la superficie de contacto y una dirección contenida en la superficie de contacto pero en los siguientes ejemplos pondremos exclusivamente a las fuerzas y no a sus componentes. Veamos…

Ejemplo 1: Cuerpo en reposo sobre una mesa horizontal. Sobre este cuerpo actúan dos fuerzas: la fuerza de contacto con la mesa y el peso. El peso en

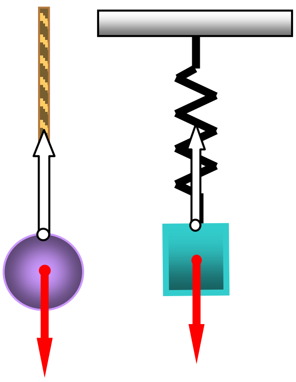


dirección vertical, sentido hacia abajo y aplicado en el centro de gravedad del cuerpo. La fuerza de contacto con la mesa es una fuerza en todos los puntos de contacto de la superficie y se la sintetiza mediante una única fuerza aplicada en algún punto de la superficie. El punto de aplicación de una fuerza de contacto no es fijo sino que depende de las circunstancias. Las fuerzas de contacto se acomodan según dónde estén aplicadas otras fuerzas sobre el cuerpo y el estado de movimiento del mismo. Hemos dicho que el cuerpo está en reposo así que la fuerza de contacto se acomoda de manera de anular el peso y el momento que el peso produce. La fuerza de contacto no tiene componente de roce.

Ejemplo 2: El mismo cuerpo pero en reposo sobre una mesa no horizontal (plano inclinado). Sobre este cuerpo actúan dos fuerzas: la fuerza de contacto con la mesa y el peso. Note el lector que el peso se mantiene aplicado en el centro del cuerpo y el punto de aplicación de la fuerza de contacto no está en la mitad de la superficie de contacto con la mesa. La fuerza de contacto tiene componente de roce.

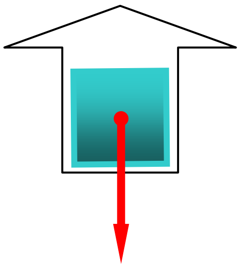


Ejemplo 3: Cuerpo en reposo colgado de una soga (o de un resorte). Sobre este cuerpo actúan dos fuerzas: la fuerza de contacto con la soga (la fuerza de contacto con el resorte) y el peso. Aquí se debe aclarar que se trata de un cuerpo en reposo, particularmente en el caso del resorte. En este caso el cuerpo ocupa una posición especial que se llama posición de equilibrio. Al apartar el cuerpo de la posición de equilibrio el peso no se altera en absoluto pero la fuerza que aplica el resorte sí. Llevando el cuerpo un poco por debajo de la posición de equilibrio la fuerza aplicada por el resorte aumenta y surge una resultante vertical hacia arriba. Por el contrario si se sube un poco el cuerpo



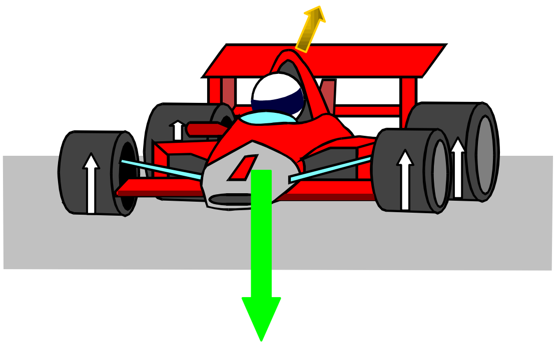
hacia arriba de la posición de equilibrio la fuerza que aplica el resorte disminuye y aparece una resultante vertical hacia abajo. Es más, la resultante (en ambos casos) es diferente para las diferentes posiciones del cuerpo fuera de la posición de equilibrio.

Ejemplo 4: Cuerpo cayendo en el aire. Sobre este cuerpo actúan dos fuerzas: la fuerza de contacto con el aire que se ha representado en el esquema como algo que afecta a toda la superficie del cuerpo y el peso. A la fuerza de contacto con el aire se la resume en una única fuerza de manera que (si el cuerpo no rota) debe estar aplicada en la misma línea de acción que el peso.

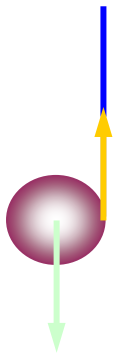


Ejemplo 6: Cuerpo cayendo en el vacío (caída libre). Sobre este cuerpo actúa una sola fuerza: el peso. ¿Cuál será la aceleración que adquiere el cuerpo es este caso particular?

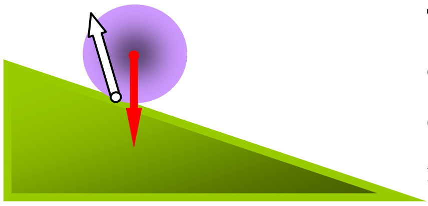
Ejemplo 7: Auto moviéndose en una carretera horizontal. Sobre el auto actúan seis fuerzas: el peso, una fuerza sobre cada rueda (4 si el auto es común y corriente) y la de contacto con el aire que está representada sobre el alerón. ¿Se podrá despreciar la fuerza que aplica el aire sobre al auto a altas velocidades? Por otra parte, es un tratamiento esquemático ¿será posible resumir las fuerzas sobre las ruedas en una sola fuerza?



Ejemplo 8: Yo-yo: Sobre la rueda del yo-yo actúan dos fuerzas: el peso y una de contacto. El peso, como siempre, está aplicado en el centro de gravedad. La fuerza de contacto con el piolín está aplicada en un extremo del yo-yo. La intensidad de esta última depende de para dónde está acelerando el yo-yo: si cae, el peso es más intenso que la fuerza de contacto y si sube, también. En ambos casos, el yo-yo rota de diferentes maneras con diferentes comportamientos como consecuencia del momento de fuerzas resultante.

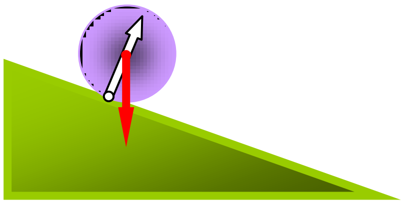


Ejemplo 9: Un cilindro apoyado sobre un plano inclinado. En este caso debemos notar que la "superficie" de apoyo es una generatriz del cilindro.



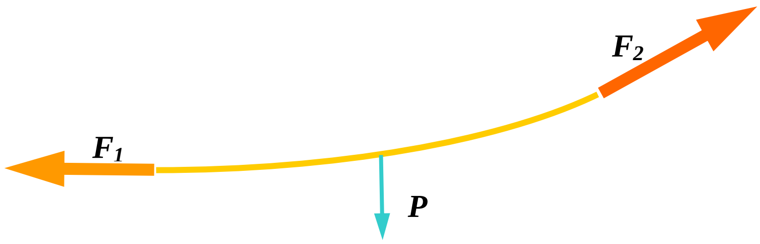
Tratándose de una sola superficie de contacto, está claro (a esta altura de los ejemplos) que sobre el cilindro hay dos fuerzas aplicadas: una fuerza de contacto y el invariable peso. El lector debe notar que el punto de aplicación de la fuerza de contacto no está incluido en la dirección del peso. Además, la inclinación de la fuerza de contacto respecto de la perpendicular al plano inclinado depende de las superficies de contacto: si entre las superficies de contacto no hay fricción o roce, la fuerza de contacto debe ser perpendicular al plano inclinado y en ese caso, su dirección pasa por el centro del cilindro; si entre las superficies hay roce, la fuerza de contacto está inclinada respecto de la normal al plano. En el esquema que se muestra se ha supuesto que hay roce entre las superficies.

Ejemplo 10 (y último): Esfera sobre un plano inclinado. Como en el ejemplo 9, la superficie de contacto es muy particular: ahora se trata de un único punto. Las fuerzas aplicadas sobre la esfera son dos: la de contacto (en el punto de contacto) y el peso. En el esquema se supone que no hay roce entre las superficies. Note el lector que la esfera desliza sin rotar!! (recuerde que no hay fricción ninguna entre las superficies).



Un caso particular es el de los cuerpos flexibles como las cuerdas o sogas o piolines. Por contacto, este tipo de cuerpos sólo pueden tirar. Nadie empuja al perro con la correa!, dijo una vez un colega mío. La intensidad de la fuerza de contacto depende de la fuerza que se ejerce en el otro extremo de la correa y la dirección es la dirección de la correa tensa.

Supongamos un objeto delgado y flexible tipo soga que en un extremo está atado a algún cuerpo y del otro está sostenido por la mano de alguien.



Si usamos la Segunda Ley de Newton para este cuerpo (como para cualquiera que tenga masa) obtenemos:

$$\boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{P} = m\,\boldsymbol{a}$$

donde $\boldsymbol{P}$ es el peso de la soga y $\boldsymbol{a}$ su eventual aceleración. Ahora bien, si imaginamos que la soga tiene una masa casi nula (que es lo que la mayoría de los libros indica con eso de “cuerda liviana” o “de masa despreciable”), el vector ***P*** resulta prácticamente inexistente y el producto *m**a*** es prácticamente nulo. Así, la soga pierde la forma curvada que le proporcionaba el peso y las fuerzas $\boldsymbol{F_1}$ y $\boldsymbol{F_2}$ se aproximan muy bien por vectores iguales y opuestos. De ahí, que la fuerza que aplicará la soga sobre el cuerpo a la que está atada (contrapartida de acción y reacción de $\boldsymbol{F_1}$) depende de la fuerza que está haciendo la mano ($\boldsymbol{F_2}$).

Por otra parte, el caso de objetos delgados y no flexibles como punteros, tizas, varillas, etc., es diferente: pueden ejercer fuerzas de contacto de cualquier intensidad (siempre que no se rompan) y en cualquier dirección.

Las fuerzas de contacto siempre se pueden representar en términos de una componente perpendicular a la superficie de contacto y otra con dirección contenida en la superficie de contacto. La primera, como se vio antes, se denomina componente normal (perpendicular) y la segunda, componente de roce. ¿Para dónde apunta la componente de roce de una fuerza de contacto? Repetimos: la componente de roce se propone para entender el movimiento relativo de una superficie respecto de la otra. El problema consiste en determinar el tal movimiento relativo de las superficies y una manera de averiguarlo es imaginar que no hay fricción entre las superficies para ponerlo en evidencia. Al eliminar la fricción, se advierte el movimiento relativo y así, se puede proponer el sentido de la componente de roce que hace falta para impedirlo. En cuanto a la magnitud, los experimentos indican que entre superficies que no se mueven una respecto a la otra (ver los ejemplos 1 y 2) la magnitud de la componente de roce puede variar entre 0 y un valor máximo $f_r^{máx}$. Tal valor máximo $f_r^{máx}$ (que depende del material de las superficies) es proporcional a la magnitud de la componente normal. El coeficiente de proporcionalidad se denomina coeficiente de roce estático μ_e. En términos domésticos se diría que cuanto más "apretadas" estén dos superficies, más difícil será hacerlas deslizar (interpretación corriente de la relación $f_r^{máx} = \mu_e N$)

Si en cambio, las superficies están deslizando, la magnitud de la componente de roce es constante (independiente de la velocidad relativa, en un amplio rango de velocidades) y también proporcional a la magnitud de la componente normal. En este caso la constante de proporcionalidad se denomina coeficiente de roce cinético μ_c. El coeficiente de roce cinético es menor que el coeficiente de roce estático.

Como hemos visto con estos ejemplos, los experimentos son las fuentes de alimentación de la Física. La interpretación de los experimentos alimenta las teorías de la Física.

Síntesis conceptual

La cantidad de movimiento $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ de una partícula es considerada una magnitud sensora de las influencias del medio sobre la partícula. La velocidad manifiesta el comportamiento de la posición de la partícula con el transcurso del tiempo en relación a algún observador y la masa de la partícula es una característica propia sin la cual el sensor no existe. Así, siendo la velocidad el resultado de algún punto de vista (el observador) se hace indispensable seleccionar observadores para los cuales el medio en el que se desarrolla el movimiento del cuerpo que se estudia, se manifieste de manera única. Se denominan observadores inerciales a aquéllos para los cuales el resultado de las observaciones les muestra que una partícula libre de las influencias del medio presenta una cantidad de movimiento constante.

El Primer Principio afirma la existencia de al menos un observador inercial. Para aquellos observadores que sean inerciales, el Segundo Principio asegura que la influencia del medio, representada por la resultante de las fuerzas que los cuerpos que lo constituyen ejercen sobre el que se estudia, se traduce directamente en modificaciones de la cantidad de movimiento con el transcurso del tiempo. El Tercer Principio no sólo propone características direccionales en la manera con que dos cuerpos se influyen, sino que descarta la existencia de algún objeto especial o privilegiado que pueda influir sobre otros de manera diferente de la que éstos pueden influir sobre él.

El lector puede notar que en esta síntesis se usa la palabra “cuerpo” en lugar de “partícula”. Esto se debe a la tradición de respetar lo escrito por Newton pero rigurosamente debe usarse siempre la palabra “partícula” o “partículas” puesto que tal concepto permite definir una dirección como se hace en el Tercer Principio. No es posible definir una dirección entre cuerpos a menos que se los considere puntuales. Concretamente: las Leyes de Newton deben definirse para partículas.

El momento angular se introduce como una manifestación directa del punto de vista del observador y resulta ser una magnitud vinculada al fenómeno de rotación.

La palabra partícula se convierte en este capítulo en un concepto algo más elaborado que un modelo para describir de forma simplificada el movimiento de un cuerpo. La partícula es el elemento constituyente de los cuerpos y como tal no está constituida por otras cosas. El concepto de partícula adquiere un carácter elemental.

El Mago, a los codazos y con algunos empujones, había conseguido acercarse bastante al sultán como para que éste lo notara. Había elegido hábilmente las ropas para llamar la atención y lo estaba consiguiendo. El plan era genial: debía llamar la atención, explicar convincentemente y luego, a dormir sobre los laureles. El sultanato era apenas la reunión de algunas tribus y familias adineradas. El Mago era un inquieto viajero que aspiraba a pasarla bien sin mucho esfuerzo. Cuando advirtió la mirada curiosa del sultán, la función comenzó. Le mostró al sultán la llamativa bola de bronce, la apoyó en la pulida mesa y le indicó que ordenara que se moviera. El sultán, rico pero burro, no consiguió nada por más esfuerzo y concentración que pusiera. El Mago suspiró profundo, acomodó la bocha y dando un alarido con los brazos al cielo ordenó: MUÉVETE!!! Pasaron unos segundos, la bocha pareció titubear como una persona y comenzó a moverse hasta caer de la mesa. Contundente, aplastante, recontraconvincente! Durante los años siguientes, el Mago hizo y deshizo todo lo imaginable a lo largo y ancho del sultanato. Claro, le había prometido al sultán transmitirle EL PODER. El sultán consentía pero algo le hacía cosquillas por ahí adentro. Quien iba a imaginar que la tal bola, tan pulida, tan perfecta, tan brillante, tan cuidadosamente elaborada, era hueca. Quien podía imaginar que en esa bruñida superficie pudiera existir un puntillo, tan bien disimulado que parecía un reflejo de la luz, pero que disparaba un desconocido mecanismo cuando el Mago apoyaba la bola adecuadamente.

Un día, el sultán asistió a la inauguración de la feria de inventores que de tanto en tanto reunía a los ingeniosos de la región. En uno de los puestos de exhibición un sonriente estudiante del país vecino, que hasta tenía universidad, le mostró un notable conjunto de fierritos, algunos espiralados y otros con dientecitos y que se llamaba cuerda. Al otro día, fue la cabeza del Mago fue la que rodó por la mesa y con el embargo de sus bienes mal habidos el sultán inauguró una nueva escuela.

Capítulo 3
Consecuencias de las Leyes de Newton
Los Teoremas de Conservación

Introducción

Caracterizar es dar indicaciones particulares que permiten distinguir claramente unas cosas de otras. El estudio de un sistema físico siempre comienza por una caracterización: la que nos lleva a especificar qué cosa vamos a estudiar y qué cosa no. Desde el punto de vista de la Mecánica, la caracterización de un sistema no sólo requiere de la diferenciación entre el sistema a estudiar y el resto, sino también del conocimiento de ciertas magnitudes: el número de partículas que lo componen, la masa de cada una de ellas, y la posición y la velocidad de cada partícula en un cierto momento. El resto, es decir aquéllo que no es objeto de nuestro interés directo y que constituye el medio o ambiente en el cual el sistema está inmerso, podrá influir en mayor o menor grado sobre el sistema. Admitir que el medio influye en algún grado sobre el sistema que estamos estudiando, es admitir la necesidad de alguna caracterización adicional del medio. El concepto de fuerza se introduce para satisfacer justamente esta última caracterización. Fuerza es aquella magnitud que cuantifica la influencia del medio sobre el sistema bajo estudio. La segunda Ley de Newton establece -para todos los observadores inerciales que se definen con la Primera Ley- la relación entre la influencia del medio sobre una partícula y su forma de moverse, postulando que la resultante de las fuerzas sobre la partícula coincide con las modificaciones de su cantidad o estado de movimiento, a medida que transcurre el tiempo.

