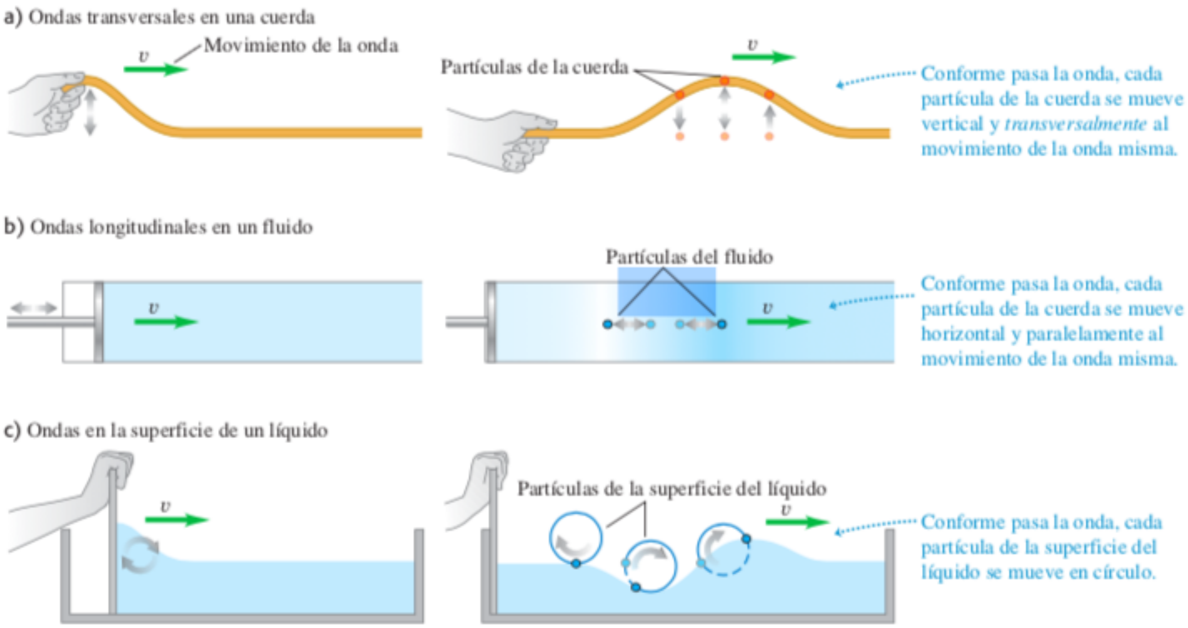
9 Ondas

Ya hemos estudiado anteriormente el movimiento oscilatorio armónico simple donde una partícula unida a un resorte describia una movimiento para pequeños apartamientos de la posición de equilibrio, cuya coordenada estaba dada por $x(t) = Acos(\omega t + \delta)$ donde A era la amplitud del movimiento y ω estaba relacionada con las propiedades del resorte y el valor de la masa de la partícula. Para pequeños apartamientos el resorte volvia a su posición de equilibrio si producirse en él deformaciones permanentes y deciamos que estabamos en su régimen elástico. La elasticidad o propiedad que tiene un cuerpo o sistema de partículas de ser deformado y regresar luego a su forma original es algo que se presenta tanto sólidos, liquidos y gases. Un podría pensar n una forma muy simplificada que los átomos y moléculas están unidos por pequeños resortes. Un efecto importante de la elásticidad de un medio es la generación de ondas mecánicas.

Una onda es una deformación producidad en un punto de un medio y que como las partículas de ese medio están conectadas entre si, se va transmitiendo a todo el medio viajando a una cierta velocidad que depende del tipo de medio y de las condiciones (tensiones, presiones, etc) a las que está sometido el medio. Ejemplos son las ondas que se producen en una cuerda cuando esta se agita verticalmente, uno ve que el moviminero generado en un extremo se transmite a toda la cuerda, o el sonido ya que uno habla en un punto y alguien te escucha en otro. Tambien tenemos las ondas que se producen cuando cae una piedra en un estanque o las olas del mar. Un aspecto importante de una onda es que esta no transporta materia porque las partículas del medio se encuentran oscilando alrededor de una posición de equilibrio, sino energía. Un terremoto es una onda mecánica que se genera en algún punto interior de la tierra y luego la energía que transportaba se libera rmpiendo la corteza terrestre.

9.1 Tipos de ondas y descripción

Existen ondas transversales, donde las partículas oscilan perpendicularmente a la dirección de propagación de la onda (cuerda), longitudinales donde las partículas oscilan en la mísma dirección de propagación (sonido) o combinación de ambas (olas).



