8.6 Hidrodinámica(fluidos en movimiento)

Habiendo analizado ya a los fluidos en reposo vamos a estudiar ahora a los liqudos en movimiento. Veremos que existen muchas circunstancias donde es importante entender las ecuaciones que gobiernan el movimiento de los fluidos como lo es el bombeo de agua a un tanque, la medición de la velocidad de un avión, hasta el simple hecho de regar con una maguera. Seguiremos el tratamiento de un fluido ideal por el momento, pero debemos agregar también la hipotesis de que el fluido tiene un flujo laminar y estacionario. Las lineas de corriente dentro de un fluido en movimiento son curvas tangentes en cada punto al vector velocidad que tiene un elemento de masa o volumen (estan relacionados como $dm = \rho dV$) en ese punto. Cuando el flujo es laminar las lineas le corriente no se cortan y se además si es estacionario en cada punto la velocidad mantendrá su valor en el tiempo). Existen circuntancias de mas compeljidad cuando el flujo es turbulento y no estacionario. Por ejemplo cuando habrimos una canilla y se genera un chorro de agua uniforme y de sección continua tenemos un flujo laminar, cuando comenzamos a cerrar la canilla llega un momento en que el fluido empieza a entrecortarse y el chorro deja de ser uniforme, esto es el flujo turbulento muy dificil de studiar.

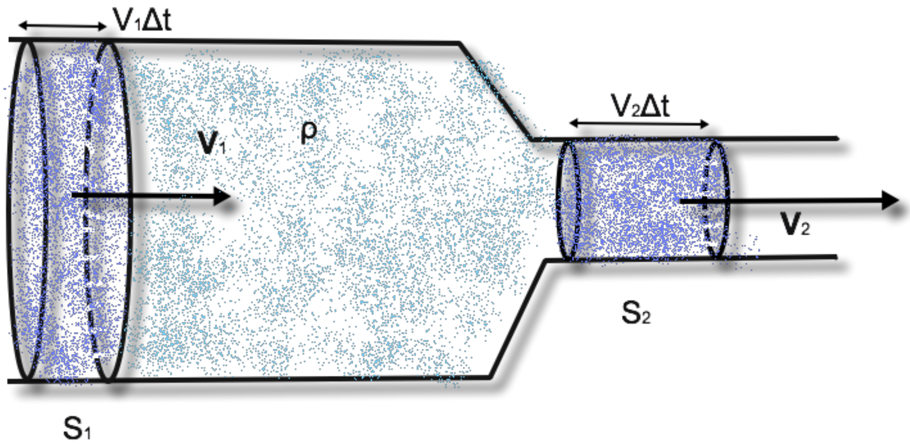
8.6.1 Principio de continuidad

Si asumimos que la masa se conserva y que el liquido es incompresible una porción de fluido de masa Δm que atraviesa en un tubo se sección S_1 con velocidad v_1 (que suponemos constante en toda la sección) durante un tiempo Δt , deberá desplazar en otra parte del tubo de sección S_2 una masa ingual de fluido a otra velocidad v_2 , siempre y cuando no halla ninguna fuente de fluido o sumidero en el trayecto intermedio. Es decir se deberá cumplir

$$
\begin{aligned}
\Delta m &= \rho \Delta V_1 = \rho \Delta V_2 \\
\Rightarrow \quad \Delta V_1 &= \Delta V_2 \\
\Rightarrow \quad \mathrm{v}_1 \Delta t \; S_1 &= \mathrm{v}_2 \Delta t \, S_2 \\
\mathrm{v}_1 S_1 &= \mathrm{v}_2 S_2
\end{aligned}
$$