Si en un cierto instante se ha caracterizado un sistema, la evolución del mismo (los cambios en las magnitudes que lo caracterizan) está determinada por las fuerzas que actúan sobre las partículas que lo componen. El Principio de Acción y Reacción (Tercera Ley de Newton) afirma que por cada fuerza que consideremos en cada partícula del sistema bajo estudio, existirá una fuerza, igual y opuesta, en alguna otra partícula que pertenecerá o al sistema o al medio, de forma excluyente (ambas fuerzas con la dirección de la recta que une a las partículas en cuestión). De manera que si la evolución del sistema está determinada por las fuerzas sobre las partículas que lo forman, dicha evolución es siempre acompañada por una evolución del medio, determinada por las contrapartidas de acción y reacción sobre las partículas del medio. Sintetizando: si evoluciona el sistema que estudiamos, también evoluciona el medio con el que interactúa. Y creo que cabe preguntarse: ¿Existirá alguna relación entre las evoluciones del sistema y del medio? Respuesta: Seguramente; está el Principio de Acción y Reacción de por medio. Otra pregunta: ¿Habrá algún grado de complementación entre las evoluciones del sistema y del medio? Respuesta: Tal vez, para algunas magnitudes sí, para otras no. De aquéllas magnitudes que se complementen entre sistema y medio, es decir, aquellas para las cuales los cambios determinados en el sistema, al evolucionar, determinen cambios iguales y opuestos en el medio (o viceversa), se dice que se conservan. La denominación surge del hecho que los cambios puedan ser iguales y opuestos (en el sistema y en el medio o al revés) de manera que la variación de la magnitud, considerando la evolución del sistema y del medio en forma conjunta, es nula y la magnitud permanece inalterada.

No se puede perder de vista que la conservación de una magnitud es asegurada al considerar sistema y medio a la vez. Esto significa que la conservación está relacionada con lo que se llama universo: aquéllo que se estudia y todo lo que lo rodea. Ahora bien, caracterizar el universo es una tarea imposible y parece que lo que hemos estado discutiendo tiene su aplicación restringida al estudio del universo. Es verdad en un sentido riguroso... Sin embargo, para muchos sistemas, las influencias del medio pueden ser despreciables en relación a las que las partículas del sistema se ejercen entre ellas, o las influencias del medio pueden compensarse de manera de no existir una influencia neta. En tales condiciones el sistema se comporta como un universo y de él se dice que es aislado. Por ejemplo: tomemos una bocha que vuela como consecuencia de que fue lanzada como bala en las olimpíadas. Sobre la bocha influyen: el aire (por contacto) y, a distancia, nuestro planeta, la luna, el sol, otros planetas, la hinchada en la tribuna, etc., etc., etc. La resultante sobre la bocha, debida a todas las influencias, ¿difiere mucho de la que nuestro planeta ejerce (denominada peso de la bocha)? Las otras fuerzas que se suman al peso de la bocha son demasiado pequeñas como para que el vector resultante sea muy diferente del mismo peso. La Tierra es el objeto determinante de la evolución del movimiento de la bocha. Si en cambio, la bocha se mueve sobre una mesa horizontal lisa, la fuerza de contacto entre bocha y mesa compensa la fuerza aplicada por la Tierra. Así, la bocha se comporta como un sistema aislado. Dos bochas en la misma situación también se comportarían como un sistema aislado. Siendo así, el sistema bocha-bocha puede considerarse un pequeño universo (sistema aislado). Una de las bochas juega el papel de medio externo en el que se mueve la otra. Las magnitudes que se conserven pueden ser usadas para determinar características de una o ambas bochas.

La existencia de magnitudes que se conservan es una poderosa herramienta de análisis que permite vincular características de un sistema en diferentes momentos de su evolución, sin necesidad de detallar tal evolución. Concretando: si se conserva una magnitud cualquiera A, determinada mediante el valor de las cantidades B1, C1 y D1 en un cierto instante, entonces, otros valores B2, C2 y D2 de esas mismas cantidades, en otro instante, están relacionados con los anteriores a través de A, independientemente de la evolución del sistema.

Hay mucho ejemplos de sistemas físicos que se pueden tratar como sistemas aislados. Veamos ahora, en el marco de la Mecánica de Newton, cuáles magnitudes satisfacen condiciones de conservación y bajo qué circunstancias.

3.1 - La cantidad de movimiento

La cantidad de movimiento $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ de una partícula es una magnitud que, combinando dos características esenciales de la partícula como su masa y su velocidad, describe de qué manera se desplaza una cierta cantidad de materia en el espacio. La descripción, naturalmente, no escapa a la esencia relativa del movimiento de cualquier cosa: la velocidad involucrada en la definición de $\boldsymbol{p}$, es relativa a un cierto observador. Consecuentemente, distintos observadores asignarán diferentes cantidades de movimiento a una misma partícula.

Las modificaciones en la cantidad de movimiento de una partícula, a medida que el tiempo transcurre, están determinadas, para todos los observadores inerciales, por la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula. Es decir, si las fuerzas representan la influencias que los cuerpos hacen sobre la partícula que estamos estudiando, la partícula presentará modificaciones en su cantidad de movimiento en tanto las influencias produzcan un resultado efectivo (es decir no se compensen o anulen).

El cambio en la cantidad de movimiento $\boldsymbol{p}$, habitualmente designado con $\Delta\boldsymbol{p}$, depende del tiempo durante el cual la resultante de las fuerzas (en representación de todas las fuerzas) ejerce su influencia. Si por algún motivo (o varios motivos), durante un intervalo de tiempo Δt, la resultante es nula, obviamente no se producirán modificaciones en $\boldsymbol{p}$ en tal intervalo. Esta última declaración (ya indicada como obvia) es una consecuencia inmediata de la segunda ley de Newton

$$\boldsymbol{F_R} = \sum_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{F_i} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

En el caso de estudiar el movimiento de un conjunto o sistema de partículas de masas $m_1, m_2, ..., m_N$ con velocidades respectivas $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_N$, la cantidad de movimiento del sistema se define como la suma de las cantidades de movimiento de las partículas que lo componen

$$\boldsymbol{P} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{N} \boldsymbol{p_i} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{N} m_i \boldsymbol{v_i}$$

Así, las modificaciones de la cantidad de movimiento de un sistema de partículas estará determinado por la suma de las modificaciones de cada una de las cantidades de movimiento de las partículas que lo forman.

Como hemos visto, es la resultante de las fuerzas sobre una partícula aquéllo con capacidad de modificar su cantidad de movimiento de tal forma que, para un sistema de partículas (en virtud de la última definición) será la resultante de resultantes el agente modificador de la cantidad de movimiento del sistema:

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\boldsymbol{p_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F_R^i}$$

siendo la última suma aquéllo que hemos llamado la resultante de resultantes[1]. Como se ha visto, la tercera ley de Newton contribuye a simplificar la evaluación de la tal resultante de resultantes. Según el principio de acción y reacción, las fuerzas que las partículas pertenecientes al sistema se ejercen entre ellas son pares de vectores opuestos de igual magnitud. De esta forma, la suma que conduce a la resultante de resultantes permite cancelar las fuerzas que las partículas se hacen entre ellas indicando que sólo las fuerzas que ejerzan las partículas (o cuerpos) que no pertenecen al sistema estudiado, contribuirán a modificar la cantidad de movimiento del conjunto.

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\boldsymbol{p_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F_R^i} = \sum_{j} \boldsymbol{F}_j^{Ext.} = \boldsymbol{F_R^{Ext.}}$$

Así, los cambios en la cantidad de movimiento de un sistema están determinados por la resultante de las fuerzas externas aplicadas sobre el sistema.

A veces es muy instructivo analizar la contrapartida de esta última declaración, es decir, "**la cantidad de movimiento de un sistema de partículas no puede ser modificada por las fuerzas que las partículas del sistema se apliquen entre ellas**". Queda para el lector, pensar si el conductor de un automóvil puede frenarlo tirando del volante o por qué no nos elevamos tirándonos de los pelos o ... tantas otras cosas más.

---

[1] La expresión "resultante de resultantes" se podría haber evitado pero manifiesta bastante bien lo que se quiere indicar.

Sintetizando: **la resultante de las fuerzas externas determina los cambios en la cantidad de movimiento del sistema: Si la resultante de las fuerzas externas en nula, la cantidad de movimiento del sistema permanece invariable**.

Esta última afirmación se conoce como el enunciado del Teorema de Conservación de la Cantidad de Movimiento. Un sistema de partículas para el cual la resultante de las fuerzas externas en nula se comporta como un sistema aislado.

Desde un punto de vista ligeramente distinto (que no es otra cosa que una reformulación de la última ecuación), la variación de la cantidad de movimiento de un sistema puede expresarse como

$$\Delta \boldsymbol{P} = \int_{p_1}^{p_2} d\boldsymbol{p} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{R}}^{Ext.} dt$$

donde la integral de la derecha es conocida con el nombre de impulso de la fuerza considerada en el integrando. Visto así, el cambio de la cantidad de movimiento de un sistema depende (siempre que no sea nula la resultante) del intervalo entre t_1 y t_2. Cuanto más pequeño sea el intervalo entre t_1 y t_2, comparado con algún otro intervalo de tiempo característico del estudio que estemos efectuando, tanto menor será el cambio en la cantidad de movimiento producido por la resultante de las fuerzas externas. Estas consideraciones son útiles para casos de sistemas no aislados que, por ejemplo, se fragmentan o en los cuales las partículas chocan. Si la duración del proceso de fragmentación o de choque es muy pequeña comparada con el tiempo de estudio anterior y/o posterior a la tal fragmentación o choque, se puede admitir que la cantidad de movimiento del sistema permanecerá invariable durante tales procesos[2].

De forma enteramente análoga se puede discutir la variación del momento angular de una partícula o de un sistema de partículas. Bastaría con recordar la definición de momento angular de una partícula para dar pié al estudio del agente que lo puede modificar y extender las relaciones a conjuntos o sistemas de partículas. Veamos...

3.2 - El momento angular

Hagamos un repaso: si en un instante t una partícula de masa m con velocidad $\boldsymbol{v}$ está en la posición $\boldsymbol{r}$, se denomina momento angular de la partícula a la magnitud $\boldsymbol{l}$ definida como:

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

donde la cruz indica un producto vectorial.

Los cambios del momento angular a medida que el tiempo transcurre dependerán tanto de los cambios en $\boldsymbol{r}$ como de los cambios en $\boldsymbol{p}$ en la forma

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{v} \times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

y en virtud de que la velocidad de una partícula es siempre paralela a su cantidad de movimiento (y usando también la segunda ley de Newton)

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F_R}$$

La magnitud que modifica el momento angular de una partícula resulta del producto vectorial entre la posición de la partícula y la resultante de las

---

[2] Nunca está de más aclarar que se está caracterizando la cantidad de movimiento del sistema y **no** la de cada partícula perteneciente al sistema.

fuerzas sobre la partícula (es importante el orden establecido puesto que el producto vectorial no es conmutativo). Tal magnitud se llama momento de la fuerza considerada (en este caso la resultante) y se lo indica con la letra $\boldsymbol{\tau}$ (tau):

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \boldsymbol{\tau}$$

En el caso de estudiar un sistema de N partículas, el momento angular ***L*** del sistema es la suma de los momentos angulares de cada partícula que compone el sistema:

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{l_i} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{p_i} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r_i} \times m_i \boldsymbol{v_i}$$

y su variación con el tiempo es:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_{i-1}^{N} \frac{d\boldsymbol{l_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\tau}_R^i$$

La última suma representa la resultante de los momentos de las fuerzas resultantes sobre cada partícula del sistema. El principio de acción y reacción permite, nuevamente, simplificar la evaluación de tal resultante, reduciendo el cálculo a la consideración de los momentos de las fuerzas externas sobre el sistema. Así, la última relación resulta:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_{j} \boldsymbol{\tau}_j^{Ext.}$$

El momento angular de un sistema de partículas se modifica por la acción de la resultante de los momentos de las fuerzas externas ejercidas sobre el sistema.

La analogía con las consideraciones hechas para la cantidad de movimiento de un sistema es completa (de unas relaciones se obtienen las otras cambiando $\boldsymbol{P}$ por $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{F}^{\text{Ext.}}$ por $\boldsymbol{\tau}^{\text{Ext.}}$). En consecuencia, se puede declarar que:

El momento angular de un sistema no se puede modificar por acción de momentos de fuerzas internas y permanecerá constante en tanto sea nula la resultante de los momentos de las fuerzas externas.

El mismo planteo hecho al discutir la magnitud que cambia la cantidad de movimiento de un sistema conduce a la definición de impulso angular como:

$$\Delta \boldsymbol{L} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{R}}^{Ext.} dt$$

y las consideraciones a cerca de la duración del momento de la fuerza y su influencia sobre el momento angular son las mismas que las discutidas antes.

3.3 - Trabajo y Energía

La palabra trabajo nos ha acompañado casi cotidianamente desde que tenemos memoria (“Este chico me da un trabajo …”, “Vas a ver cuando papá vuelva del trabajo!!!”. “¿Cómo te fue en el trabajo?”. “No sabes lo que pasó en el trabajo!”, etc., etc., etc.). La idea que adquirimos está relacionada con ocupación, sustento y sobre todo, cansancio y sacrificio. El trabajo está tan arraigado como actividad social que cuesta imaginar que los hechos naturales, aquellos procesos para los cuales no tiene el menor sentido hablar de ocupación, sustento, cansancio o sacrificio, puedan tener algo que ver con el trabajo. A nadie se le ocurre pensar que tal o cual cometa viaja lentamente (siempre comparando su velocidad con alguna otra velocidad) porque está cansado o que las mareas crecen más unos días que otros porque necesitan hacer horas extras. No, las cosas no pasan por ahí… Sin embargo, la búsqueda incesante de relaciones de causa y efecto que caracteriza toda investigación seria y no meramente descriptiva nos lleva a generalizar la necesidad de motivos para todo lo que observamos. Alguna razón habrá para que el cometa se mueva lentamente o para que las mareas suban más o para que el sol brille como brilla o para que la temperatura sea la que es. A veces se pretenden buscar razones simples y/o circunstanciales y a veces se buscan las razones últimas, las esenciales. La temática que nos ocupa ahora apunta a comenzar la búsqueda de las razones últimas de los hechos, aquéllo que es el motivo de los hechos, aquéllo que dirige los procesos naturales. El tema tiene que ver con la palabra energía que significa "fuerza en acción". La tarea es difícil y lo que presentaremos es sólo un comienzo.

Trabajo, desde el punto de vista mecánico, es una magnitud vinculada a las fuerzas aplicadas sobre una partícula y al desplazamiento de la misma. Sabemos, por la Segunda Ley de Newton, que es la resultante de las fuerzas la responsable de los diferentes estados de movimiento de una partícula. Además, sabemos que la resultante es la suma de las fuerzas aplicadas. Cada una de las fuerzas aplicadas sobre la partícula que estudiamos representa la acción (o influencia) de un cuerpo en particular. En principio, el trabajo de una fuerza se introduce con la idea de averiguar si la influencia de tal o cual cuerpo es relevante en relación al desplazamiento de la partícula influida. Si la fuerza en cuestión se orienta de alguna manera para el lado del desplazamiento de la partícula decimos que la fuerza contribuye positivamente con el desplazamiento y si la fuerza "apunta" en contra del desplazamiento, contribuirá negativamente al desplazamiento. Existe también la situación indiferente en la que la fuerza no se orienta ni a favor ni en contra del desplazamiento y, en ese caso, decimos que no contribuye al desplazamiento. Otra cosa que sabemos y no podemos perder de vista es que las fuerzas sobre una partícula raramente son constantes. Esta última aclaración no es redundante porque en la definición de trabajo de una fuerza que vamos a proponer tendremos en cuenta justamente esta situación. Debemos admitir que si en un punto de su trayectoria una partícula está sometida a un cierto conjunto de fuerzas, algún momento después, el conjunto no tiene porqué ser el mismo. Como ya dijimos, cada fuerza representa la acción o influencia de un cuerpo y tal acción no tiene porqué ser la misma en los diferentes puntos del espacio en que se encuentra la partícula que estamos estudiando.

Supongamos que una cierta fuerza $\boldsymbol{F}$ (entre otras, claro) está aplicada sobre una partícula y que la partícula se está desplazando. Sea $d\boldsymbol{r}$ en desplazamiento de la partícula entre t y $t+dt$. Se define trabajo dW de la fuerza $\boldsymbol{F}$ durante el desplazamiento $d\boldsymbol{r}$ al escalar

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

La cantidad así definida cumple con las consideraciones que pretendimos indicar en el párrafo anterior: Si el ángulo entre $\boldsymbol{F}$ y $d\boldsymbol{r}$ es menor de 90° $dW > 0$; si el ángulo entre $\boldsymbol{F}$ y $d\boldsymbol{r}$ es mayor de 90° $dW < 0$ y si el ángulo entre $\boldsymbol{F}$ y $d\boldsymbol{r}$ es de 90° $dW = 0$. El trabajo es una magnitud escalar que se mide en unidades de fuerza (N) y desplazamiento (m). A la unidad N.m se la denomina Joule (J).

Si la trayectoria de la partícula entre los puntos A y B del espacio está representada por la curva C (la trayectoria simboliza la sucesión de desplazamientos), el trabajo a lo largo de la trayectoria C será la suma de todas las contribuciones dW en los sucesivos desplazamientos. Así,

$$W_{AB} = \int_C dW = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

donde la fuerza ***F*** es un vector cuyas componentes, en general, dependerán de las coordenadas

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z)\ \breve{\boldsymbol{i}} + F_y(x,y,z)\ \breve{\boldsymbol{j}} + F_z(x,y,z)\ \breve{\boldsymbol{k}}$$

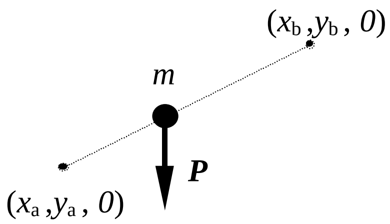
y el vector desplazamiento ***dr*** tiene por componentes los cambios en las coordenadas

$$d\boldsymbol{r} = dx\ \breve{\boldsymbol{i}} + dy\ \breve{\boldsymbol{j}} + dz\ \breve{\boldsymbol{k}}$$

La trayectoria C estará especificada por alguna ecuación de la forma

$$C(x,y,z) = 0$$

Con toda seguridad un cálculo concreto ayudará a comprender cómo se evalúa el trabajo de una fuerza. Veamos un ejemplo sencillo, es decir, un caso en el cual las componentes de la fuerza son funciones muy simples: ¿Qué trabajo realiza la fuerza peso de una partícula de masa *m*, si la partícula se ha desplazado desde el punto A de coordenadas (x_a,y_a,0) hasta el punto B=(x_b,y_b,0) en una trayectoria rectilínea?