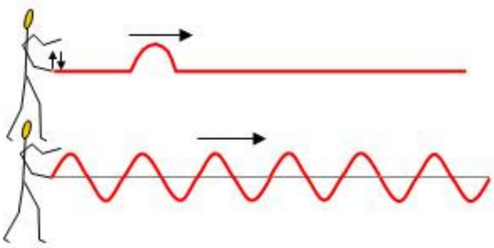
La expresión matemática de una onda que se propaga a lo largo del eje x debe ser mediante una función de dos variables

$$y(x,t) \;=\; f(x \mp vt)$$

correspondiendo el signo - a una onda que viaja hacia la derecha y el + hacia la izquierda, pues tendremos

$$y(x \pm v\Delta t, t + \Delta t) \;=\; f(x \pm v\Delta t \mp v(t + \Delta t)) = f(x \mp vt) = y(x,t)$$

o sea que la onda tendrá el mísmo valor en un tiempo posterior $t + \Delta t$ en un punto $x + v\Delta t$ ó $x - v\Delta t$ si viaja a derecha o izquierda respectivamente del valor que tenía en x, t . Usemos el ejemplo de la cuerda por el momento y supongamos que es muy larga para no precuparnos por ahora en que pasa cuando la onda llega al otro extremo. Podriamos generar un pulso que es una onda aislada que viaja si agitamos una sola vez nuestra cuerda o un tren de ondas si agitamos el extremos de la cuerda con una frecuencia f que es el número de veces de ir y volver al mísmo punto en un segundo y que se relaciona con el tiempo que lleva una oscilación llamado perido T como $f = \frac{1}{T}$.



la forma de un pulso o de una onda en el tren es arbitraria. La función matemática que describa un tren de ondas debe ser además periódica pues el valor de la deformación por ejemplo en un punto fijo x en t debe repetirse en $t + T$ o sea

$$f(x,t) \;=\; f(x, t + T)$$

lo cual combinado con la forma general de la onda

$$y(x \pm vT, t) \;=\; f(x, t - T) = f(x,t) = y(x,t)$$

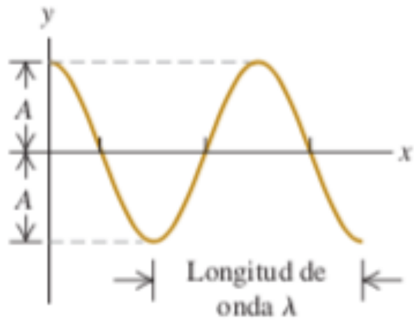
o sea que tambien hay una periodicidad espacial que veriamos si sacamos una instantánea a la onda en el tiempo t es decir la onda repite su forma despues de una distancia $\lambda = vT$ que se denomina longitud de onda. En resumen tendremos una periodicidad temporal con periodo T y una espacial con periodo λ

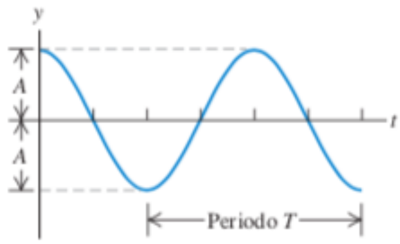
$$\boxed{\begin{aligned} y(x,t) &= y(x, t + T) \\ y(x,t) &= y(x + \lambda, t) \\ \lambda &= vT = \frac{v}{f} \end{aligned}}$$

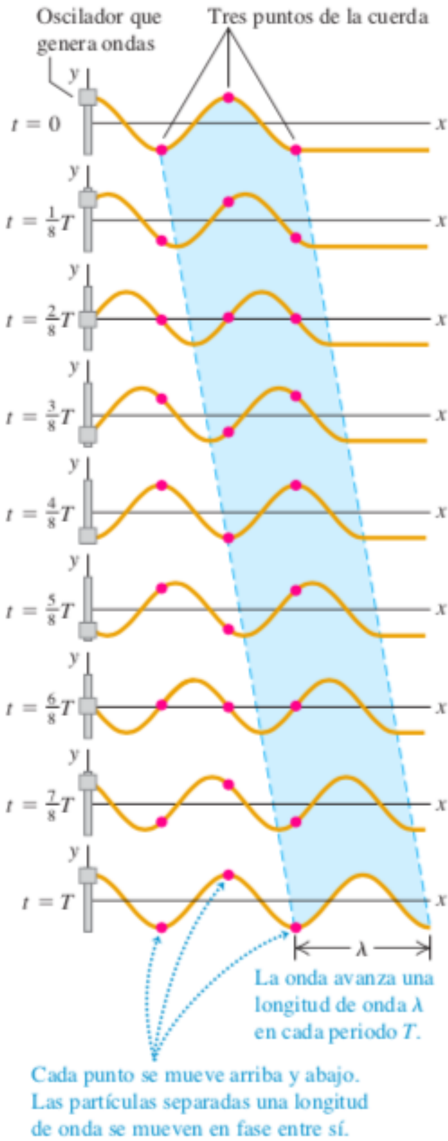
Un caso particular e importante de forma de onda es la onda sinusoidal donde se usan funciones seno o coseno para describirla

