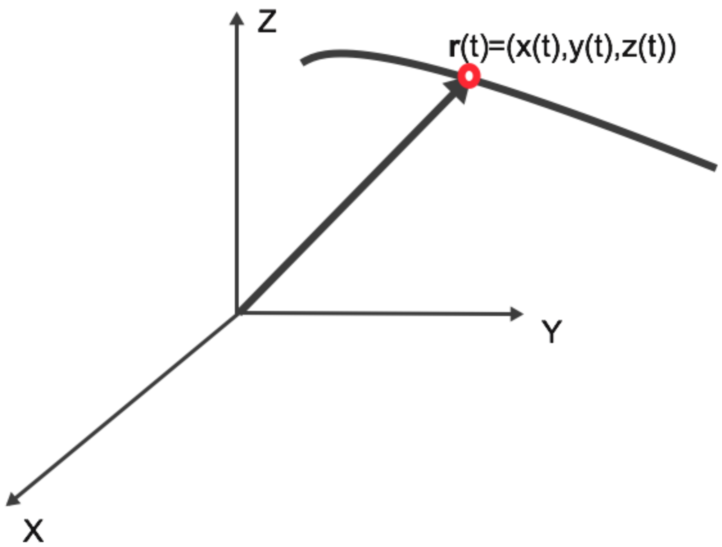
1 Cinemática

1.1 Sistemas de referencia posición, velocidad y aceleración

Para estudiar el movimiento de una partícula (cuerpo cuyas dimensiones son despreciables frente al tamaño de su trayectoria) nos hace falta un sistema de referencia, que normalmente tomamos como un sistema de ejes coordenados cartesianos ortogonales XYZ para determinar el vector posición de coordenadas $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ en el tiempo t , el cual determinamos con un reloj. La sucesión de puntos que ocupa en el espacio la partícula es su trayectoria. Comenzaremos estudiando la cinemática que es el estudio de los movimientos sin importar las causas. Es importante observar que como estamos estudiando física no relativista, el tiempo es una magnitud absoluta y la misma para todo punto del sistema de referencia y para todos los sistemas de referencia diferentes.



Para poder determinar el movimiento a futuro de una partícula se necesita además de la posición en un instante, su velocidad. Comenzamos por definir la velocidad media o promedio como el cambio en el vector posición durante un intervalo de tiempo

$$\boldsymbol{v}_m(t, t+\Delta t) = \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}, \tag{1}$$

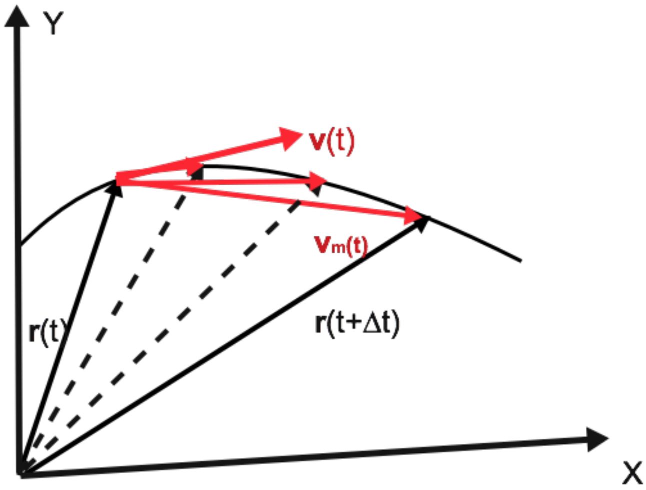
donde las unidades normalmente empleadas son $[\boldsymbol{v}_m] = \frac{m}{seg}, \frac{cm}{seg}, \frac{km}{h}$. La velocidad media no da información detallada de que sucede con el móvil en cada instante. Por ejemplo, si recorremos cierto desplazamiento en un dado tiempo muchas cosas diferentes pueden sucederle al móvil, como detenerse volver a arrancar o cambiar de sentido etc. Para saber lo que sucede en cierto instante debemos definir la velocidad instántánea

$$\boldsymbol{v}(t) \;=\; lím_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{v}_m(t, t+\Delta t) = lím_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t},$$

y como sabemos del análisis matemático dicho límite de cociente incremental es la derivada del vector posición

$$\boxed{\boldsymbol{v}(t) \;=\; \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \left(v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}, v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}, v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} \right)}$$

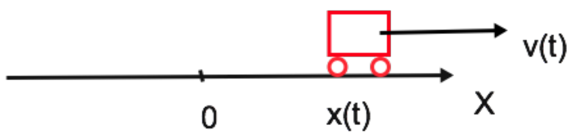
Es importante notar que el vector velocidad es tangente en cada instante a la trayectoria del móvil. Esto puede verse asumiendo un movimiento bidimensional