El vector peso ***P*** de la partícula tiene módulo *mg*, es vertical y apunta hacia el centro de la tierra. De manera que si elegimos un sistema de coordenadas con un eje vertical hacia arriba (digamos el eje *y*) será:

$$\boldsymbol{P}(x,y,z) = 0\ \breve{\boldsymbol{i}} - mg\ \breve{\boldsymbol{j}} + 0\ \breve{\boldsymbol{k}}$$

el desplazamiento no tiene modificaciones en la coordenadas *z*:

$$d\boldsymbol{r} = dx\ \breve{\boldsymbol{i}} + dy\ \breve{\boldsymbol{j}}$$

y la ecuación curva de la C es

$$y = R\,x + S$$

siendo R y S la pendiente y la ordenada al origen de la trayectoria recta, respectivamente. El lector sabrá encontrar la relación entre R, S y los puntos A=(x_a,y_a,0) y B=(x_b,y_b,0). Una vez representados los elementos que participan de la definición del trabajo, nos queda efectuar las operaciones correspondientes. Así resulta

$$W_{AB} = \int_C dW = \int_A^B \boldsymbol{P} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_A^B mg\,dy = mg(y_a - y_b)$$

Veamos otro ejemplo donde al menos una componente de la fuerza sea una función explícita de alguna coordenada. El caso más simple es aquél en el cual la componente de la fuerza es proporcional a una coordenada:

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = -k\ x\,\breve{\boldsymbol{i}} + 0\,\breve{\boldsymbol{j}} + 0\,\breve{\boldsymbol{k}}$$

y evaluemos el trabajo en una trayectoria recta paralela al eje x entre los puntos x_1 y x_2. La ecuación de tal recta es y = Cte. y el vector desplazamiento no tiene componentes según los ejes y y z pues tales coordenadas no varían. Entonces, el trabajo resulta

$$W_{AB} = \int_C dW = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \tfrac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$$

Espero que los ejemplos hayan aclarado cómo se hace el cálculo del trabajo de una fuerza y supongo que la práctica (abundante) dará un buen acabado a esta problemática. Debe notarse que en ningún momento se establece una relación directa entre el desplazamiento y la fuerza. Insistimos, la trayectoria de una partícula (la sucesión de sus desplazamientos) está determinada por **todas** las fuerzas que actúan sobre ella de manera conjunta (está determinada por la resultante) y el trabajo se refiere a una cualquiera de las fuerzas participantes. Luego de esta aclaración, tal vez valga la pena (vale y mucho) intentar evaluar el trabajo de la resultante de las fuerzas sobre una partícula. Veamos…

Sea $\boldsymbol{F}_R$ la resultante de las fuerzas sobre una partícula de masa m que sigue una trayectoria C de manera que cuando pasa por el punto A en $\boldsymbol{r}_A$ posee velocidad $\boldsymbol{v}_A$ y al cabo de un tiempo Δt alcanza el punto B en $\boldsymbol{r}_B$ con velocidad $\boldsymbol{v}_B$. El trabajo de la resultante en el tramo entre A y B de la trayectoria será, por definición:

$$W_{AB} = \int_C dW = \int_A^B \boldsymbol{F}_R \cdot d\boldsymbol{r}$$

Tratándose de la resultante de las fuerzas, la Segunda Ley de Newton

$$\sum_i \boldsymbol{F_i} = \boldsymbol{F_R} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

nos permite expresar el trabajo como

$$W_{F_R} = \int_A^B \boldsymbol{F}_R \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{v_A}^{v_B} m\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{v} = \tfrac{1}{2}\,mv_B^2 - \tfrac{1}{2}\,mv_A^2$$

El resultado obtenido (del cual no debe perderse de vista que es sólo válido para la resultante de las fuerzas) es de suma importancia ya que nos indica que el trabajo de la resultante de las fuerzas se puede obtener independientemente de la trayectoria como la variación de la función $\tfrac{1}{2}\,m\,v^2$. En menos palabras, nos basta saber que una partícula ha modificado su velocidad entre dos puntos de su trayectoria para poder deducir cuál ha sido el trabajo de la resultante sobre ella. No es posible demostrar para cualquier fuerza que su trabajo sea independiente de la trayectoria. Tal vez existan ciertos casos particulares pero en general, el trabajo de una fuerza cualquiera (que es una parte de la resultante), depende de la trayectoria que ha seguido la partícula.

Evidentemente, al calcular trabajos de fuerzas, la relevancia de la trayectoria en el caso de la resultante de las fuerzas en completamente nula. El trabajo de la resultante en un tramo de la trayectoria que se inicia con velocidad $\boldsymbol{v}_i$ y finaliza con velocidad $\boldsymbol{v}_f$, sea cual fuere la curva seguida por la partícula, no puede diferir de lo que se obtiene como la variación de la función $\frac{1}{2}\,m\,v^2$.

Llamaremos energías a aquellas funciones cuya variación permita calcular el trabajo de una fuerza. La variaciones de la función $\frac{1}{2}\,m\,v^2$ indican directamente el trabajo de la resultante de las fuerzas sobre una partícula de masa *m* (perdón por la insistencia) y siendo esta función dependiente de la velocidad de la partícula, se la conoce con el nombre de Energía Cinética E_c de la partícula[3].

- La energía cinética depende (además de la masa de la partícula) del cuadrado del módulo de la velocidad
- La energía cinética de una partícula en un cierto instante es un número con unidades de trabajo
- En distintos instantes, la energía cinética tiene, en general, diferentes valores
- La energía cinética es una función que no puede ser negativa

Obtener la igualdad

$$\int_A^B \boldsymbol{F}_R \cdot d\boldsymbol{r} = \tfrac{1}{2}\,m\,v_B^2 - \tfrac{1}{2}\,m\,v_A^2 = \Delta E_c$$

es demostrar el llamado Teorema de Trabajo y Energía.

Tal vez sea oportuno aclarar con palabras domésticas, qué se entiende por *variación* de una función. Si f_1 es el valor de una función para una cierta

[3] El motivo de pedir perdón por insistir en que la variación de la energía cinética representa el trabajo de la resultante, viene a que, a veces, se ejemplifica esta igualdad con casos donde **sólo una fuerza** actúa

elección de las variables de la función y f_2 lo es para las variables incrementadas[4], la variación de f es: $\Delta f = f_2 - f_1$.

Hemos encontrado que la resultante de las fuerzas tiene una energía asociada (la energía cinética) que permite evaluar (a través de su variación) el trabajo efectuado en un tramo de trayectoria. Veamos ahora si podemos encontrar alguna condición que nos permita determinar si alguna otra fuerza tiene una energía asociada, es decir, si existen otras fuerzas cuyo trabajo se pueda calcular como la variación de una energía independientemente de la trayectoria seguida.

De la definición de trabajo

$$W_{AB} = \int_C dW = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

surge la necesidad de integrar el resultado de $\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, es decir, integrar

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) \cdot d\boldsymbol{r} = F_x(x,y,z)\, dx + F_y(x,y,z)\, dy + F_z(x,y,z)\, dz$$

Si esta última expresión es la diferencial exacta de una cierta función $\Phi(x,y,z)$, podemos aplicar la Regla de Barrow en la integral del trabajo de forma que

$$\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B d\Phi = \Phi(B) - \Phi(A)$$

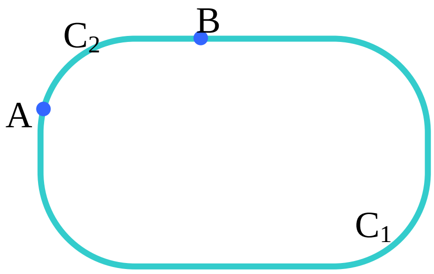
La función Φ se conoce con el nombre de función potencial y sólo para algunas fuerzas $\boldsymbol{F}$ existirá función potencial. Se puede demostrar que si $\boldsymbol{F}$ es tal que

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

---

sobre una partícula y de ahí, los alumnos creen que el trabajo de **una** fuerza es la variación de la energía cinética.

[4] Entenderemos por "2" aquello que sea final o posterior a, luego de, a continuación de, siguiente a "1". El "1" lo pensamos como inicio o anterior a, previo a, antes que "2".



para toda curva cerrada C (sin excepción), entonces existe función potencial para la fuerza ***F*** y la evaluación de la integral, en un dado tramo, es independiente de la curva. Efectivamente, la figura muestra una trayectoria cerrada cualquiera en la cual se han particularizado dos puntos A y B. Explicitando la igualdad anterior se obtiene que

$$\int_{A\,C_1}^{B} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{B\,C_2}^{A} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{A\,C_1}^{B} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} - \int_{A\,C_2}^{B} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

Así, se puede concluir lo siguiente:

$$\int_{A\,C_1}^{B} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{A\,C_2}^{B} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

Este resultado nos muestra que el trabajo de la fuerza ***F*** no depende de la curva seguida (C_1 o C_2) sino de los puntos A y B que definen el comienzo y el final del trayecto.

Las fuerzas que poseen la propiedad que su trabajo depende exclusivamente de las coordenadas de los puntos que determinan el tramo considerado se denominan fuerzas conservativas. Son todas aquéllas que satisfacen la propiedad

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

para toda curva C. El trabajo de una fuerza conservativa se puede evaluar a través de la variación de una función potencial o energía potencial asociada a la fuerza (lea de nuevo ese asunto de la Regla de Barrow).

Tal vez el lector haya notado (o tal vez no…) que al mencionar la manera de determinar el trabajo de una fuerza conservativa hay un cierto “tiro por elevación” escondido en las palabras “a través de”. Lo que se ha tratado de cuidar es el hecho que tal trabajo no es directamente la variación de una energía potencial. Veamos… En el los ejemplos relativos al cálculo del trabajo de fuerzas se ha encontrado que el trabajo de la fuerza peso de una partícula y otra fuerza proporcional a la coordenada son, respectivamente

$$W_{Peso} = mg(y_a - y_b)$$
$$W_{el.} = \tfrac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$$

(donde el trabajo de la fuerza proporcional a la coordenada se lo ha subindicado “el.” ya que tales fuerzas son comunes en procesos elásticos). Se puede notar que el trabajo es la resta de dos valores de la misma función. Y los valores son justamente los que se obtienen al evaluar la función en las coordenadas de los puntos que definen el comienzo y el final de la trayectoria considerada (los ejemplos no fueron tomados al azar). La fuerza peso en las cercanías de la superficie de la Tierra (como cualquier fuerza constante) y las fuerzas elásticas (proporcionales a la coordenada) son fuerzas conservativas y **sus trabajos coinciden con la variación, cambiada de signo, de energías potenciales**. Aquella función de las coordenadas cuya variación (con signo cambiado) es el trabajo de la fuerza peso se llama Energía Potencial Gravitatoria U_g y aquella cuya variación (con signo menos) nos da el trabajo de una fuerza elástica se llama Energía Potencial Elástica $U_{el.}$. Y así, llamaremos Energía Potencial U asociada a una fuerza conservativa, a la función de las coordenadas cuya variación, cambiada de signo, evalúa el trabajo de la fuerza en cuestión:

$$\int_A^B \boldsymbol{F}^{cons} \cdot d\boldsymbol{r} = -\Delta U = -\left[U(B) - U(A)\right]$$

Como el trabajo de una fuerza conservativa es independiente de la trayectoria seguida, la determinación de la energía potencial asociada se puede hacer una sola vez y por la trayectoria más sencilla que nos parezca (total, va a dar lo mismo por cualquiera!!).

Ya hemos encontrado dos energías potenciales, la gravitatoria, de la forma

$$U_g(x, y, z) = mg\,y$$

donde y es la coordenada según la dirección vertical relativa a un origen arbitrario y la elástica (asociada a una fuerza elástica unidimensional), de la forma

$$U_{el.}(x) = \tfrac{1}{2} k x^2$$

donde x representa el apartamiento del estado de equilibrio de un cuerpo elástico.

Lamentablemente, si nos topamos con una fuerza no conservativa tendremos que conocer la trayectoria para evaluar su trabajo. Bastará con encontrar una única trayectoria cerrada C para la cual

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \neq 0$$

para concluir que tal fuerza $\boldsymbol{F}$ es no conservativa. El ejemplo más típico de fuerzas no conservativas es el de las fuerzas de contacto, con componente de roce, entre cuerpos que deslizan uno respecto al otro. Cuando la superficie de un objeto desliza sobre la superficie de otro, la componente de roce de la fuerza de contacto tiene sentido opuesto al del desplazamiento de la superficie del objeto considerado, relativo a la otra superficie. Tal situación conduce a un resultado siempre negativo para el trabajo de la fuerza de contacto en cualquier clase y forma de trayectoria (tanto abierta como cerrada).

Como hemos visto, desde el punto de vista del trabajo que realizan, las fuerzas pueden agruparse en conservativas y no conservativas, dependiendo de la posibilidad o no de asociarles una energía potencial. La resultante de las fuerzas, en este contexto, es algo particular ya que su trabajo no es la variación (cambiada de signo) de una energía potencial ni hace falta conocer la trayectoria para calcular su trabajo: basta con determinar las velocidades inicial y final del tramo de interés. La resultante reúne el trabajo de todas las fuerzas actuantes. Así, admitamos que de un conjunto de N fuerzas que actúen sobre una partícula, N_1 sean conservativas y N_2 sean no conservativas, de manera que la resultante se puede expresar como

$$\boldsymbol{F}_R = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{N_1} \boldsymbol{F}_j^{cons.} + \sum_{k=1}^{N_2} \boldsymbol{F}_k^{no\,cons.}$$

con $N = N_1 + N_2$. El trabajo de tal resultante será

$$\Delta E_C = \int_A^B \boldsymbol{F}_R \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{A}}^B (\sum_{i=1}^{N_1} \boldsymbol{F}_j^{cons.}) \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\boldsymbol{A}}^B (\sum_{k=1}^{N_2} \boldsymbol{F}_k^{no\,cons.}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

El trabajo de cada una de las fuerzas conservativas $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{cons.}}$ se podrá calcular como la variación (cambiada de signo) de la energía potencial U_p^j correspondiente

$$\int_A^B (\sum_{j=1}^{N_1} \boldsymbol{F}_j^{cons.}) \cdot d\boldsymbol{r} = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{N_1} (\int_A^B \boldsymbol{F}_j^{cons.} \cdot d\boldsymbol{r}) = -\sum_{j=1}^{N_1} (\Delta U_p^j) =$$

$$= -\Delta(\sum_{j=1}^{N_1} U_p^j) = -\Delta U_p = -\left[U_p(B) - U_p(A)\right]$$

donde se ha aprovechado la secuencia de igualdades y se ha definido la Energía Potencial de una partícula como la suma de las energías potenciales asociadas a cada fuerza conservativa que actúa sobre ella.

Por otra parte, el trabajo de las contribuciones no conservativas a la resultante deberá ser particularmente calculado según la fuerza y de acuerdo con la trayectoria. Entonces, reuniendo toda esta información se obtiene:

$$\Delta E_C = -\Delta \sum_{j=1}^{N_1} U_p^j + \int_A^B \left(\sum_{k=1}^{N_2} \boldsymbol{F}_k^{no\,cons}\right) \cdot d\boldsymbol{r} = -\Delta U_p + \int_A^B \left(\sum_{k=1}^{N_2} \boldsymbol{F}_k^{no\,cons}\right) \cdot d\boldsymbol{r}$$

Esta última igualdad se puede reordenar de forma de reunir las funciones energéticas que permiten evaluar trabajo por un lado y los trabajos dependientes de las trayectorias por otro. Pues, reorganizando obtenemos

$$\Delta E_C + \Delta \sum_{j=1}^{N_1} U_p^j = \Delta E_C + \Delta U_p = \Delta(E_C + U_p) = \int_A^B \left(\sum_{k=1}^{N_2} \boldsymbol{F}_k^{no\,cons}\right) \cdot d\boldsymbol{r}$$

lo que se puede expresar con las palabras: El trabajo de las fuerzas no conservativas que actúan sobre una partícula produce una modificación en la suma de la energía cinética y la energía potencial de la partícula, entendiendo por energía potencial a la suma de las energías potenciales asociadas a cada fuerza conservativa que actúa sobre la partícula. A la suma de la energía cinética y la energía potencial de una partícula de la denomina Energía Mecánica E_M y la declaración anterior se resume en la relación:

$$W_{F(\text{no conservativas})} = \Delta E_M$$

Esta última igualdad determina una condición de conservación expresada como:

Si las fuerzas no conservativas que actúan sobre una partícula no producen trabajo, la energía mecánica de la partícula se mantiene constante

La denominación Energía Mecánica está originada en el hecho de haber utilizado la Segunda Ley de Newton o Segunda Ley de la Mecánica como punto de partida para la obtención del trabajo de la resultante de las fuerzas. La resultante de las fuerzas representa la influencia del ambiente sobre al cuerpo que estudiamos. Si por algún motivo (que en general tiene que ver con un afán organizador) efectuamos una clasificación de las fuerzas según grandes grupos como fuerzas de naturaleza eléctrica, fuerzas de naturaleza magnética, fuerzas de naturaleza gravitatoria, fuerzas del tipo elástico, etc., la denominación Energía Mecánica pierde significado y se generaliza a Energía (sin calificativos). La experiencia nos ha mostrado que, si bien los estudios mecánicos requieren del uso de fuerzas no conservativas (como ciertas fuerza de contacto entre cuerpos que rozan), tales fuerzas no son necesarias si se amplía el estudio incluyendo fenómenos electromagnéticos, nucleares, etc. Así, no existirían fuerzas no conservativas (no pudiendo hacer trabajo, claro) y la energía se transformaría en una magnitud constante para cualquier proceso. Si bien la energía surge como una manera para evaluar trabajos en base a las propiedades de las fuerzas, las teorías modernas (que proponen postulados diferentes de los de Newton) interpretan a la energía como una magnitud esencial de los procesos físicos, cuyo intercambio -manifiestado de diferentes formas- determina la manera cómo los hechos pueden ocurrir.