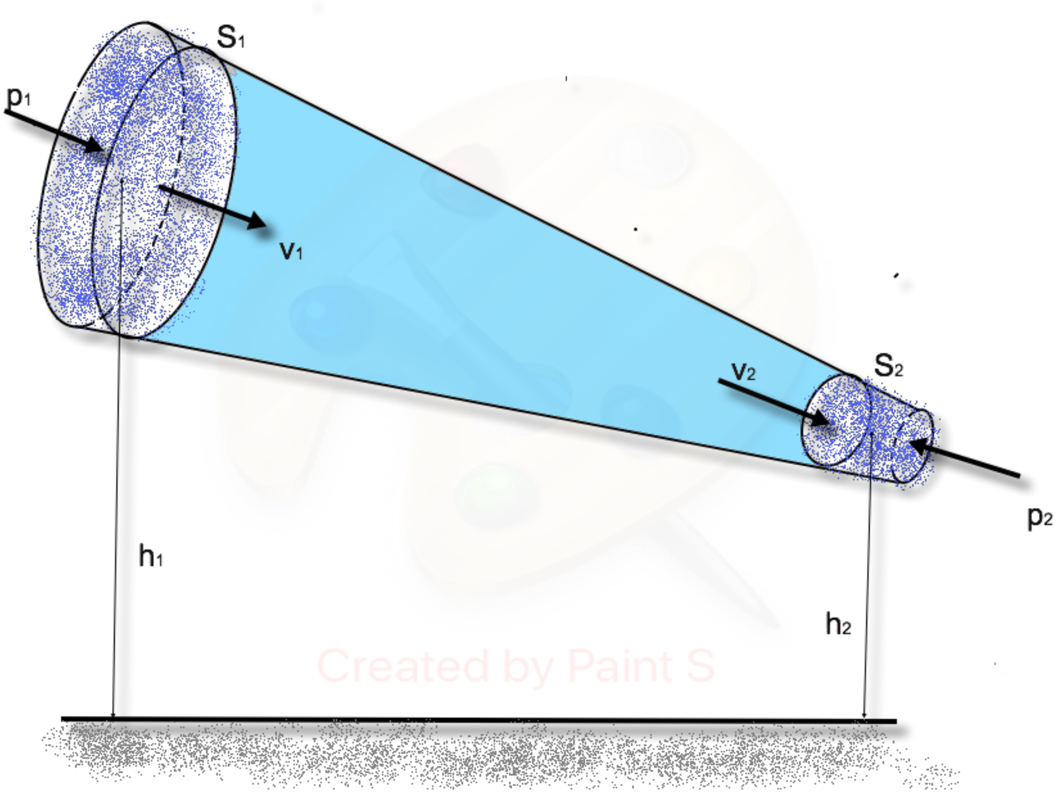
$$\boxed{\mathrm{v}_1 S_1 = \mathrm{v}_2 S_2}$$

donde vemos que hay un compromiso entre la sección y la velocidad, para un fluido ideal en flujo laminar, denominado principio de continuidad . Por esta razón cuando queremos regar reducimos la sección de la mangera para que el fluido salga con mayor velocidad $\mathrm{v}_2 = \frac{S_1}{S_2}\mathrm{v}_1 > \mathrm{v}_1$.



8.6.2 Teorema de Bernoulli

Daniel Bernoulli nacido en Basilea Suiza, (de allí viene Federer también) en 1700 enunció el teorema de trabajo-variación de energía mecánica para el caso de un fluido ideal en flujo laminar. El hecho de tratar con un fluido no viscoso hace que las fuerzas no conservativas, no realicen trabajo porque no hay fuerzas de roce o porque las fuerzas de presión son ortogonales al las paredes del tubo y no realizan trabajo, quedando solamente las fuerzas de presión externas que desplazan al fluido.



Aislemos imaginariamente un tubo de fluido de pequeñas secciones a lo largo de una línea corriente. Si una porción de fluido es desplazada Δx_1 en un punto 1 por las fuerzas de presión, se desplazará Δx_2 en un punto 2 debido a un posible cambio en la sección de las tubería, y se realizará un trabajo de las fuerzas de presión externas($F = pS$)

$$p_1 S_1 \Delta x_1 - p_2 S_2 \Delta x_2 \quad = \quad p_1 \Delta V - p_2 \Delta V$$

pues es un fluido incompresible. Ese trabajo producirá una variación en la energía mecánica. El efecto neto como puede verse de la gráfica es que un elemento de masa $\rho \Delta V$ cambie su energía mecánica en

$$\Delta E_M \quad = \quad \frac{1}{2}(\rho \Delta V)\mathrm{v}_2^2 + (\rho \Delta V) g h_2 - \frac{1}{2}(\rho \Delta V)\mathrm{v}_1^2 - (\rho \Delta V) g h_1$$

y de esta manera el teorema trabajo energía aplicado a dicha masa de fluido que sigue una línea de corriente desde 1 hasta 2 será (notese que no cambia el volúmen de fluido por ser incompresible)