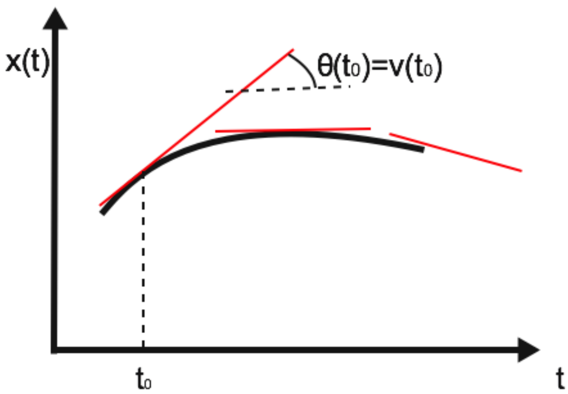
También puede definirse la rapidéz como la distancia recorrida (que es el módulo del desplazamiento) dividida el tiempo en recorrer dicha distancia

$$\boldsymbol{rapidez}(t) \quad = \quad lím_{\Delta t \to 0} \frac{|\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)|}{\Delta t}.$$

En el caso del movimiento unidimensional necesitamos sólo una coordenada, que tomamos con $x(t)$ y la componente $v_x(t) \equiv v(t)$ así tendremos



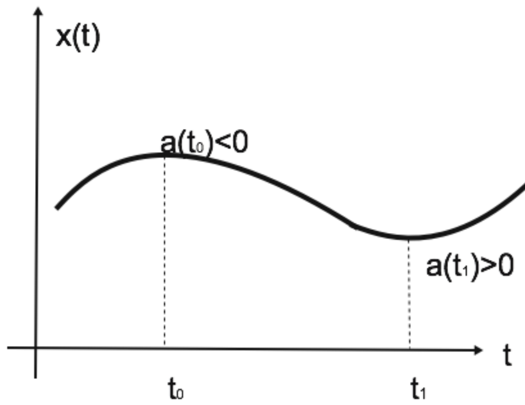
donde $x(t) \gtrless 0, v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \gtrless 0$, o sea el móvil puede estar a la derecha o izquierda del orígen y puede moverse acercandose o alejándose del mísmo. Es importante recordar, que usando la interpretación la derivada, $v(t)$ nos dá la pendiente de la curva $x(t)$ en un dado tiempo con lo cual podemos mediante la inclinación determinar el signo de la velocidad.



Asi como cambia la posición con el tiempo también lo hace la velocidad y por lo tanto definiremos la aceleración instantánea que es el cambio del vector velocidad en el tiempo

$$\boxed{\boldsymbol{a}(t) \;=\; \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = \left(a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}, a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt^2}, a_z(t) = \frac{dv_z(t)}{dt} = \frac{d^2z(t)}{dt^2}\right)}$$

donde en el caso de un movimiento unidimensional $x(t) \gtrless 0, v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \gtrless 0, a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \gtrless 0$, y la aceleración estará relacionada con la concavidad de la curva $x(t)$



Notemos que las unidades de eceleración son $[\boldsymbol{a}(t)] = \frac{m}{seg^2}, \frac{cm}{seg^2}, \frac{km}{hseg}$.

1.2 Movimientos rectilíneo uniforme y uniformemente acelerado

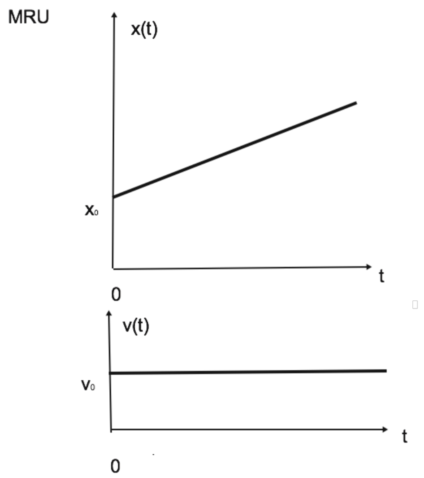
Cuando $a(t) = 0$ tenemos que la velocidad es constante y estamos en presencia de un movimiento rectilíneo uniforme(MRU)

$$\begin{aligned}
a(t) &= 0 = \frac{dv(t)}{dt} \\
&\Downarrow \\
v(t) &= \int 0dt = cte = v(0) \equiv v_0 \\
v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} \\
&\Downarrow \\
x(t) &= \int v_0 dt + cte = v_0 t + (x(0) \equiv x_0)
\end{aligned}$$

donde hemos aplicado el concepto de integral como operación inversa de la derivación. Finalmente tendremos para el MRU

$$\boxed{\begin{aligned}
a(t) &= 0 \\
v(t) &= v_0 \\
x(t) &= x_0 + v_0 t
\end{aligned}}$$

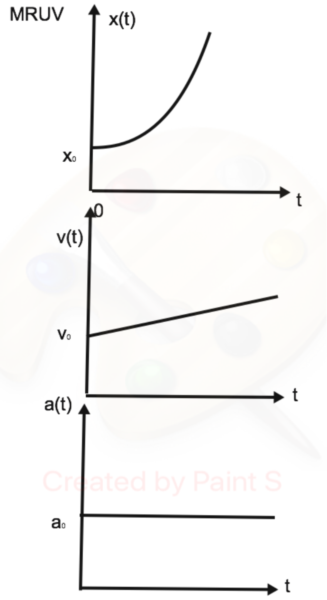
Las gráficas correspondientes son



Cuando $a(t) = a(0) = a_0$ constante en el tiempo estamos en presencia de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado(MRUA) y si volvemos a integrar en el tiempo como antes tendremos para el MRUA

$$\boxed{\begin{aligned} a(t) &= a_0 \\ v(t) &= v_0 + a_0 t \\ x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \end{aligned}}$$