Para sistemas de partículas, las funciones energéticas pueden ser generalizadas. Veamos...

3.4 - Energía mecánica de un sistema de partículas

Como se ha visto, el trabajo de la resultante de las fuerzas sobre una partícula se puede evaluar, por un lado, como la variación de la energía cinética de la partícula y por otro, como el trabajo de las diferentes fuerzas que contribuyen a la resultante. La distinción entre las diferentes contribuciones en fuerzas conservativas o no conservativas, permite la evaluación esos trabajos como la variación (cambiada de signo) de una energía potencial o no, según corresponda. Así resulta que el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es el motivo de la variación de la energía mecánica de una partícula.

Con el fin de extender el concepto de energía mecánica a un conjunto de partículas, intentaremos generalizar las ideas básicas consideradas al estudiar una sola partícula, es decir, evaluar el trabajo de la resultante de las fuerzas.

La resultante de las fuerzas sobre un sistema de partículas es la suma de cada una de las fuerzas resultantes sobre cada partícula que constituye el sistema considerado. De esta manera, en un sistema de N partículas la resultante es expresada como:

$$\boldsymbol{F}_R = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i^R$$

siendo $\boldsymbol{f}_i^R$ la resultante sobre la partícula *i* del sistema.

El trabajo realizado por tal conjunto de fuerzas resultantes será la suma de los trabajos realizados por cada una de ellas:

$$W_{\boldsymbol{F_R}} = \sum_{i=1}^{N} \int \boldsymbol{f}_i^R \cdot d\boldsymbol{r_i}$$

donde $d\boldsymbol{r}_i$ representa el desplazamiento de cada partícula y la integral se evalúa según la trayectoria seguida por de cada partícula.

Entonces, como se demostró que para una partícula el trabajo de la resultante es la variación de la energía cinética de la partícula, debemos concluir que, para que la misma idea se vea reflejada en un sistema de partículas, la energía cinética del sistema debe ser definida como la suma de las energías cinéticas de cada partícula que lo compone. En efecto,

$$W_{\boldsymbol{F_R}} = \sum_{i=1}^{N} \int \boldsymbol{f}_i^{R} d\boldsymbol{r_i} = \sum_{i=1}^{N} \Delta\left(\tfrac{1}{2} m_i v_i^2\right) = \Delta \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \Delta E_c^{Sistema}$$

En acuerdo con lo que se hizo para una partícula, si admitimos que a cada resultante aportan fuerzas conservativas y no conservativas, el trabajo de las fuerzas conservativas se podrá expresar como la variación de una energía potencial asociada (no olvidar el cambio de signo) y así si

$$\boldsymbol{f}_i^{R} = \sum_j \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{ij}}^{Cons.} + \sum_k \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{ik}}^{\boldsymbol{No\,cons.}}$$

donde el índice *j* enumera a las fuerzas conservativas que actúan sobre la partícula *i* y el índice *k* hace lo propio con las no conservativas, el trabajo de $\boldsymbol{f_i}^{\boldsymbol{R}}$ será

$$\int \boldsymbol{f_i}^{\boldsymbol{R}} d\boldsymbol{r_i} = -\sum_j \Delta U_j^{\,i} + \sum_k W_{ik}^{No\ cons.}$$

siendo $U_j^{\,i}$ la energía potencial asociada a la fuerza conservativa $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{ij}}^{Cons.}$.

De esta manera se pueden reorganizar las relaciones como

$$\sum_k W_{ik}^{No\,cons.} = \Delta E_c^{\,i} + \sum_j \Delta U_j^{\,i}$$

Si denominamos energía mecánica de un sistema a la suma de la energía cinética del sistema y las energías potenciales asociadas a las fuerzas conservativas actuantes sobre las partículas del sistema, es posible concluir que

$$\sum_{i,k} W_{ik}^{No\,cons} = \Delta E_M^{Sistema}$$

el trabajo de las fuerzas no conservativas modifica la energía mecánica de un sistema de partículas.

El lector habrá notado que prácticamente no hay una disparidad notable en el tratamiento de la energía mecánica de una partícula y la de un sistema. Sin embargo, si se pone en evidencia una diferencia fundamental entre partícula y sistema se notarán diferencias: para un sistema de partículas es posible diferenciar el interior del exterior y para una partícula (en el sentido de elemental) todo es exterior.

Veamos, por ejemplo, la energía cinética de una sistema. Según se indicó antes

$$E_c^{Sistema} = \sum_i^N \tfrac{1}{2} m_i v_i^2$$

donde las velocidades de cada partícula están referidas a un sistema de referencia inercial cualquiera. Si tales velocidades se expresan teniendo en cuenta el centro de masa del sistema:

$$\boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{V_{CM}} + \boldsymbol{v}_{i_{CM}}$$

de manera que $v_i^2 = V_{CM}^2 + v_{i_{CM}}^2 + 2\,\boldsymbol{V_{CM}}\ \boldsymbol{v_{i_{CM}}}$, la energía cinética se puede llevar a la forma:

$$E_c^{Sistema} = \tfrac{1}{2}\, M\, V_{CM}^2 + \sum_{i=1}^N \tfrac{1}{2}\, m_i\ v_{i_{CM}}^2$$

El primer término se denomina energía cinética del centro de masa y representa la descripción energética del sistema visto como un todo (desde el exterior). El segundo término se denomina energía cinética relativa al centro de masa y representa la descripción energética del interior del sistema.

En el mismo sentido, la energía potencial en un sistema se puede considerar como dos contribuciones: energías potenciales asociadas a fuerzas conservativas externas y energías potenciales asociadas a fuerzas internas. Las energías potenciales asociadas a fuerzas conservativas externas describen (a través de su variación cambiada de signo) el trabajo de las fuerzas conservativas externas de manera totalmente equivalente a las que se han descripto para una partícula. Análogamente las energías potenciales asociadas a fuerzas conservativas internas describen el trabajo de las fuerzas conservativas internas y es justamente ese trabajo lo que caracteriza al sistema como tal. Un conjunto de partículas constituye un sistema si se admite la existencia de algún tipo de influencia mutua. Si tal influencia entre partículas no existe, considerar que componen un sistema es un hecho puramente formal. Sin el trabajo de las fuerzas internas un sólido no mantendría su forma, ni un líquido su volumen, un elástico no se recuperaría de una deformación, etc., etc. A la reunión de las energías potenciales asociadas a fuerzas internas de un sistema se la denomina energía potencial interna o simplemente energía interna del sistema.

A esta altura de la discusión, es posible admitir como partícula a todo sistema cuyos términos energéticos internos (tanto en la energía cinética como en la potencial) permanecen constantes bajo cualquier circunstancia.

Si las fuerzas no conservativas también se clasifican en internas y externas se puede concluir que

$$W^{No\ cons.}_{Externas} + W^{No\ cons.}_{Internas} = \Delta E^{Sistema}_{M} = \Delta\left(E_c + U_{Potanciales} + U_{Interna}\right)$$

Resumiendo, el tratamiento energético de un sistema de partículas es completamente análogo al de una partícula y la diferencia se manifiesta en las contribuciones que describen el interior del sistema: el término de energía cinética relativa al centro de masa y la energía interna. Si los procesos que experimenta un sistema dependen de cambios y/o intercambios energéticos, para un sistema existen más variantes que para una partícula. Es decir, entregarle o quitarle energía a una partícula no necesariamente tiene las mismas consecuencias que hacerlo con un sistema. Un sistema aislado, por ejemplo, puede aumentar su energía cinética variando su energía interna; una partícula, no.

Síntesis conceptual

Los denominados teoremas de conservación son consecuencias directas de los Principios de la Mecánica. Especificando las circunstancias en las que evoluciona un sistema es posible aprovechar el valor de ciertas magnitudes pues, según sean las circunstancias, se puede demostrar que permanecen siempre iguales.

Al estudiar una partícula (para la cual todas las fuerzas que actúan sobre ella son externas) es posible demostrar que:

Si la resultante de las fuerzas aplicadas sobre una partícula es nula, su cantidad de movimiento se conserva.

Si la resultante de los momentos de las fuerzas aplicadas sobre la partícula es nula, el momento angular de la partícula se conserva.

La idea de trabajo mecánico surge para contribuir al diseño de máquinas o mecanismos encargados de desplazar objetos, aliviando la tarea del hombre.

La palabra trabajo tiene su origen en el *tripale* que era un conjunto de tres palos atados al cuello de los esclavos para forzarlos a realizar las tareas más pesadas y agotadoras. El trabajo de una fuerza es la magnitud que revela la posibilidad de que la influencia de un cierto cuerpo (fuerza) contribuya o no con el desplazamiento del tal cuerpo.

A partir de los Principios establecidos por Newton se puede demostrar que el trabajo de la resultante de las fuerzas sobre una partícula es la variación de su energía cinética y de ahí resulta que si la suma de los trabajos realizados por las fuerzas no conservativas aplicadas en la partícula es cero, la energía mecánica de la partícula se mantiene constante.

Se entiende por energía mecánica de una partícula a una cierta suma de funciones cuyas variaciones dan cuenta del trabajo realizado por las diferentes fuerzas aplicadas en la partícula.

Al estudiar sistemas de partículas se han generalizado los conceptos relativos a una partícula, encontrando algunas diferencias significativas en el momento angular y la energía mecánica:

El momento angular de un sistema de partículas se puede resumir a dos términos (el orbital y el intrínseco) y su conservación requiere (al igual que el de una partícula) que sea nula la resultante de los momentos de las fuerzas exteriores. La conservación del momento angular de un sistema no prohibe el intercambio entre la parte orbital y la intrínseca. Tal cosa amplía el panorama de procesos que pueden ocurrir con un sistema y que no suceden con una partícula (en el sentido elemental).

De la misma manera ocurre con la energía mecánica de un sistema de partículas. Para un sistema, la contribución cinética a la energía mecánica tiene dos términos y a su vez, la existencia de fuerzas conservativas internas aporta con un término denominado energía interna. Estas contribuciones son nuevas en relación a la energía mecánica de una partícula. La conservación de la energía mecánica está determinada por el trabajo que resulte de las fuerzas no conservativas (internas o externas) que estén aplicadas sobre el sistema. Si el trabajo de las fuerzas no conservativas resulta nulo, la energía mecánica del sistema se conserva y tal situación no impide el intercambio energético entre las diferentes contribuciones (cinéticas, potenciales e interna). Un sistema se puede desintegrar transfiriendo energía interna a energía cinética, una partícula (en el sentido elemental) no.

En este capítulo se han discutido las ideas que permiten establecer diferencias claras entre partícula y sistema de partículas. La introducción del calificativo de internas o externas para las fuerzas no es realmente transcendente pero el de conservativas y no conservativas según importe la trayectoria seguida al calcular trabajos, es novedoso.

Al incursionar en otras áreas de la física, el lector advertirá que los teoremas de conservación dan lugar a conceptos fundamentales que son generalizaciones de la cantidad de movimiento, el momento angular y la energía mecánica.

Juan era muy curioso. Desde chico. Todo le llamaba la atención y él le dedicaba mucha atención a todo. En su pueblo natal, un caserío del interior, incorporó todo lo que la infancia le ofreció. Su instrucción primaria fue un éxito total. Querido por todos **-**en virtud de su simpatía y soltura y del esfuerzo extraordinario que hacía para llegar a la distante escuela**-** siempre fue parte del cuadro de honor. El secundario lo hizo en una ciudad, también del interior, ayudado por una tía solterona que lo alojaba, lo alimentaba y con suaves y serios modales le implantaba la responsabilidad de progresar a través del estudio y la dedicación. En los rincones de la cocina, tía y madre cuchicheaban sobre sus respectivas expectativas de que Juan pudiera llegar a completar estudios universitarios. Ambas estaban totalmente dispuestas a sacrificar todo y con frecuencia se emocionaban al imaginar el futuro de Juan. Y claro, Juan se dio cuenta. Advertir que él era el depositario de tanto cariño y tanta esperanza lo fortaleció en sus propias aspiraciones y en poco tiempo quedó marcada a fuego su decisión de terminar con un título universitario en sus manos.

La alta casa de estudios fue la Universidad Nacional de la X y el título Licenciado en Periodismo. La ceremonia de graduación fue casi grandiosa. Se trataba de la primera promoción de la flamante Facultad de Periodismo (anterior Escuela Superior de Periodismo) que surgiera luego de acaloradas discusiones académicas en el Consejo Superior de la histórica universidad.

No transcurrió mucho tiempo para que Juan fuera contratado en una emisora televisiva local y, con el seudónimo de Diego Armando, se estuviera frotando nerviosamente las manos esperando la señal del director para salir al aire. La luz roja de "EN EL AIRE" se encendió y Juan inició la transmisión.

- Immmpreeeesionannnnte la multitud reunida, señora, en la plaza Moreno con la **intencionalidad** de asistir al **terminamiento** de la **completación** de la Catedrallllll. **Sho** le diría, estimado telespectador, **de que** es difícil poner en términos lingüísticos la **emotividad** del ambiente. Si **sho tendría** que comparar con algo, diría que es una final de campeonato mundial. La **espectación** es totalllll. La catedral está **muy bellísima** y la ceremonia ya va a empezar...

Madre y tía de Juan lloraban silenciosamente frente a la pantalla viendo la **concretación** de sus sueños y al cabo de la transmisión el director lo felicitó por la **profesionalitud** de su trabajo.

N. del A.: Toda semejanza con hechos de la realidad no es mera coincidencia.

Capítulo 4
Aplicaciones de la Leyes de Newton
Usos de los Teoremas de Conservación

Introducción

Veamos ahora de qué manera podemos aprovechar lo que se ha expuesto en relación a:

- el formalismo para describir movimientos que, proponiendo definiciones, establece las características de las magnitudes que representan el resultado de observaciones o experimentos,
- las Leyes o Postulados de la Mecánica que entablan relaciones entre las diferentes maneras de representar los hechos y circunstancias en que ocurren y
- los denominados Teoremas de Conservación que son las conclusiones inmediatas y muchas veces novedosas que se obtienen al admitir como verdaderas las relaciones establecidas en los postulados.

Vamos a enfocar la atención en un movimiento particular que es una buena base para elaborar modelos de sistemas complicados que van desde el comportamiento de las partes del motor de un automóvil hasta los procesos que ocurren entre átomos o moléculas que forman parte de un sólido. Además, vamos a analizar también un proceso simple pero fundamental: el choque entre objetos. El proceso de choque, como experimento controlado, permite extraer información sobre la constitución de los objetos que chocan, es decir permite estudiar cómo y con qué está armado un objeto. Tal información no sólo es útil desde el punto de vista tecnológico (piense el lector en relación a la seguridad en el transporte y cómo puede ser mejorada) sino también desde el punto de vista básico puesto que permite elaborar modelos sobre cómo está armada una molécula o un átomo o constituyente de átomo, etc.

4.1 - Movimiento oscilatorio armónico simple

La segunda ley de Newton nos indica que, dependiendo de las fuerzas que actúan sobre una partícula, su movimiento exhibirá diferentes características. Claro que esto incluye la posibilidad de que las fuerzas actuantes se compensen (sumen al vector nulo) y así la partícula no presentará variaciones en su movimiento. De esta manera y recordando que las fuerzas surgen por acción a distancia y/o por contacto con otras partículas, en los diferentes lugares que una partícula puede ocupar en un espacio donde existen otras partículas (o conjuntos de éstas) se producirán diferentes efectos en el movimiento de la que estamos estudiando. En algunos puntos del espacio la resultante de las fuerzas será nula y en otros no. Es más, en un cierto punto la resultante puede ser nula y en los puntos vecinos, no serlo; eso también podría ocurrir por regiones o zonas del espacio y entonces, las diferentes variantes son muchas y el lector podrá imaginar una gran cantidad de situaciones.

Imaginemos, como ejemplo, una región de tal manera que al colocar una partícula en un cierto punto de la región, la resultante de fuerzas sobre ella es nula y que además en los puntos vecinos, no sea así. Se denomina posición de equilibrio al punto particular en el cual las fuerzas se cancelan. Las posibilidades de movimiento de la partícula en tal región del espacio no son muchas: si al apartarse del punto de equilibrio surgen fuerzas cuya resultante termina apuntando hacia el punto de equilibrio, la partícula se moverá en el entorno de tal punto y si surgen fuerzas cuya resultante apunta hacia afuera del punto de equilibrio, la partícula se alejará del mismo (y probablemente de la región). En el primer caso se dice que la resultante es de tipo restitutiva y el movimiento se circunscribe a la región vecina al punto de equilibrio. En el segundo se dice que la resultante no es restitutiva y el movimiento no es localizado. La palabra restitutiva viene a indicar la posibilidad de recuperar la situación de equilibrio.