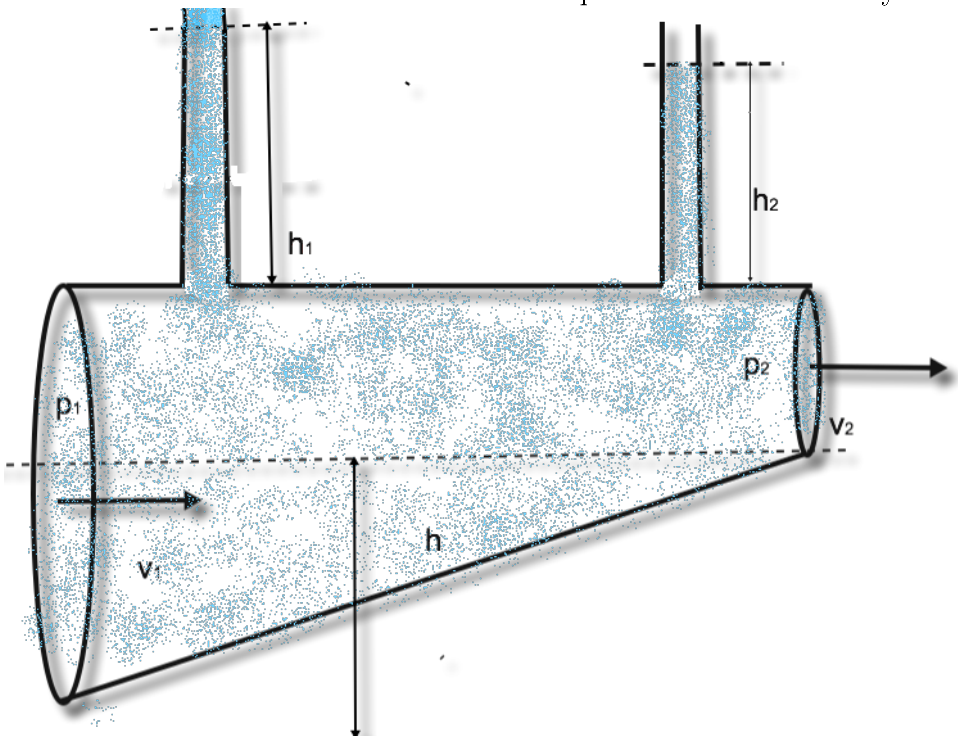
$$\begin{aligned} W = \quad p_1 \Delta V - p_2 \Delta V \quad &= \frac{1}{2}(\rho \Delta V)\mathrm{v}_2^2 + (\rho \Delta V) g h_2 - \frac{1}{2}(\rho \Delta V)\mathrm{v}_1^2 - (\rho \Delta V) g h_1 \\ p_1 + \tfrac{1}{2}\rho \mathrm{v}_1^2 + \rho g h_1 \quad &= p_2 + \frac{1}{2}\rho \mathrm{v}_2^2 + \rho g h_2 \end{aligned}$$

lo que no dice que a lo largo de una linea de corriente se cumple el teorema de Bernoulli

$$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho \mathrm{v}^2 + \rho g h \quad = \quad cte}$$

Es importante notar que vamos a despreciar el diámetro de una tuberia cuando consideremos su altura respecto a un cierto nivel cero cuando este es mucho menor que dicha altura y que la velocidad se mantiene constante en cualquier punto de una sección dada del tubo para un fluido no viscoso (como ya asumimos) en las condiciones mencionadas.

Otra cosa importante a mencionar es que las presiones que aparecen en la ecuación de Bernoulli son hidrodinámicas y son diferenrtes a las hidrostáticas que estudiamos en los liquidos en reposo. Supongamos el dispositivos de la figura donde en los tubos verticales el liquido está en reposo y por lo tanto la columna de liquido genera una presión hidrostatica en el borde del tubo horizontal donde debemos tener el liquido en movimiento. Que las alturas verticales sean diferentes está bien pues ahora la presión que genera cada tubo vertical se equilibra con la hidrodinámica en el horizonal que son diferentes en 1 y 2