Las gráficas correspondientes son



1.3 Movimiento en dos dimensiones. Tiro oblícuo

Si despreciamos el roce con el aire y suponemos que la aceleración de la gravedad (la que produce la atracción terrestre) es constante (lo cual es cierto a alturas despreciables con el radio terrestre) la caida o lanzamiento hacia arriba de un cuerpo es un MRUV a lo largo del eje Y con $a_y(t) = g = -9.8\frac{m}{seg^2}$, donde el signo negativo corresponde a que tomamos valores positivos hacia arriba. Por otro lado si además impulsamos horizontalmente al cuerpo con una velocidad inicial estaremos en presencia de un MRU a lo largo del eje X pues no hay aceleración horizontal. A la combinación de movimientos lo llamamos tiro oblícuo. Las ecuaciones serán

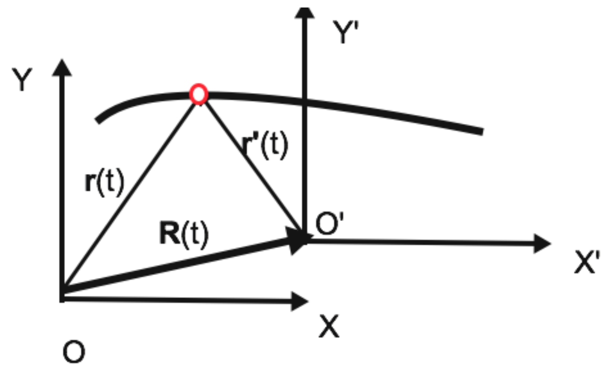
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(t) &= (x_0 + v_{0x}t,\ y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2), g = 9.8\frac{m}{seg^2} \\
\mathbf{v}(t) &= (v_{0x},\ v_{0y} - gt), \\
\mathbf{a}(t) &= (0, v_{0x}, -g)
\end{aligned}
$$

Hay algunos puntos notables a considerar en el tiro oblicuo. Uno es la altura máxima que se obtiene primeramente anulando la velocidad en y (ya que allí el cuerpo deja de ascender) , despejando el tiempo y luego reemplazando ese tiempo en $y(t)$ para obtenerla. El alcance que es el máximo valor de x alcanzado y para obtenerlo se despeja el tiempo anulando la altura (allí es donde el cuerpo toca el piso) y reemplazando en $x(t)$. Si qremos obtener la trayectoria debemos eliminar el tiempo entre $x(t)$ e $y(t)$ para obtener $y = f(x)$ que termina siendo una parábola.

Existe otro movimiento bidimensional importante que es el movimiento circular y analizaremos más adelante.

1.4 Movimiento relativo

Es importante poder conectar las observaciones sobre el movimiento de una partícula entre dos sistemas de referencia diferentes uno moviendose relativamente respecto del otro.



Los vectores de posición y el vector relativo que conecta O con O' se relacionan como

$$
\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}'(t) + \boldsymbol{R}(t),
$$

donde notamos que el tiempo es el mísmo en ambos sistemas de referencia. Si queremos relacionar la velocidad y la aceleración derivamos

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t) &= \boldsymbol{v}'(t) + \boldsymbol{V}(t), \\
\boldsymbol{a}(t) &= \boldsymbol{a}'(t) + \boldsymbol{A}(t).
\end{aligned}
$$

Normalmente estudiaremos el caso en que $\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{V}.t$ es decir la velocidad entre sistemas es constante independiente del tiempo y donde los orígenes coinciden en $t = 0$. Este caso corresponderá a la transformación entre sistema inerciales que discutiremos en dinámica y las transformaciones corresponden a las llamadas transformaciones de Galileo

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(t) &= \boldsymbol{r}'(t) + \boldsymbol{V}.t, \\
\\
\boldsymbol{v}(t) &= \boldsymbol{v}'(t) + \boldsymbol{V}, \\
\boldsymbol{a}(t) &= \boldsymbol{a}'(t).
\end{aligned}
$$

Existe el principio de relatividad que nos dice que las leyes físicas son las mísmas en todos lo sistemas de referencia inerciales e invariantes frente a las transformaciones de Galileo que los conectan.

1.4.1 Ejemplo

Una persona que viaja en un tren con velocidad $V = 60\frac{km}{h}$arroja una pelota con velocidad $v' = -5\frac{km}{h}$ en sentido contrario al movimiento del tren , con qué velocidad v ve una persona en el andén moverse a la pelota?

Si consideramos dos sistemas de referencia, uno en el tren y otro en el andén tendremos

$$
v = -5\frac{km}{h} + 60\frac{km}{h} = 55\frac{km}{h},
$$

esta sería la velocidad relativa de la pelota respecto al andén.