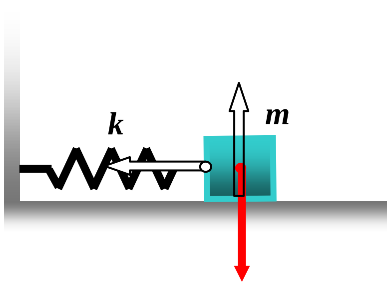
Tal vez el lector no advierta a dónde se apunta con esta introducción. Veamos si es posible justificarla en otros términos. Las Leyes de Newton nos proveen las herramientas necesarias para describir el movimiento de cualquier partícula en términos del conjunto de influencias a las que está sometida por el medio que la rodea (bah, la resultante de las fuerzas). Así, se pueden discutir diversas situaciones simples como el tiro oblicuo y el deslizamiento sobre varios tipos de superficies. La segunda Ley, en particular, nos indica claramente que si conocemos o hacemos una buena estimación de las fuerzas que actúan sobre una partícula, sabremos predecir su trayectoria y la sucesión de velocidades que la partícula adquiere durante el estudio. De la misma manera, determinando lo mejor posible la trayectoria de una partícula y la secuencia de velocidades podremos hacer buenas indicaciones del resultado de las fuerzas, es decir, de la manera con que el medio influye sobre la partícula. Todo esto parece obvio de la simple lectura de la Segunda Ley, pero nunca está de más refrescar los conceptos: un observador inercial puede establecer una relación simple entre las características del movimiento de una partícula y la influencia de los objetos que los rodean.

De esta manera es posible proponer formas de influencia o tipos de interacción entre partículas que permitan justificar el resultado de algún experimento en el que se estudió cómo se movía una cierta partícula. ¿El lector sabe o entendió claramente la explicación de cómo se descubrieron algunos planetas, antes de ser observados directamente con un telescopio?

En el marco de la discusión que hemos comenzado parece interesante intentar disponer de amplios y sólidos conocimientos de la relación entre la resultante de fuerzas y las características de movimiento para imaginar modelos de interacción en base a observaciones de tenor cinemático.

Se pueden enumerar algunos ejemplos sencillos y cotidianos. Veamos: ¿Cómo se mueve una hamaca? ¿Qué ocurre con el plato de una balanza de carnicería cuando el carnicero arroja un bife sobre ella para pesarlo? ¿Cómo se mueve una bolita dentro de un cuenco semiesférico? (¿y del lado de afuera, si da vuelta el cuenco?) ¿Cómo es el movimiento de la rueda de un auto (respecto al guardabarros por ejemplo) cuando se transita una camino liso y se agarra un bache? ¿Puso la mano sobre la tela de un parlante y sintió como vibra? ¿Notó que las cortinas se movían cerca de la ventana abierta y que dejan de moverse al cerrarla? ¿Sabe qué es un tentempié? ¿Qué es lo que pasa cuando tiemblan los vidrios porque pasó un auto o camión haciendo mucho barullo? Y tantas otras cosas... La característica común que tienen todos los movimientos mencionados es que para todos ellos existe una posición de equilibrio del cuerpo en cuestión. Es decir un punto del espacio donde se podría colocar el cuerpo y que no pase nada con su movimiento. También es común a todos el hecho obvio de que son movimientos limitados a una cierta región del espacio. El lector se preguntará si esto es válido para la rueda del automóvil. (Piense si realmente la rueda se aparta poco, mucho o del todo del entorno del auto). Los objetos que exhiban movimientos confinados a regiones limitadas del espacio en las cuales haya uno o varios puntos de equilibrio nos indicarán que el resultado de las interacciones sobre el objeto es del tipo restitutivo. Sin puntos de equilibrio no tiene sentido mencionar la palabra restitutivo, así que no cualquier movimiento confinado estará relacionado con esta discusión.

Vamos a analizar en lo que sigue el movimiento de una partícula frente a una resultante restitutiva. Lo vamos a hacer de manera simple y tal vez mencionando (al pasar) un caso representativo. La idea es imaginar una situación en la que una partícula se encuentre en un punto de equilibrio, admitir que al apartarse de dicho punto surge una resultante restitutiva y estudiar el movimiento que resulta. Es evidente que la resultante no puede ser una fuerza constante pues de ser así difícilmente apunte (sistemáticamente) hacia el punto de equilibrio. El ejemplo básico que citaremos será (ya que la fuerza no debe ser constante y encima debe ser de tipo restitutiva) el caso de una partícula sometida a la fuerza elástica de un resorte y eventualmente a otras fuerzas que se compensen de manera que la resultante sea la fuerza que aporta el resorte.



Sea una partícula de masa m, enganchada a un resorte de constante k, que puede ejecutar un movimiento rectilíneo sobre una superficie horizontal sin fricción. Imaginemos que la partícula está en un punto cualquiera (que no sea la posición de equilibrio del extremo del resorte). Las fuerzas actuantes sobre la partícula, en este caso, son tres: el peso de la partícula, la fuerza de contacto con la superficie horizontal y la fuerza de contacto con el extremo del resorte. Dado que el movimiento tiene dirección horizontal las contribuciones a la resultante en la dirección vertical deben compensarse (el peso y la de contacto - sin roce) y la fuerza que hace el resorte sobre la partícula juega el papel de resultante. Así, si la resultante tiene la forma:

$$\boldsymbol{F} = -k\ x(t)\ \breve{\boldsymbol{i}}$$

donde: se ha elegido el eje x a lo largo de la dirección del movimiento, el origen en la posición de equilibrio de la partícula (cuando el resorte no está deformado) y $x(t)$ es la posición de la partícula en el instante t y así mismo mide cuánto se deforma el resorte, haciendo uso de la segunda ley de Newton la aceleración de tal partícula tendrá únicamente componente en la dirección del eje x y será:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = -\frac{k}{m}\,x(t)\ \breve{\boldsymbol{i}}$$

Se advierte que la aceleración es diferente según el punto de la trayectoria donde se encuentre la partícula.

Explicitando la aceleración como $\boldsymbol{a} = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}\ \breve{\boldsymbol{i}}$

es posible establecer la igualdad $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}\,x(t)$ que conduce a la ecuación:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}\,x(t) = 0$$

Esta última ecuación es conocida con el nombre de ecuación del oscilador armónico simple y nos plantea el problema de encontrar una función solución $x(t)$ que represente las posiciones de la partícula.

Desde el punto de vista matemático, y en primer lugar, la función $x(t)$ debe ser por lo menos una función que al derivarla dos veces vuelva a surgir como tal; además, habrá dos constantes que se perdieron en las sucesivas derivaciones de la función y si existen diversas funciones que satisfacen la igualdad, "la" solución es la suma de todas (que también satisface la igualdad). Estas características de la función $x(t)$, que satisface la ecuación, se pueden conseguir usando las funciones trigonométricas como seno y/o coseno que también son conocidas con el nombre de funciones armónicas.

Admitamos que mediante una función seno o coseno (que por dos derivaciones se vuelve a repetir) podemos representar la solución y adecuemos la función a que tenga tantas constates como las que se pierden en las derivaciones y hagamos una propuesta para ver si satisface la ecuación y/o bajo qué circunstancias lo hace.

Propuesta:

$$x(t) = A\cos(\omega\, t + \delta)$$

Probemos:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -A\,\omega\ \mathrm{sen}(\omega\, t + \delta)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\,\omega^2 \cos(\omega\, t + \delta) = -\omega^2\ x(t)$$

Bien, la propuesta sólo es solución si y sólo si $A \neq 0$ y $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$.

Las constantes A y δ deben ajustarse a las condiciones iniciales, es decir a la posición y velocidad que poseía la partícula al momento de disparar los relojes (t = 0). Si denominamos x_o y v_o a dichos valores, se obtiene

$$x_0 = A\cos\delta$$

$$v_0 = -A\,\omega\,\mathrm{sen}\,\delta$$

de las cuales, despejando seno y coseno, elevando al cuadrado y sumando se obtiene:

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}$$

y si las dividimos resulta:

$$\mathrm{tg}\ \ \delta = -\frac{v_0}{\omega\ \ x_0}$$

De manera concreta, si una partícula de masa m es enganchada a un resorte de constante k e inicia su movimiento (rectilíneo) desde la posición x_o con velocidad v_o, las diferentes coordenadas de la partícula a medida que el tiempo transcurre están determinadas por la función:

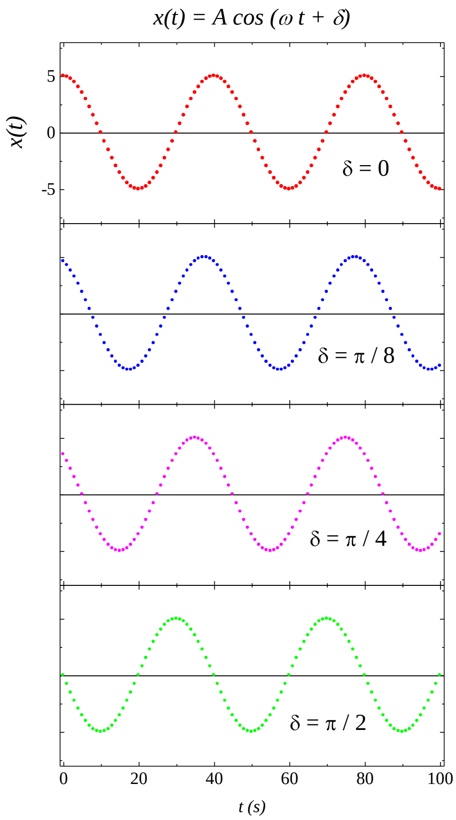
$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}\ \cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}\ \ t + \mathrm{arctg}(-\sqrt{\frac{m}{k}}\,\frac{v_0}{x_0})\right]$$

que de manera menos explícita se estila escribir tal como la propuesta de solución que hemos discutido, es decir:

$$x(t) = A\cos(\omega\, t + \delta)$$

acompañada de las correspondientes relaciones de A y δ con los valores de las condiciones iniciales x_o y v_o.

Las constantes que participan de esta última expresión llevan nombre especiales: A es denominada amplitud y representa todo lo que la partícula se puede alejar de la posición de equilibrio; δ es conocida como fase inicial ya que de la fase (o argumento) de la función coseno es lo que queda en $t = 0$. La fase inicial no es más que lo que permite iniciar la función coseno para que se acomode al movimiento que estamos describiendo. Es fácil imaginar valores de la fase inicial según cómo se haya iniciado el movimiento: si comenzó en la posición de equilibrio (habrá que suministrar una velocidad inicial) debe tomarse como $\pi/2$ para que la función coseno arranque de cero; si se inicia en un extremo de la trayectoria deberá se 0 (para que su coseno valga 1) y si ocurre cualquier otra cosa habrá que hacer la cuenta (de resultado menos evidente) con la expresión encontrada antes y que naturalmente proporciona como casos especiales los valores que hemos ejemplificado. Optar por diferentes condiciones iniciales es iniciar un



experimento de diferentes maneras y corresponde adecuar las posibles trayectorias determinando la fase inicial correspondiente. En el gráfico se representan trayectorias que difieren en la fase inicial (para unos pocos casos). El lector debería prestarle atención a la manera con que se inician las curvas (que describen posiciones en función del tiempo) y eventualmente pensar si lo distintivo de cada una se manifestará también en otras curvas como la de la velocidad o la de la aceleración.

Finalmente el símbolo ω fue usado para designar una constante que no depende de las condiciones iniciales del movimiento sino más bien de los elementos que definen el sistema que estamos estudiando: la constante del resorte y la masa de la partícula. El nombre habitual de tal constante (ya que una vez elegido el resorte y la partícula no cambia más) es el de frecuencia angular. Ni el nombre ni la letra que lo simboliza son de mi simpatía ya que lo primero induce a imaginar algo con características de ángulo o de manera de barrer ángulos y lo segundo es lo típico para indicar una velocidad angular que también induce a ir para el lado de las rotaciones y podría decir el lector qué cosa está rotando en el sistema partícula-resorte: nada. De todas maneras no vamos a cambiarlos y simplemente, al mencionarlos, seremos cuidadosos para evitar confusiones. Sigamos…

La denominación de ω como frecuencia está directamente relacionada con el papel que juega en la función coseno. La fase de la función coseno es una función directa del transcurso del tiempo (una función lineal del tiempo diría un riguroso) y como tal es una función creciente. La función coseno es una función periódica y así, sus valores deberán repetirse para ciertos instantes particulares contenidos en un dado intervalo. El hecho de que ω figure como elemento multiplicativo del tiempo le permite alterar el número de repeticiones en un dado intervalo. Al número de veces por segundo que se repite un evento se le llama frecuencia del evento, entonces, ω es una frecuencia y contiene información sobre la periodicidad del evento. En el caso que estamos describiendo entendemos por repetición del evento a que la partícula esté nuevamente en el mismo lugar y con la misma velocidad. En la

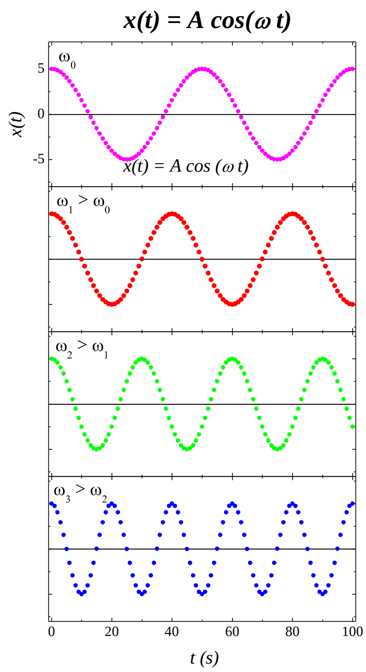


figura se puede ver el resultado de aumentar la frecuencia de un movimiento oscilatorio armónico simple y tal vez ayude a pensar este asunto de las repeticiones.

Sea T (denominado período) el intervalo entre dichos instantes de manera que si en el momento t la partícula estaba en un cierto lugar, en t+T repetirá en valor. Para que eso ocurra, la fases de la función coseno en esos instantes debe haber crecido en 2π, es decir:

$$\omega\,(t+T)+\delta = 2\pi + \omega\, t + \delta$$

de donde se deduce $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ o $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (como al lector más le guste).

Siendo las funciones coseno y seno funciones periódicas del mismo período se entiende que la velocidad de la partícula también se repetirá al cabo de T segundos. La frecuencia de repetición f del movimiento de la partícula es (por definición) la inversa del período y como se mostró, ω es 2π veces la frecuencia, de ahí el nombre de frecuencia angular.

El lector debería recordar que conocer completamente las funciones del tiempo que describen las secuencias de coordenadas de una partícula permite determinar (por derivaciones sucesivas) la velocidad y la aceleración de tal partícula. Así que para el caso que estamos analizando la descripción es completa al determinar la función *x(t)*.

Si una partícula sujeta a un resorte describe la trayectoria especificada en la función:

$$x(t) = A\cos(\omega\, t + \delta)$$

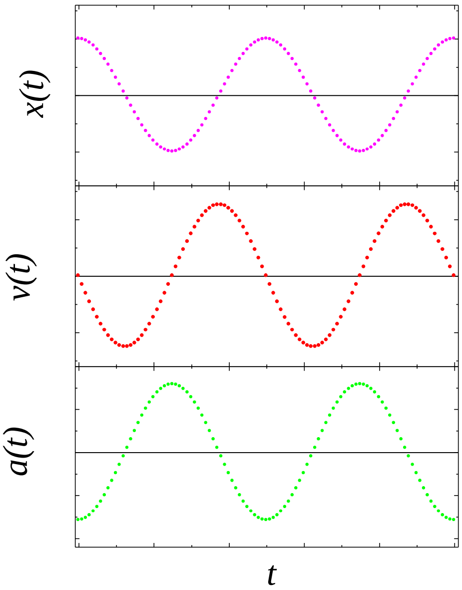
su velocidad será la función:

$$v(t) = -A\,\omega\,\mathrm{sen}(\omega\, t + \delta)$$

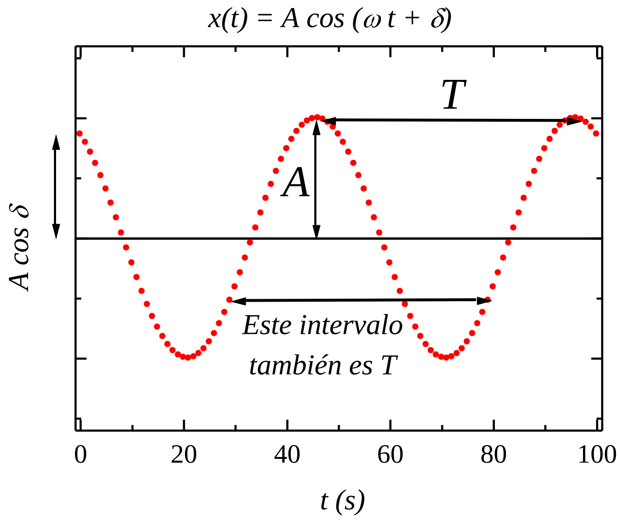
y su aceleración, la función:

$$a(t) = -A\,\omega^2\,\cos(\omega\, t + \delta)$$

Es medio tonto resaltar que la posición y/o la velocidad son función del tiempo, pero no lo es destacarlo particularmente para la aceleración. Esta última es diferente en diferentes instantes y tal vez sea éste un caso clásico de un movimiento con aceleración no constante. De las diferentes aceleraciones que la partícula experimenta, la de mayor intensidad de todas vale $A\ \omega^2$ (al llegar al mayor apartamiento de la posición de equilibrio, deteniéndose). La mayor rapidez de la partícula es $A\ \omega$ (al pasar por la posición de equilibrio).



En la figura se muestran las tres funciones posición, velocidad y aceleración, para que el lector haga un análisis comparativo del comportamiento en cuanto a máximos, mínimos, aumentos, disminuciones, etc. Las escalas verticales son arbitrarias.



En el gráfico que sigue se muestran elementos típicos del movimiento oscilatorio que ayudan a la identificación gráfica de la relación entre la fase inicial y la manera con que se inicia el movimiento, el intervalo que representa un período y la amplitud. En el gráfico se usó la posición del oscilador.

Siendo el movimiento oscilatorio armónico simple un movimiento con aceleración variable, la resultante de las fuerzas sobre la partícula es una fuerza variable. Es común proponer un enfoque energético en los estudios donde se advierten fuerzas no constantes ya que las funciones energéticas no tienen en consideración tal comportamiento.