Aplicando Bernoulli a la linea de corriente punteada horizontal

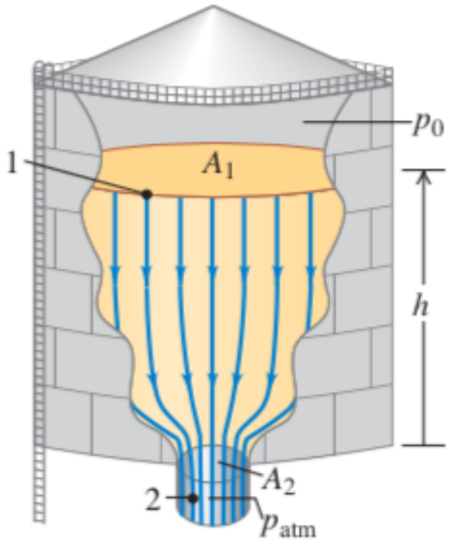
$$\begin{aligned}
p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \cancel{+h} &= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \cancel{+h} \\
p_2 - p_1 &= \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) < 0 \\
\rho g(h_2 - h_1) &= \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) \\
h_2 - h_1 &= \frac{1}{2g}(v_1^2 - v_2^2) < 0
\end{aligned}$$

lo que nos dice que cuando hay diferencia de velocidades entre los puntos hay diferencia de presión, por esto la llamamos hidrodinámica. Vemos que donde hay mayor velocidad hay menor presión y a este efecto se lo llama efecto Venturi y a los tubos verticales que usamos tubos de Venturi.

Antes de presentar algunos ejemplos y completando lo visto en la clase pasada es importante introducir la definición de caudal de un fluido que se transporta por una tuberia. El caudal es el volúmen transportado por unidad de tiempo y si consideramos un tubo de sección S y como en un fluido ideal la velocidad para todo punto de esa sección es constante tendremos $Q = \frac{dV_{ol}}{dt} = \frac{Sdx}{dt} = Sv$. Como se cumple el principio de continuidad $v_1 S_1 = v_2 S_2$ para dos puntos cualesquiera de la tuberia tendremos que $Q = Q_1 = Q_2 = cte$ como consecuencia de conservación de la masa y la incompresibilidad del fluido. Las unidades de caudal más usadas son $m^3/seg, litros/seg, cm^3/seg$.

Ejemplo 1

Determinar la velocidad de salida en un depósito de combustible como el que muestra la figura



Podemos aplicar el teorema de Bernoulli y de continuidad entre 1 y 2 con lo que tendremos

$$
\begin{aligned}
p_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h &= p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \\
v_1 &= \frac{A_2}{A_1} v_2
\end{aligned}
$$

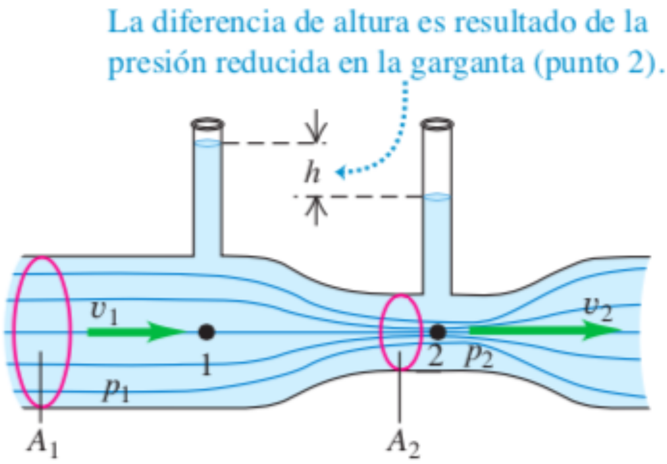
de donde si se cumple que $A_2 \ll A_1$ podemos aproximar $v_1 \approx 0$ y asi despejamos la velocidad en 2 en términos de la altura y las presiones como

$$
v_2 = \sqrt{2(p_0 - p_{atm}) + 2gh}
$$

notemos que si el tanque esta abierto a la atmósfera tendremos $p_0 = p_{atm}$ y entonces $v_2 = \sqrt{2gh}$ que es la velocidad de caida libre (sin roce o en el vacio) desde una altura h esto evidencia que estamos trabajando con un fluido no viscoso donde se conserva la energía mecánica pues la energía potencial de una partícula de fluido en 1 se ha convertido en cinética en 2.

Ejemplo2

Medición de velocidad con un tubo venturi. Supongamos el dispostivo de la figura



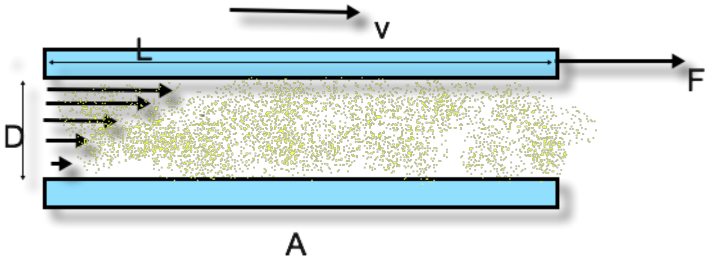
Si planteamos Bernoulli a una línea de corriente entre 1 y 2, usamos la ecuación de continuidad y la diferencia de alturas medida en los tubos de Venturi tendremos

$$\begin{aligned}
p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 &= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \\
A_1 v_1 &= A_2 v_2 \\
&\Downarrow \\
p_1 - p_2 &= \frac{1}{2}\rho v_1^2 (\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1) \\
p_1 - p_2 &= \rho g h \\
&\Downarrow \\
v_1 &= \sqrt{\frac{2gh}{(A_1/A_2)^2 - 1}}
\end{aligned}$$

la cual nos permite conocer la velocidad de entrada si conocemos las secciones y medimos la diferencia de alturas.

8.7 Viscosidad

Hasta el momento hemos supuesto que no habia roce entre dos capas de fluido y entre un fluido y el tubo que lo conduce. Sin embargo los fluidos reales presentan ese roce o lo que llamamos viscosidad. Podriamos determinar cuanto nos cuesta desplazar una lamina de área A y longitud L de vidrio con velocidad v sobre otra separada una distancia D y fija habiendo cierto fluido viscoso en el espacio entre ambas



y comprobariamos que es proporcional al área , a la velocidad e inversamente proporcional a la separación, siendo el coeficiente de proporcionalidad el llamado coeficiente de viscosidad η

$$F = \eta A \frac{v}{D}$$

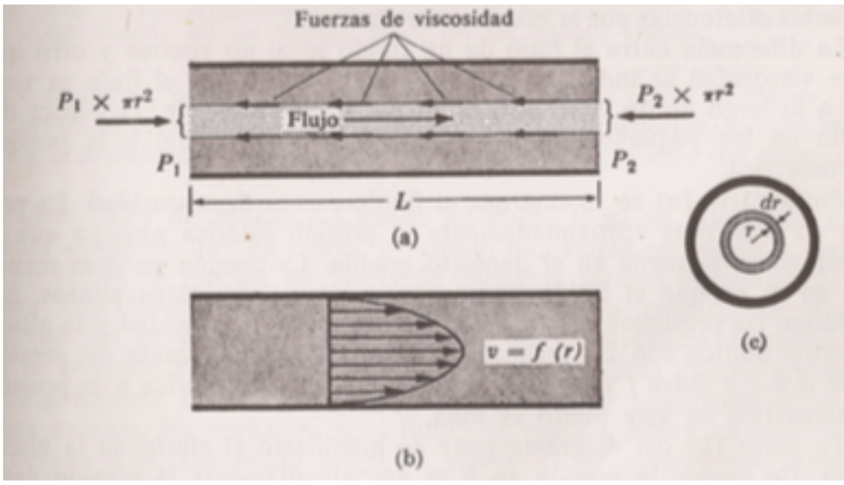
y esto puede entenderse porque las capas de fluido se van poniendo en movimiento desde velocidad cero (el que esta adherido a la superficie inferior) hasta la velocidad v (el que está pegado a la lámina superiror). El cociente $\frac{v}{D} = \frac{\Delta v}{\Delta y}$ que es el cambio medio de la velocidad entre la superficie inferior y superior respecto a la coordenada vertical lo llamamos gradiente de velocidad y en el caso en que la distancia entre placas tienda a cero este cambio medio se transformará en la derivada $\frac{dv}{dy}$ y así finalmente tendremos

$$\boxed{F = \eta A \frac{dv}{dy}.}$$

El coeficiente de viscosidad se mide en $[\eta] = \frac{N}{m^2} seg$ o mas adecuadamente por las magnitudes de las cantidades involucradas $\frac{dina}{cm^2} seg = poise$ o $cp = 10^{-2} poise, \mu p = 10^{-6} poise$ en honor del Físico frances Poiseuille. La viscosidad depende fuertemente de la temperatura disminuyendo con ésta. Por ejemplo la viscocidad del agua pasa de $1.8cp$ a $0.28cp$ desde $0^0 c$ a $100^0 c$.