Analicemos la energía mecánica de un oscilador armónico simple. Las contribuciones cinética y potencial son de la forma:

$$E_c = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2}\, m\, A^2\, \omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega\, t + \delta)$$

$$U_{el.} = \tfrac{1}{2} k x^2 = \tfrac{1}{2}\, k\, A^2\, \cos^2(\omega\, t + \delta)$$

(note el lector que cada contribución toma diferentes valores para distintos instantes)

Así resulta para la energía mecánica:

$$E_M = E_c + U_{el.} = \tfrac{1}{2}\, k\, A^2$$

(se usó la relación $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$).

La energía mecánica del oscilador armónico simple es constante y directamente proporcional al cuadrado de la amplitud del movimiento. Este resultado era esperable ya que no se han incluido en el estudio que hemos hecho ninguna fuerza no conservativa que haga trabajo.

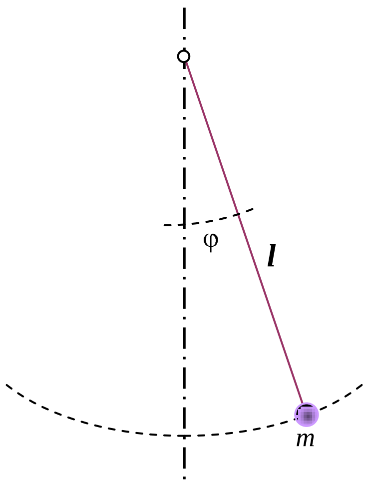
Toda partícula para la cual la Segunda Ley de Newton nos conduce a una ecuación de la forma:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + Cte\ x(t) = 0$$

con *Cte* una constante cualquiera positiva, efectúa un movimiento oscilatorio armónico simple, mantiene constante la energía (proporcional al cuadrado de la amplitud del movimiento) y se la denomina oscilador armónico simple. La constante *Cte* contiene información sobre las características del sistema que está oscilando y determina el período de repetición del movimiento.

Veamos ahora otros ejemplos de osciladores armónicos simples como el péndulo simple o una partícula colgada de un resorte.

Un péndulo simple es un sistema consistente en una partícula de cierta masa *m*, suspendida de una cuerda (con masa despreciable) de longitud *l*. Tal sistema admite una posición de equilibrio (que será tomada como el origen del sistema de coordenadas para hacer la descripción) y pequeños apartamientos de la posición de equilibrio (grandes también, pero no los vamos a estudiar) inducen un movimiento periódico en torno a la posición de equilibrio. La posición de equilibrio se consigue cuando la dirección de la cuerda es la de la vertical del lugar. Tomemos un sistema de coordenadas cartesianas con origen en la posición de equilibrio, eje *x* horizontal apuntando hacia la derecha y eje *y* vertical apuntando hacia arriba. Las fuerzas que actúan sobre la partícula son dos: la que hace la cuerda por contacto y el peso de la partícula. Llamemos φ al ángulo que forma la cuerda



con la vertical cuando la partícula está en una posición cualquiera de coordenadas x e y (fuera de la posición de equilibrio). La segunda Ley de Newton se puede expresar entonces como:

$$\sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{F_i} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{P} = -T\,\text{sen}\varphi\,\breve{\boldsymbol{i}} + (T\cos\varphi - m\,g)\breve{\boldsymbol{j}} = m\,\boldsymbol{a}$$

De esta manera, la aceleración tiene dos componentes:

$$a_x = -\frac{T}{m}\,\text{sen}\,\varphi = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

y

$$a_y = \frac{T}{m}\cos\varphi - g = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

donde las coordenadas de la partícula satisfacen la ecuación $x^2 + (y-l)^2 = l^2$ (circunferencia de radio l con centro en el punto de coordenadas $(0,l)$).

En las cercanías de la posición de equilibrio la fuerza T que aplica la cuerda es prácticamente del mismo valor que el peso P, cos φ es muy próximo a 1 y sen φ está bien aproximado por x/l. De esta manera la ecuaciones toman las formas:

$$a_x = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{T}{m}\,\text{sen}\,\varphi \approx -\frac{mg}{m}\,\frac{x}{l}$$

$$a_y = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{T}{m}\cos\varphi - g \approx \frac{mg}{m}1 - g \approx 0$$

por lo que sólo es significativa la ecuación:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l}x$$

Resumiendo, si el péndulo es levemente apartado de su posición de equilibrio, la partícula describe un movimiento (bien aproximado por una sola coordenada) que satisface la relación:

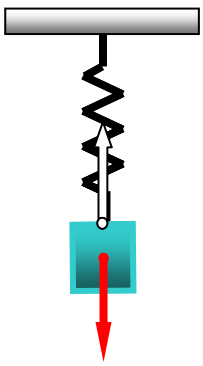
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{g}{l}x=0$$

Entonces, el péndulo efectúa un movimiento oscilatorio armónico simple de frecuencia $\omega^2=\frac{g}{l}$ y en consecuencia su período es únicamente dependiente de la longitud de la cuerda:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Si el péndulo es apartado bastante de la posición de equilibrio, lo que hemos analizado ya no tiene validez. y la situación es algo más complicada.

Veamos ahora el caso de una masa *m* colgada de un resorte de constante *k*. Este sistema tiene una posición de equilibrio determinada cuando la fuerza que aplica el resorte iguala al peso de la masa *m*. Tomando un sistema de coordenadas con el eje *y* vertical hacia abajo, la coordenada de equilibrio y_e es tal que $k(y_e-y_0)=m\,g$ donde y_o es la coordenada del extremo del resorte si no tiene nada colgado. Apartando la masa hasta la coordenada *y*, las fuerzas aplicada sobre ella serán (recordando que el eje apunta hacia abajo):



$$-k(y-y_0)+m\,g=m\,a=m\frac{d^2y}{dt^2}$$

Si ponemos en evidencia cuánto se aparta la masa de la posición de equilibrio restando y sumando y_e, obtenemos:

$$-k(y-y_e+y_e-y_0)+m\,g=m\frac{d^2y}{dt^2}$$

Usando la igualdad que define la coordenada de equilibrio se llega a:

$$-k(y-y_e)-k(y_e-y_0)+m\,g=-k(y-y_e)=m\frac{d^2y}{dt^2}$$

Esta relación nos indica que la aceleración está determinada por lo que se apartó la partícula de la posición de equilibrio ($y-y_e$). Llamando, por ejemplo, u a dicho apartamiento y notando que $\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{d^2y}{dt^2}$ el movimiento se describe por la ecuación:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{k}{m}u=0$$

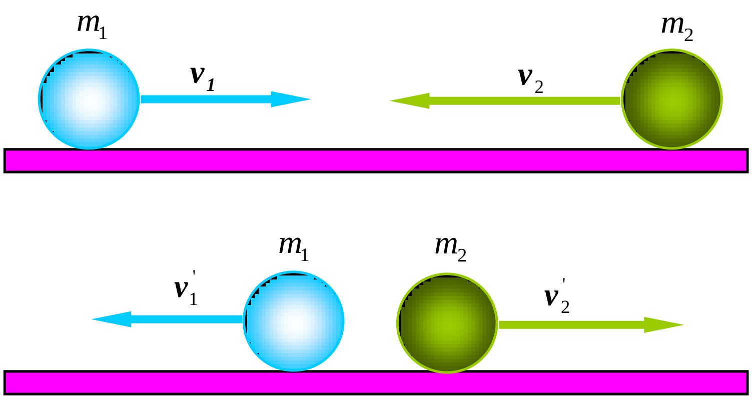
por lo que es un movimiento oscilatorio armónico simple de la misma frecuencia (y período) que el encontrado para cuando el movimiento se efectúa sobre un plano horizontal sin roce.

4.2 - El proceso de choque

De los posibles sistemas de partículas que se pueden estudiar, el de dos partículas es el más sencillo desde el punto de vista de la cantidad de constituyentes. Tal sistema posee una cantidad de movimiento de dos términos, un momento angular de dos términos y una energía con dos términos cinéticos y, eventualmente, términos de energías potenciales según la cantidad de fuerzas conservativas (internas y/o externas) que estén aplicadas sobre las dos partículas que lo constituyen. Si especificamos un poco más la situación en la que se puede encontrar el sistema de dos partículas, es posible plantear el estudio del sistema más sencillo posible en la situación más simple. Admitamos que el sistema de dos partículas que vamos a estudiar no está influido por el medio externo de manera que todo lo esperable que ocurra se deba a eventuales procesos entre las dos partículas que lo constituyen sin mediación alguna de cualquier otra cosa. ¿Simple no? Y bien… y ahora qué. ¿Qué puede ocurrir en un sistema así? Bueno, sea lo que fuere que ocurre entre las partículas, el hecho de haber considerado al sistema libre de toda influencia externa hace que la cantidad de movimiento del sistema permanezca constante ya que sólo fuerzas externas pueden alterar tal magnitud. Así, el proceso que ocurra con las dos partículas del sistema deberá ser tal que la variación de la cantidad de movimiento de una de ellas deberá ser compensada por un cambio de la cantidad de movimiento de la otra. En pocas palabras las partículas intercambiarán cantidades de movimiento entre ellas manteniendo el total. El lector no puede perder de vista que la cantidad de movimiento es una magnitud vectorial y el intercambio incluye dirección y sentido. **Llamaremos *choque o dispersión* al proceso mediante el cual dos partículas se transfieren cantidad de movimiento de manera que la cantidad de movimiento total se conserva.** Si el tal proceso de choque involucra además alguna transferencia energética, entonces, habrá que examinar las contribuciones a la energía mecánica del sistema para poder extraer alguna conclusión al respecto. Las consideraciones energéticas más simplificadoras imaginables (recordando que pretendemos estudiar un sistema de dos partículas en la situación más simple posible) son aquéllas donde no hay fuerzas no conservativas (para evitar el cálculo de trabajos teniendo en cuenta trayectorias). Así, la energía mecánica permanece constante. Los términos de la energía mecánica de un sistema de dos partículas son: dos términos cinéticos, dos términos potenciales (cada partícula influirá sobre la otra mediante una fuerza conservativa) y dos términos de energía interna (si lo que estamos llamando partículas no lo son en el sentido elemental, es decir, si admiten una constitución interna). Que me disculpe el lector pero le prometo que la próxima es la última simplificación. Si el proceso de choque ocurre en un dado punto del espacio no variarán las energía potenciales ya que éstas dependen sólo de las coordenadas y, como se dijo, todo se desarrolla en un mismo punto. Mientras dura el proceso (en ese tal punto del espacio) las coordenadas no cambian, son las del punto de choque. De esta manera lo que se puede inferir desde el punto de vista energético es que variará la energías cinéticas (durante el choque) a costas de las energías internas de las partículas o viceversa. Si finalizado el proceso, las partículas son exactamente las mismas que las que iniciaron el proceso, sus energías internas no se modificaron, la energía cinética del sistema no cambió durante el choque. Si, por el contrario, durante el choque hubo una modificación de las energías internas (las partículas se alteraron), habrá cambiado la energía cinética del sistema. En el primer caso se dice que el choque es elástico y en el segundo que es inelástico en algún grado según varíe mucho o poco la energía cinética (respecto a la disponible antes del choque). Piense el lector, ¿podría ocurrir un choque inelástico entre dos partículas elementales?

Resumiendo: se denomina choque al proceso más simple que puede suceder en un sistema aislado de dos partículas. En tal proceso se conserva la cantidad de movimiento del sistema y la disminución, conservación o aumento de la energía cinética del sistema determina el resultado del choque.

Si la energía cinética del sistema permanece constante el choque es denominado elástico y las partículas no se transforman como consecuencia de este tipo de choque. Es común llamar colisiones, dispersiones o desintegraciones a diferentes clases de choques en los cuales se mantinene o baja la energía cinética del sistema (la colisión y la dispersión, según haya o no contacto entre las partículas) o aumenta la energía cinética (la desintegración). Los experimentos de choque son una importantísima herramienta al momento de discutir si algo que se admite como partícula posee o no estructura interna. El desarrollo de grandes aceleradores de partículas cargadas apunta, entre otras cosas, a ese tipo de investigación.



4.3 - Choque elástico

Analicemos el caso de un choque frontal completamente elástico. Es decir, un golpe entre partículas, -que se puede analizar en una sola dimensión- en el cual las partículas intercambian cantidad de movimiento sin que se use energía para modificar a las partículas en sí mismas. Supongamos que $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ son las velocidades de las partículas (de masas respectivas m_1 y m_2)

justamente antes de iniciarse el choque. Inmediatamente después del choque, las partículas tiene velocidades $\boldsymbol{v'}_1$ y $\boldsymbol{v'}_2$. La figura esquematiza la situación.

Admitiendo que las fuerzas relevantes durante el choque son las que las partículas se ejercen mutuamente (porque las fuerzas externas son pequeñas frente a éstas o se cancelan o no existen) podemos plantear la conservación de la cantidad de movimiento del sistema para el instante inmediatamente anterior y el inmediatamente posterior al choque. Así:

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{v}_1' + m_2\boldsymbol{v}_2'$$

Si elegimos un sistema de coordenadas con un eje paralelo y del mismo sentido que $\boldsymbol{v}_1$, podemos representar la ecuación anterior mediante los módulos de las velocidades (que anotamos con v):

$$m_1\mathrm{v}_1 - m_2\mathrm{v}_2 = -m_1\mathrm{v}_1' + m_2\mathrm{v}_2'$$

(Piense bien el lector el significado de los signos y recuerde que las v representan módulos, es decir, son números positivos).

La elasticidad del choque nos indica que la energía cinética del sistema, antes y después del choque, va a ser la misma. Así, disponemos de otra igualdad como:

$$\tfrac{1}{2}m_1\mathrm{v}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\mathrm{v}_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1\mathrm{v}_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2\mathrm{v}_2'^2$$

que inmediatamente se resume en:

$$m_1\mathrm{v}_1^2 + m_2\mathrm{v}_2^2 = m_1\mathrm{v}_1'^2 + m_2\mathrm{v}_2'^2$$

Las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento y energía cinética nos permiten determinar los valores de las velocidades al cabo del choque, en función de las velocidades con que las partículas chocan (a veces se las denomina velocidades de salida y de entrada, respectivamente). Veamos...

Tomemos ambas ecuaciones y agrupemos según la masa de la partícula:

$$m_1(v_1 + v_1') = m_2(v_2' + v_2)$$
$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2)$$

La segunda ecuación se factorea como diferencia de cuadrados:

$$m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2(v_2' - v_2)(v_2' + v_2)$$

y la dividimos, miembro a miembro, por la primera. Entonces,

$$v_1 - v_1' = v_2' - v_2$$

o lo que es lo mismo:

$$v_2' = v_1 - v_1' + v_2$$

Reemplazando en la ecuación de cantidad de movimiento se puede obtener v_1' en función de v_1 y v_2. El resultado es:

$$v_1' = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_2$$

y usando este resultado resolvemos para v_2':

$$v_2' = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1 + \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_2$$

De esta manera es posible determinar las velocidades de las partículas como resultado del choque frontal elástico, siempre que se conozcan o midan las velocidades y las masas de las partículas que van a chocar, claro.

El análisis de las soluciones v_1' y v_2' en diferentes situaciones para las que se admite que ha ocurrido una colisión elástica, es sumamente instructivo. Veamos un caso sencillo: supongamos un choque de una pelotita contra una pared. ¿Cómo se adecuan las soluciones para adaptarlas a este caso?

Evidentemente la masa de una pared es enorme, comparada con la de la pelotita y si analizamos la situación desde un sistema de referencia en el piso, la pared está en reposo antes del choque. Así que asignándole a la pared el subíndice 2, (v_2=0) podemos reescribir las soluciones como:

$$v_1' = \left(\frac{1 - \frac{m_1}{m_2}}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \right) v_1$$

$$v_2' = \left(\frac{2\frac{m_1}{m_2}}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \right) v_1$$

De esta forma, despreciando la relación m_1/m_2 frente a 1 (por la gran cantidad de ceros que el resultado tendrá luego de la coma decimal y lo poco que modificará el 1) las relaciones nos llevan a que:

$$v_1' \approx v_1$$

$$v_2' \approx 0$$

Que es muy razonable. La pelotita rebota tal cual venía al choque y la pared ni se inmuta ¿El lector podría demostrar que si se le asigna a la pared lo subindicado con 1, las conclusiones son las mismas?

Un hecho curioso ocurre si las masas de las partículas son iguales (m_1= m_2=m). Manteniendo el caso en que una de las partículas está en reposo antes del choque (la indicada por 2, por ejemplo), las soluciones se simplifican a:

$$v_1' = \left(\frac{m - m}{m + m} \right) v_1 = 0$$

$$v_2' = \left(\frac{2m}{m+m}\right)v_1 = v_1$$

La interpretación del proceso es sencilla: la partícula que se movía antes del choque se frena totalmente (se queda "seca") y la que estaba en reposo sale disparada con la velocidad de la anterior.

Naturalmente, suponer que una de las partículas está en reposo antes del choque no es sólo que una hipótesis simplificadora sino que puede ser un caso real frecuente. Es claro que muchos choques ocurren entre partículas en movimiento (respecto al piso o carretera o calle...). En estas situaciones una comparación entre las masas de las partículas conduce a los siguientes resultados[1]:

para $m_1 << m_2$

$$v_1' \to v_1 + 2v_2$$

$$v_2' \to -v_2$$

cuando $m_1 = m_2$

$$v_1' \to v_2$$

$$v_2' \to v_1$$

y finalmente si $m_1 >> m_2$

$$v_1' \to -v_1$$

$$v_2' \to 2v_1 + v_2$$

[1] Se usarán flechas para indicar que los resultados son límites o tendencias.