8.7.1 Ley de Poiseuille

Ahora queremos obtener el perfíl de velocidades en la sección de un tubo de radio R. Antes cuando considerabamos al fluido sin viscosidad todos los puntos de una sección transversal de una tuberia tenian la misma velocidad, pero ahora la velocidad aumentará desde las paredes del tubo donde el fluido está adherido por la viscosidad hasta el centro donde tendremos la máxima velocidad. Ahora aunque el tubo tenga sección constante se presentará una diferencia de presión porque debe haber una fuerza neta que mueva al fluido para vencer al roce



y si consederamos un tubo imaginario de radio r y longitud L con eje en el centro del tubo que se nueve a velocidad constante $v(r)$ tendremos que las fuerzas de presión deben equilibrar a las viscosas

$$P_1 \pi r^2 - P_2 \pi r^2 = F = -\eta A \frac{dv}{dr} = -\eta \times 2\pi r L \times \frac{dv}{dr},$$

donde hemos aplicado la expresión anterior para el gradiente de velocidad con el radio y hemos agregado un signo menos porque ahora hay una disminución de la velocidad desde el centro hacia los bordes del tubo, y hemos considerado como "área de roce " A al área externa del tubo que es $2\pi r L$. De la expresión anterior integrando entre $r = 0, R$ finalmente se obtiene

$$v(r) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$

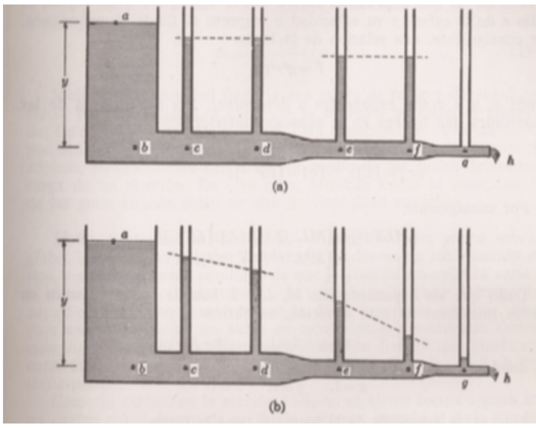
que se conoce como perfil de velocidades o Ley de Poiseuille. A partir de dicha ecuación es directo obtener el caudal de fluido (volúmen por unidad de tiempo) que circula por una tuberia de radio R y longitud L. Primeramente calculamos el volúmen que lleva un tubo imaginario de radio r y espesor dr durante dt, y el caudal $Q(r)$ que será el cociente de dicho volúmen con el tiempo

$$\begin{aligned} dV &= v(r)dt \times 2\pi r dr \\ Q(r) &= \frac{dV}{dt} = v(r)2\pi r dr = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)2\pi r dr \end{aligned}$$

e integrando entre $r = 0, R$ obtenemos el caudal total que transporta el tubo

$$Q = \frac{\pi}{8}\frac{R^4}{\eta}\frac{P_1 - P_2}{L}$$

donde vemos que el caudal depende de la diferencia de presión entre los extremos del tubo, la longitud del mísmo, su radio y el coeficiente de viscosidad del liquido transportado. Si no existen fuentes ni sumideros en el trayecto del fluido, que aún siendo viscoso se considera incompresible, el caudal debe mantenerse constante. Una de las consecuencia más notables de tener ahora un liquido real y no ideal es que no podemos aplicar Bernoulli (hay trabajo de fuerzas disipativas) y la situación de igualdad de presión en dos puntos de una cañeria de sección constante ya no es válida pues necesitamos diferencia de presión para mover el fluido ahora, así lo mostramos en la siguiente figura donde arriba tenemos un fluido ideal y abajo un viscoso



8.7.2 Ley de Stokes

Otra forma de medir el coeficiente de viscosidad es usando una dispositivo llamado viscosimetro de Stokes, que es un tubo vertical largo lleno de un fluido con viscosidad donde se suelta en la parte superior una esféra de radio R y ésta cae acelerandose por acción del peso hasta que la fuerza viscosa y de empuje hidrostático igualan al peso y la bolita alcanza una velocidad límite constante. Stokes comprobó que la fuerza viscosa tenía una expresión

$$F = \eta R v$$

donde v es la velocidad instantánea de la bolita, que alcanzará su valor límite constante v_L cuando

$$\begin{aligned} P &= F + E \\ \rho_{bolita}\frac{4}{3}\pi R^3 g &= \eta R v_L + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{liquido} g \\ \eta &= \frac{\left(\rho_{bolita} - \rho_{liquido}\right)\frac{4}{3}\pi R^2 g}{v_L} \end{aligned}$$

donde si medimos la velocidad límite v_L y sabemos las densidades y radio de la bolita se puede hacer una determinación experimental de η.