4.4 - Choque no elástico

Si bien existen muchos procesos físicos que se pueden analizar como choques elásticos (sobre todo a nivel de física atómica y de partículas) la realidad cotidiana no muestra justamente estos procesos con frecuencia. Pensemos un poco... Un choque elástico es aquél en el cual no hay cambio del estado interno de los cuerpos que chocan. No lo hay, al comparar el estado interno de los cuerpos antes y después del choque. Durante el choque se admite que los cuerpos puedan sufrir modificaciones pero una vez finalizado el choque "todo es como al comienzo". Esto último se refiere estrictamente a las características de los cuerpos y no a la manera de moverse. En pocas palabras, los cuerpos que van al choque (elástico) son exactamente los mismos que los que salen del choque (idénticos a sí mismos: ni un pelo más ni uno menos; ni un átomo más ni uno menos; ni un grado de temperatura más ni uno menos). Por eso, los choques elásticos son procesos esperables entre partículas elementales o sus equivalentes. Porque sepa el lector que lo de *elemental* viene a que no hay constituyentes y por lo tanto no se puede hablar de cambio del estado interno y *equivalente* apunta a conjuntos de partículas tan sólidamente armados que resulta prácticamente imposible alterarlos. ¿Usted cree que si lo chocan estando parado en un semáforo, su auto y el del otro (seguramente un idiota) son los mismos que antes? ¿Usted imagina un sopapo en el cual no haya ni si quiera un mínimo intercambio de células o gotitas de humedad o moléculas entre mejilla y palma? ¿Pondría la mano en el fuego por una pelota de tenis sosteniendo que no ha cambiado absolutamente nada antes y después de un raquetazo?

Al analizar un choque entre objetos de la realidad, se supone que la interacción entre los cuerpos antes de que se toquen las superficies es nula y así, si existe la convicción de que los cuerpos no se alteraron en absoluto, la energía cinética del sistema deberá ser constante. No se puede perder de vista que durante un choque se restringe el análisis al intervalo entre un instante inmediatamente anterior al choque y un instante inmediatamente posterior al choque. Si por el contrario se puede afirmar que los cuerpos no son los mismos luego del choque, la energía cinética del sistema no permanece constante. En términos de los que se estuvo analizando, la ecuación de conservación de la energía cinética no es más válida. Difícilmente podamos llegar a una solución genérica, es decir al conocimiento de las velocidades resultantes del choque, como lo hemos hecho con el choque elástico. Sin embargo, existe la posibilidad de hacer un análisis particularizado de la situación. El conocimiento de alguna característica del sistema puede contribuir a encontrar una solución. Por ejemplo, supongamos que el sistema constituido por los dos cuerpos que van al choque es aislado o se comporta como tal. Es decir, no interactúa con cuerpos fuera del sistema o de hacerlo, las fuerzas asociadas a las posibles interacciones se cancelan entre sí. El movimiento del centro de masas de tal sistema es a velocidad constante (respecto de un sistema inercial cualquiera) y a su vez, el mismo centro de masas puede ser el origen del sistema inercial de análisis (u otro punto en reposo respecto de él). Conocer la velocidad del centro de masas en cierto instante es conocerla en cualquier otro instante y así podemos usar la relación:

$$\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{CM}} = \frac{m_1 \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{1}} + m_2 \boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}$$

para las velocidades antes del choque o

$$\boldsymbol{V}_{CM} = \frac{m_1 \boldsymbol{v}_1' + m_2 \boldsymbol{v}_2'}{m_1 + m_2}$$

para las velocidades luego del choque.

Teniendo la posibilidad (que no siempre se da) de elegir al centro de masas como origen del sistema inercial para hacer el análisis, no podemos despreciar la oportunidad ya que tal elección es en sí una medida de la velocidad del centro de masas: la velocidad del centro de masas respecto al centro de masas en 0. Así, el problema visto desde el centro de masa se plantea con las relaciones:

$$m_1 \boldsymbol{u}_1 + m_2 \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0}$$

$$m_1 \boldsymbol{u}_1' + m_2 \boldsymbol{u}_2' = \boldsymbol{0}$$

donde con $\boldsymbol{u}$ se han indicado las velocidades de las partículas relativas al centro de masas y **0** es el vector nulo. Es inmediato obtener:

$$\boldsymbol{u}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \boldsymbol{u}_1$$

$$\boldsymbol{u}_2' = -\frac{m_1}{m_2} \boldsymbol{u}_1'$$

Las partículas se acercan al centro de masas (origen de coordenadas) con velocidades $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$, chocan y se alejan del centro de masas con velocidades $\boldsymbol{u}'_1$ y $\boldsymbol{u}'_2$ (manteniéndose siempre como vectores opuestos). Si el lector imagina que $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$ tienen la misma dirección, está acertado; si imagina que $\boldsymbol{u}'_1$ y $\boldsymbol{u}'_2$ tienen la misma dirección, también está acertado y si ahora imagina que la dirección de $\boldsymbol{u}_1$ o $\boldsymbol{u}_2$ es la misma que la de $\boldsymbol{u}'_1$ o $\boldsymbol{u}'_2$, entonces se equivoca de lado a lado. Esto último no se deduce de ninguna de las ecuaciones usadas. La relación entre las direcciones está determinada por lo que ocurra durante el choque y no sé si se habrá dado cuenta que estamos comparando magnitudes evaluadas un instante antes y un instante después del choque y no lo que pasa entre esos instantes.

Las últimas ecuaciones nos permiten asegurar que las relaciones entre los módulos de las velocidades son iguales. Efectivamente, tomando el módulo de las velocidades y dividiendo se obtiene

$$\frac{\mathrm{u}'_1}{\mathrm{u}_1} = \frac{\mathrm{u}'_2}{\mathrm{u}_2}$$

Llamemos *e* a esta relación entre los módulos de las velocidades. Evidentemente *e* es un número positivo (es una división entre números positivos). Para acotar los posibles valores de *e* analicemos qué ocurre con la energía del sistema.

Como el sistema fue declarado aislado, la energía no puede aumentar. Si esto ocurriera, se violaría la aislación del sistema ya que algún cuerpo externo al sistema estaría haciendo trabajo sobre él. Así que la energía se mantendrá o disminuirá. Como se explicó al analizar el choque elástico el cambio energético del sistema estará determinado por los términos de energía interna y cinéticos. Si las partículas son las mismas antes y después del choque, los términos de energía interna se mantienen y así deberán mantenerse los términos cinéticos: choque elástico. Si las partículas se modifican, variarán los términos de energía interna y entonces lo harán los de energía cinética.

La energía cinética del sistema antes del choque es:

$$E_c^{Antes} = \tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 u_2^2$$

y usando la relación $m_1 \boldsymbol{u_1} + m_2 \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0}$ se obtiene:

$$E_c^{Antes} = \tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)$$

En forma análoga podemos evaluar la energía cinética después del choque:

$$E_c^{Desp.} = \tfrac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 u_2'^2 = \tfrac{1}{2} m_1 u_1'^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)$$

La relación de la energía cinética después del choque a la que se tenía antes del choque es

$$\frac{E_c^{Desp.}}{E_c^{Antes}} = \frac{u_1'^2}{u_1^2} = e^2$$

Los choques no elásticos, en contraposición a los elásticos, se caracterizan por la variación de la energía cinética del sistema. Es más, basta con soltar una pelota y hacerla chocar contra el piso para darse cuenta que la energía mecánica ha disminuido pues la pelotita no vuelve al nivel de donde fue soltada (claro que la pelota que sube no es la misma que la que bajó). La energía cinética disponible al cabo del choque es menor que la que se tenía inmediatamente antes del choque. En un choque no elástico de objetos, la energía cinética del sistema disminuye. Así, reanalizando la última ecuación podemos concluir que la cantidad positiva *e*, conocida con el nombre de coeficiente de restitución, debe ser menor o igual que la unidad (ya que $E_c^{Desp.} \le E_c^{Antes} \Rightarrow e^2 \le 1$). El coeficiente de restitución describe el grado de elasticidad (o no elasticidad, como más le guste al lector) de un choque entre cuerpos. Los valores extremos del coeficiente de restitución definen los llamados choque totalmente inelástico o choque plástico (*e*=0) donde se pierde toda la energía cinética del sistema y los cuerpos quedan en reposo relativo uno respecto del otro, y el choque elástico (e=1) donde no se pierde energía cinética y que ya hemos analizado. Valores intermedios del coeficiente de restitución marcan grados de elasticidad (o inelasticidad) del choque. Es fácil demostrar que la relación entre la variación de energía cinética y la energía cinética disponible (antes del choque) es

$$\frac{E_c^{Desp.} - E_c^{Antes}}{E_c^{Antes}} = e^2 - 1$$

Como se mencionó al principio, existen otros procesos que se pueden analizar como un choque como por ejemplo una desintegración (o explosión). Si un objeto en reposo se desintegra o explota, resulta claro que de algún lado surgió la energía necesaria para que los fragmentos tengan energía cinética (de la energía interna del sistema, claro). Esta clase de procesos se pueden imaginar como choques totalmente inelásticos analizados al revés: la situación inicial del choque es la final y la final, la inicial.

Síntesis conceptual

Si bien los sistemas mecánicos reales y su evolución son complicados de describir, es común iniciar su descripción a través de un modelo simple cuyas predicciones aproximen razonablemente los resultados obtenidos para el sistema real. Se admite que con algunas correcciones o agregados ad-hoc a una primera aproximación se pueden mejorar las predicciones y obtener un modelo más adecuado de la realidad. La trayectoria predicha para un tiro oblicuo admitiendo a la fuerza de atracción gravitatoria como constante y única responsable del fenómeno es un buen ejemplo. Si al modelo se le agrega la influencia del aire sobre el objeto, incluyéndola en la resultante como fuerza con las característica que se crean apropiadas, el resultado mejora y si se admite que el objeto puede desplazarse y rotar sobre sí mismo, la descripción puede mejorar aún más. La idea subyacente en lo que se ha mencionado es la destacar un método muy usado para describir la realidad y que se basa en ir complicando gradualmente lo sencillo. Para eso hay que conocer muy bien lo que se propone como sencillo o básico.

En este capítulo se ha hecho uso tanto de los Principios de la Mecánica como de los Teoremas de conservación para describir, por un lado, una clase particular de movimiento que surge como consecuencias de una resultante de fuerzas no constante y por el otro, un proceso fundamental que se caracteriza por la transferencia de cantidad de movimiento.

El oscilador armónico, que tal es el nombre de una partícula que efectúa un movimiento oscilatorio armónico simple, es el modelo más sencillo de todo aquello que está casi en una situación de equilibrio. Al imaginar que los cuerpos de la realidad están constituidos por partículas se admite (en base a evidencias experimentales) que las partículas no están en reposo sino más bien moviéndose alrededor de posiciones de equilibrio. Como primera aproximación se usa el modelo del oscilador armónico. De igual manera se haría una primera descripción de sistemas que vibran como cuerdas o membranas.

El proceso genérico denominado choque da cuenta de lo que ocurre en el sistema más simple de estudiar: el sistema aislado de dos partículas. Las circunstancias en las que ocurre el proceso permiten usar los teoremas de conservación y de ahí caracterizar el estado de cada partícula en diferentes instantes. Las consideraciones energéticas contribuyen a elaborar modelos en relación a los objetos que han participado del choque.

Soy el pasado, soy la memoria, soy el recuerdo
Soy lo que fue, soy esa historia, soy vericuetos
Soy aquello que te hizo, soy tu inventario, yo te contengo

Soy el presente, soy el ahora, soy ese hecho
Soy lo que es, soy el umbral y soy el proceso
Soy aquello que te hace, soy tu momento, yo te contengo

Soy el futuro, soy porvenir, soy el evento
Soy el mañana, soy la esperanza, soy el suceso
Soy aquello que serás, soy devenir y no te contengo
Yo soy así, yo no nací, sólo crecí, yo soy eterno

Capítulo 5

Las diferentes 'opiniones' sobre lo mismo

Introducción

La importancia del Primer Principio de Newton como declaración que afirma la existencia de observadores de privilegio para los procesos mecánicos, no sólo reside en la especificación de tales observadores sino también en lo que descarta. El Primer Principio es una necesidad que surge por el carácter de relatividad que el concepto de movimiento posee en esencia y la pretensión de describir las propiedades del medio en el que se desarrolla un movimiento a través del estudio de este último. Es por eso que se efectúa una selección previa de observadores: los que podrán satisfacer las pretensiones y los que no. Indicar que ciertos observadores no podrán conseguir caracterizar el medio a través de determinaciones mecánicas no es, de manera alguna, declarar que sus resultados no son válidos, sino decir que no serán útiles a tales fines. Si el lector lo recuerda bien, el Primer Principio se apoya en la existencia de una partícula libre de influencias (o fuerzas) que se usa como experimento de calibración para los diferentes observadores. Si bien no es posible asegurar que exista tal partícula, el estudio experimental de la manera con que los objetos de la realidad se aplican fuerzas entre sí, nos lleva a proponer situaciones donde, sobre un objeto, las fuerzas aplicadas por otros están muy bien compensadas y así, el objeto se comporta como casi, casi, casi libre. Se trata de apuntar, por ejemplo, al tan declamado experimento con una esfera (pretendidamente perfecta) rodando sin deslizar, sobre una mesa (pretendidamente plana) lo más horizontal posible e imaginar que las condiciones experimentales son llevadas al extremo de perfección. Un observador (que no muera al hacer vacío para eliminar la influencia del aire) declararía que si se pone a rodar la esfera, nunca se detendría sino más bien se movería en línea recta a velocidad constante. ¿Qué declararía del mismo experimento un observador que por ejemplo esté en órbita (no geoestacionaria) alrededor del planeta? Y, diría que eso de horizontal no está claro, y que si la esfera continúa en movimiento lo haría en una trayectoria circular, así que lo de velocidad constante no le constará.

De todas maneras, creyendo que se puede obtener una partícula libre con buena aproximación, se da pie a que exista un observador que determina para esa partícula una cantidad de movimiento constante (tal el contenido del Primer Principio).

Hasta qué punto nos apartamos de lo predecible en un sistema inercial de referencia, es el motivo de la siguiente discusión.

5.1 - La comparación entre diferentes observaciones

Veamos cómo es posible relacionar observaciones realizadas en distintos sistemas de referencia. Supongamos que a través de un sistema de coordenadas S representamos a un cierto observador O y con otro sistema de coordenadas S' a otro observador O' que se mueve, relativo a O, de cualquier manera. Es decir, el origen del sistema S' se desplaza en relación al origen de S y la orientación de los ejes x', y' y z' cambia a medida que el tiempo transcurre. Supongamos además que ambos observadores describen el movimiento de la misma partícula. El observador O marcará, en el instante considerado t, la posición de la partícula con un vector posición $\boldsymbol{r}$ construido en su sistema S como:

$$\boldsymbol{r} = x(t)\breve{\boldsymbol{i}} + y(t)\breve{\boldsymbol{j}} + z(t)\breve{\boldsymbol{k}}$$

La figura esquematiza la situación en un cierto instante. A su vez, el observador O' hará lo propio en su sistema de referencia S', expresando la posición de la partícula (en el mismo instante) como:

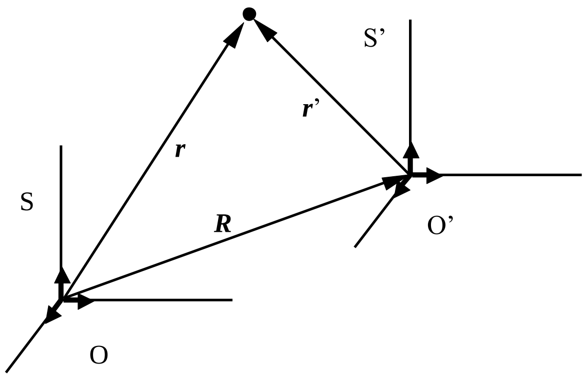
$$\boldsymbol{r}' = x'(t)\breve{\boldsymbol{i}}' + y'(t)\breve{\boldsymbol{j}}' + z'(t)\breve{\boldsymbol{k}}'$$

Si con el vector $\boldsymbol{R}$ el observador O indica la posición del origen de S' respecto a S como

$$\boldsymbol{R} = X(t)\breve{\boldsymbol{i}} + Y(t)\breve{\boldsymbol{j}} + Z(t)\breve{\boldsymbol{k}}$$

la relación entre las posiciones determinadas por los observadores O y O' es, evidentemente,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'$$



en todo instante.

Debe enfatizarse que, en virtud de lo genérico del movimiento del sistema de coordenadas S', el observador O advierte que los versores del sistema S' son diferentes instante a instante (los versores $\breve{\boldsymbol{i}}'$, $\breve{\boldsymbol{j}}'$ y $\breve{\boldsymbol{k}}'$ que mantienen el módulo cambiando la orientación relativa al sistema S son funciones del tiempo). Si los cambios de orientación de los versores $\breve{\boldsymbol{i}}'$, $\breve{\boldsymbol{j}}'$ y $\breve{\boldsymbol{k}}'$ están determinados por una manera de rotar descripta en S mediante una velocidad angular ω, las derivadas respecto al tiempo de los versores serán:

$$\frac{d\breve{\boldsymbol{u}}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \breve{\boldsymbol{u}}'$$

donde $\breve{\boldsymbol{u}}'$ representa a cualquiera de los versores $\breve{\boldsymbol{i}}'$, $\breve{\boldsymbol{j}}'$ y $\breve{\boldsymbol{k}}'$.

Siendo así, estamos en condiciones de evaluar la relación entre las velocidades determinadas por ambos observadores. De la relación entre posiciones se obtiene (derivando ambos miembros respecto al tiempo):

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}$$

Llamemos $\boldsymbol{V}$ al primer término de la derivación. El nombre común de este vector es el de velocidad relativa de S' respecto a S (-$\boldsymbol{V}$ es la velocidad relativa de S respecto a S'). Entonces

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \frac{d}{dt}[\, x'(t)\,\breve{\boldsymbol{i}}'(t) + y'(t)\,\breve{\boldsymbol{j}}'(t) + z'(t)\,\breve{\boldsymbol{k}}'(t)]$$

y recordando las derivación de un producto de funciones:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \frac{dx'(t)}{dt}\breve{\boldsymbol{i}}'(t) + \frac{dy'(t)}{dt}\breve{\boldsymbol{j}}'(t) + \frac{dz'(t)}{dt}\breve{\boldsymbol{k}}'(t) +$$
$$+ x'(t)\frac{d\breve{\boldsymbol{i}}'(t)}{dt} + y'(t)\frac{d\breve{\boldsymbol{j}}'(t)}{dt} + z'(t)\frac{d\breve{\boldsymbol{k}}'(t)}{dt}$$

Usando la expresión para la derivada de los versores indicada más arriba

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \frac{dx'(t)}{dt}\breve{\boldsymbol{i}}'(t) + \frac{dy'(t)}{dt}\breve{\boldsymbol{j}}'(t) + \frac{dz'(t)}{dt}\breve{\boldsymbol{k}}'(t) +$$
$$+ x'(t)\left[\boldsymbol{\omega} \times \breve{\boldsymbol{i}}'(t)\right] + y'(t)\left[\boldsymbol{\omega} \times \breve{\boldsymbol{j}}'(t)\right] + z'(t)\left[\boldsymbol{\omega} \times \breve{\boldsymbol{k}}'(t)\right]$$

y agrupando las coordenadas primadas con los versores primados para reconstruir el vector posición $\boldsymbol{r}$'

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \frac{dx'(t)}{dt}\boldsymbol{i}'(t) + \frac{dy'(t)}{dt}\boldsymbol{j}'(t) + \frac{dz'(t)}{dt}\boldsymbol{k}'(t) +$$
$$+ \left[\boldsymbol{\omega} \times x'(t)\boldsymbol{i}'(t)\right] + \left[\boldsymbol{\omega} \times y'(t)\boldsymbol{j}'(t)\right] + \left[\boldsymbol{\omega} \times z'(t)\boldsymbol{k}'(t)\right]$$

se tiene:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'$$

donde todos los vectores son nuevamente funciones del tiempo.

La comparación entre aceleraciones determinadas por los observadores O y O' será (apelando a las mismas consideraciones anteriores respecto cómo hacer la derivación):

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}']$$

y reagrupando:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}'$$

Evidentemente, las relaciones entre velocidades y aceleraciones de una misma partícula, determinadas por dos observadores cualesquiera O y O' son algo complicadas y es evidente también, que la complicación surge del hecho que un observador rota respecto al otro.

En la última relación, el término que depende de la velocidad de la partícula $2\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$ de denomina aceleración de Coriolis y el término $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$ es conocido como aceleración centrífuga. El último término no tiene un nombre particular.

5.2 – Observadores inerciales y no inerciales

Diferentes variedades de discusiones se pueden plantear en base los resultados obtenidos. Por ejemplo:

- Si el observador O es inercial, ¿es inercial O'? En otras palabras, si O observa una partícula libre, determinará que su velocidad es constante. ¿Qué observará O' de la misma partícula?
- Si para un observador la partícula estudiada está en reposo, ¿qué determina el otro?
- Si para un observador la partícula estudiada se mueve a velocidad constante, ¿qué determina el otro?
- Si un observador no se desplaza relativo al otro pero rota, ¿qué diferencias aparecen en la descripción del movimiento de la partícula estudiada?

La respuesta a estos interrogantes pasa por evaluar hasta qué punto el término que contiene a la aceleración relativa entre los sistemas y los que contienen a la velocidad angular de rotación y su derivada (la aceleración angular) hacen muy diferentes las respectivas aceleraciones obtenidas para la partícula que se estudió. Si por ejemplo el observador O es inercial y el O' está fijo a la superficie de nuestro planeta, el lector debería determinar el cambio de velocidad de traslación de nuestro planeta y la velocidad angular de rotación de la tierra y sus eventuales modificaciones (todo durante el tiempo que dure la observación de la partícula bajo estudio).

La simplificación que se obtiene al considerar observadores que no rotan uno respecto del otro es considerable. En efecto, si la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es nula en todo momento, también lo será la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ y entonces, las relaciones entre velocidades y aceleraciones se reducen a:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}'$$

y

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{a}'$$

de notable sencillez.

Y si además, el movimiento de un observador respecto al otro es a velocidad constante, la simplicidad es extraordinaria:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}'$$

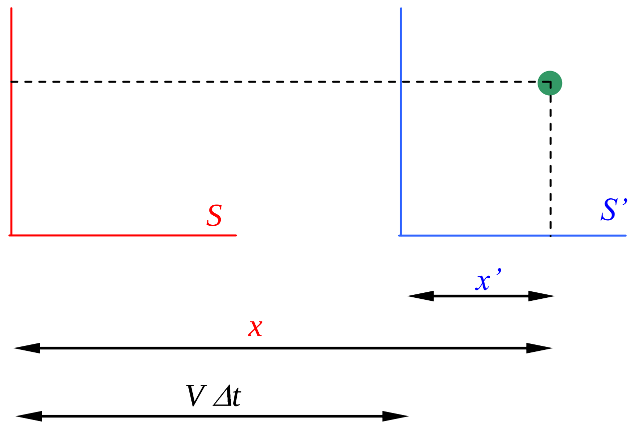
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$$

Discutamos sobre esto último.

5.3 - Transformaciones de coordenadas

No perdamos de vista que la discusión es sobre dos diferentes observaciones de una misma partícula. Si uno de los observadores determina que la partícula se comporta como libre (o está sometida a un cierto conjunto de influencias), es decir mantiene su velocidad constante (o presenta una cierta aceleración), el otro coincidirá plenamente ya que $\boldsymbol{V}$ ha sido supuesta constante. Así, resulta simple admitir que si el Primer Principio propone como verdadero la existencia de al menos un observador inercial, entonces hay muchos mas: todos los que se muevan a velocidad constante (sin rotar) respecto al que se admitió existir. Dado que la orientación de los ejes del sistema de coordenadas no influye en el establecimiento de las igualdades que estamos analizando, elijamos una orientación adecuada que nos permita establecer qué particularidades tiene la relación entre las coordenadas determinadas en los dos sistemas de referencia para que las conclusiones que obtiene uno de ellos sean las mismas que las obtenidas por el otro. Tomemos los respectivos ejes x y x' en la misma dirección y también por simplicidad propongamos que cuando el origen de S' pasa por el origen de S, los observadores disparan sus respectivos relojes.

Al cabo de un intervalo Δt marcado por los relojes en S, admitimos (convencidos por muchos experimentos) que los relojes en S' marcarán un intervalo $\Delta t' = \Delta t$. Si los relojes fueron disparados en $t_o = t_o' = 0$ de manera que los respectivos intervalos estén representados por los instantes t y t', las coordenadas en ambos sistemas se relacionarán de la siguiente manera (ver y pensar



sobre el esquema):

$$x' = x - V\,t$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

Estas relaciones se conocen con el nombre de transformaciones de Galileo y expresan una relación simple y obligatoria entre diferentes observaciones para que dichas observaciones conduzcan a las mismas conclusiones.

Aclaremos qué significa eso de “las mismas conclusiones”. Tratándose de dos sistemas inerciales, para ambos vale la Segunda Ley de Newton y lo que de ella de deduce: en ambos el impulso es el modificador de la cantidad de movimiento, el trabajo de la resultante es la variación de la energía cinética, el trabajo de las fuerzas no conservativas da la variación de la energía mecánica, el impulso angular produce el cambio del momento angular, etc. Pero -siempre los hay- no necesariamente coincidirán en los valores determinados para las magnitudes ni en los valores de los cambios de las magnitudes.

Veamos algunos ejemplos:

Si el impulso de la resultante de las fuerzas ha producido en S un cambio en la cantidad de movimiento, tal cambio es el mismo que el observado en S'. Efectivamente

$$\Delta \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v_2} - m\boldsymbol{v_1} = m(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}'_2 - \boldsymbol{V} - \boldsymbol{v}'_1) = m\boldsymbol{v}'_2 - m\boldsymbol{v}'_1 = \Delta \boldsymbol{p}'$$

Por otra parte, supongamos que la partícula observada se encuentra en un medio que la influye, siendo $\boldsymbol{F}_R$ la resultante de las fuerzas. Enfatizando que las influencias del medio sobre la partícula y la masa de la partícula son independientes del observador, el observador O encontrará, en virtud del trabajo realizado por la resultante, que la energía cinética de la partícula cambió en ΔE_c. Para O' la energía cinética deberá haber cambiado en:

$$\Delta E'_c = \tfrac{1}{2} m v'^2_2 - \tfrac{1}{2} m v'^2_1 = \tfrac{1}{2} m (v_2 - \boldsymbol{V})^2 - \tfrac{1}{2} m (v_1 - \boldsymbol{V})^2 = \Delta E_c - m\boldsymbol{V}\Delta \boldsymbol{v}$$

Evidentemente no determinan las mismas variaciones de energía cinética.

El lector, haciendo uso de las relaciones $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}'$ y $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$ (o las transformaciones de Galileo) entre sistemas inerciales podrá encontrar lo común y no común en las determinaciones de los respectivos observadores. Es recomendable analizar situaciones que involucran partículas más que sistemas de partículas pues en estos últimos las comparaciones son algo más complicadas.

5.4 - Limitaciones en el uso de las Leyes de Newton

Los objetivos de estos apuntes no son que el lector comprenda cabalmente lo que se va a discutir a continuación sino más bien que posea alguna información al respecto.

La discusión relativa a la validez de lo que la Leyes de Newton pueden predecir se basa en resultados experimentales en el campo de la óptica. Michelson y Morley, a fines del siglo pasado, hicieron un experimento para el cual la dirección y sentido de propagación de la luz respecto a un sistema inercial era de suma importancia. El experimento consistió en dividir un rayo de luz en dos rayos que se propaguen en direcciones perpendiculares y al cabo de hacerlos recorrer un camino muy bien determinado (de la misma longitud para ambos), juntaban los rayos nuevamente en un punto para estudiar las características de la imagen resultante. La idea era forzar a que uno de los rayos acompañe (a favor o en contra) el movimiento del laboratorio debido a la rotación de la Tierra y el otro (viajando en dirección perpendicular) no. La rapidez del rayo que viajara en la misma dirección que la de la velocidad del laboratorio (hacia el Este), evaluada con la relación $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}'$, debía resultar diferente que la del rayo viajante en la dirección perpendicular y la imagen obtenida al juntar dos rayos que habían recorrido el mismo camino con diferente velocidad sería diferente según cuán diferentes fueran las velocidades. Pues el resultado del experimento no mostró diferencia alguna entre las imágenes de manera tal que la velocidad de la luz o no satisface la relación de suma de velocidades o se propaga a la misma velocidad en todas direcciones y respecto a cualquier sistema de referencia o vaya a uno saber qué, pues no hubo manera de entender qué estaba pasando.

El experimento llevó a los físicos a una encrucijada: o los fenómenos ópticos no se pueden combinar con los mecánicos (note el lector que en la relación $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{V}$ es la velocidad del laboratorio –que es un conjuntos de objetos con masa que rota junto con la Tierra- $\boldsymbol{v}'$ es la velocidad de un rayo de luz relativa a ese laboratorio y $\boldsymbol{v}$ la velocidad resultante del rayo de luz respecto a un sistema inercial) o la relación $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}'$, que tan bien funcionara para tantos experimentos, no es más válida y hay que encontrar otra que permita describir por igual fenómenos mecánicos y ópticos. El experimento fue tan contundente que se terminó aceptando que la regla de composición de velocidades no era adecuada.

Se demoró bastante en hacer una propuesta adecuada pero cuando se la hizo, las consecuencias fueron tan novedosas que se dio lugar a lo que hoy se denomina Física Moderna.

En relación al concepto de velocidad o manera de propagarse en el espacio, hoy se admite (siempre en base a resultados experimentales) que, independientemente del proceso estudiado, los cambios ocurridos en una cierta porción del universo no influyen instantáneamente sobre otras regiones del universo. Podemos decir entonces que si no hay ningún hecho cuyas consecuencias se propaguen a velocidad infinita, entonces existe al menos un hecho cuyas consecuencias se propagan a la mayor de todas las velocidades posibles. En pocas palabras, se está admitiendo que existe una velocidad máxima de propagación de un fenómeno. Admitir tal cosa tiene consecuencias obvias y extrañas a la vez, porque si el fenómeno se propaga a la máxima velocidad respecto a algún observador, no podrá hacerlo a mayor velocidad respecto a otro observador, a lo sumo a la misma. De alguna manera estamos justificando el resultado del experimento de Michelson y Morley.

A. Einstein en 1905 (a la edad de 26 años) propone admitir que:

La velocidad de propagación de la luz en el vacío tiene el mismo valor para todos los observadores inerciales.

Las Leyes de la Física resultan ser las mismas en todos los sistemas inerciales de observación.

Estas declaraciones se conocen como los Postulados de la Teoría Especial de la Relatividad o Teoría de la Relatividad Restringida.

Convengamos de ahora en adelante que sólo nos referiremos a observadores inerciales ya que los postulados están exclusivamente enfocados sobre ellos y que cuando mencionamos la velocidad de propagación de la luz nos referimos a la propagación en el vacío.

Los postulados de la Relatividad Restringida indican que si un observador determina que un rayo de luz de propaga a la velocidad c y ese observador se mueve a velocidad V en la misma dirección y sentido respecto a otro observador, el último determinara para la velocidad del rayo de luz el valor c. Ésto, que parece extraño, muestra que no podemos combinar las velocidades como $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}'$ tal como se deduce de las transformaciones de Galileo entre coordenadas de distintos sistemas inerciales. No son válidas enntonces las relaciones:

$$x' = x - V\,t$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

sino que valen otras denominadas Transformaciones de Lorentz.

La Transformaciones de Lorentz son relaciones entre determinaciones en dos sistemas de coordenadas que se mueven a velocidad relativa V e involucran tanto las determinaciones de coordenadas como de intervalos de tiempo. Lo último es una consecuencia directa de admitir que existe una velocidad máxima y constante para todos los observadores. Veamos…

El concepto de velocidad es aquel que se introduce para vincular desplazamiento con el transcurrir del tiempo. En su manera más expresiva, la idea de velocidad debe ser presentada (para mi gusto) como $d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt$, es decir, asegurar que si algo posee $\mathbf{v}$ (no nula) se puede afirmar que al transcurrir el tiempo (dt) habrá desplazamientos ($d\mathbf{r}$). En ese sentido y retomando la discusión sobre la constancia e igualdad de la velocidad de propagación de la luz en el vacío para todos los observadores, si $\mathbf{v}$ es la velocidad de la luz, los diferentes observadores, que determinan diferentes desplazamientos, deberán determinar diferentes intervalos de tiempo.

Las Transformaciones de Lorentz que establecen cómo se relacionan las determinaciones en un dado sistema de referencia S con las de otro sistema S' son:

$$x' = \frac{x - V\,t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

y viceversa las de S’ con las de S:

$$x = \frac{x' + V\, t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Las Transformaciones de Lorentz contienen como límite (si se hace tender c a infinito) a las Transformaciones de Galileo.

Usando las Transformaciones de Lorentz veamos cómo resulta la composición de velocidades. Ajustemos (por simplicidad) los ejes x en la dirección del desplazamiento de una partícula.

Tomemos modificaciones diferenciales en las coordenadas y tiempo del sistema S’ que admitimos moverse con velocidad V respecto a S:

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$dy = dy'$$

$$dz = dz'$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Así la velocidad determinada en S será

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'} = \frac{v' + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'}$$

Esta relación de velocidades nuevamente admite (si $c \to \infty$) la relación de velocidades que fuera descartada por el experimento de Michelson y Morley.
Discutir otras consecuencias de la adopción de las Transformaciones de Lorentz como enlace obligatorio entre sistemas inerciales de referencia, para que las leyes determinadas en uno sean las mismas relaciones en todos los otros, es algo atrevido pues no se ha hecho acá otra cosa más que una presentación informativa. Discusiones más aventuradas sobre la denominada contracción de longitudes y/o dilatación temporal requieren para su comprensión de una introducción a lo que se entiende por simultaneidad, medida o medición de una magnitud y naturalmente de un análisis más detallado de las transformaciones de Lorentz.
Espero haber generado en el lector la curiosidad y el interés indispensable para que haga alguna investigación bibliográfica al respecto y/o consulte a especialistas haciendo buenas preguntas.

Síntesis conceptual

Las relaciones de causa-efecto que dan cuenta de los fenómenos de la realidad y conducen a las Leyes de la Física no pueden ser el resultado de los experimentos de un observador particular sino que deben ser constatadas por todos los observadores en condiciones de realizar los experimentos pertinentes. La creencia más profunda que sustenta a las denominadas Ciencias es la de la existencia de las Leyes. Se parte de que las Leyes existen y la tarea consiste en descubrirlas o encontrarlas. Como el método de búsqueda de las Leyes de la Física es el experimento y su representación en términos relativos a un dado observador, y por su parte una Ley debe manifestarse para todo observador (si no, no sería una Ley), debe existir alguna relación entre los observadores que constatan experimentalmente una Ley. Lo determinado por un observador no puede estar completamente divorciado de lo que otro concluya en relación a lo mismo, si lo mismo significa una Ley. La representación simbólica de la existencia de Leyes únicas para todo observador es lo que se conoce como transformaciones de coordenadas. Las transformaciones de coordenadas establecen relaciones que permiten darle al método científico un carácter universal.

En este capítulo se mostraron las relaciones que deben establecerse entre observadores inerciales para que las Leyes de la Mecánica establecidas por Newton puedan ser confirmadas por experimentos.