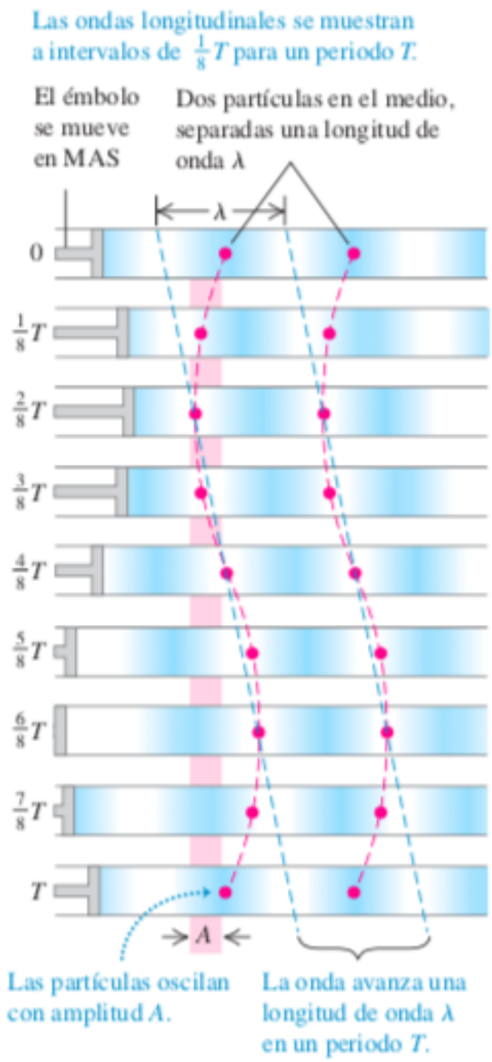
$$y(x,t) \;=\; Asen(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t)$$

notemos que segun la ecuación anterior si hacemos $x \to x + \lambda$ o $t \to t + T$ el argumento de la función seno se incrementa o disminuye en 2π y al ser una función periódica con dicho periodo su valor no cambia. Aveces se define el número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ y la frecuancia angular $\omega = \frac{2\pi}{T}$. En la siguiente figuras podemos esquematizar lo visto









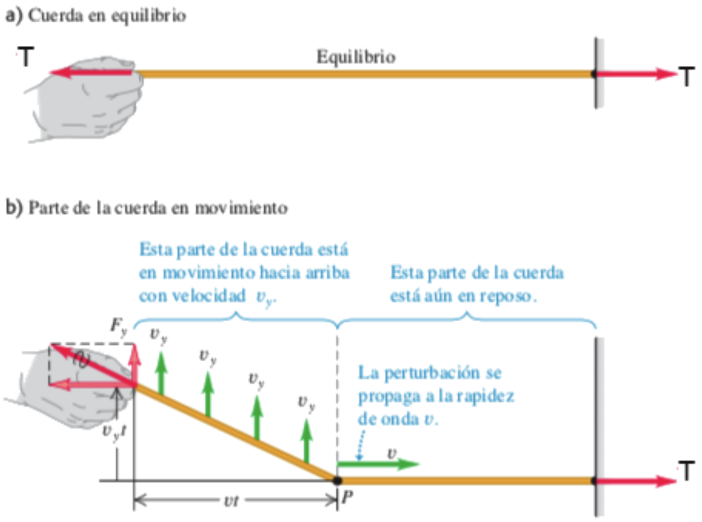
Para el caso de una onda longitudinal en un fluido compresible como lo es el aire tendremos que $y(x,t)$ es el desplazamiento longitudinal de las partículas y este puede conectarse con la presión obteniendose una onda de presión

$$p(x) = \frac{2\pi}{\lambda} BAsen(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t)$$

donde $B = \frac{\Delta p}{\Delta V/V}$ es el módulo de compresibilidia del fluido que depende de la temperatura, y es lo que se comprime el fluido frente a una cambio de presión Δp por unidad de cambio relativo $\Delta V/V$ de volúmen.

9.2 Velocidad de propagación

Ahora queremos calcular la velocidad de propagación de las ondas transversales en una cuerda de densidad lineal $\mu = M/L$ donde Mes la masa de la cuerda y L su longitud que hemos supuesto grande. Siempre debemos diferenciar la velocidad con que se mueven las partículas $v_y = dy(t)/dt$ con la velocidad de propagación v. Asi si usamos la 2da ley de Newton en la versión impulso igual variación de la cantidad de movimiento tendremos para la componente y



$$F_y t = m(v_y - 0)$$

para la componente x tenemos siempre una fuerza constante que es la tensión T de que manera que la fuerza neta en el extremos izquierdo es $(-T, F_y)$. De la figura puede verse

$$\begin{aligned} \frac{F_y}{T} &= \frac{v_y t}{vt} \Rightarrow F_y = T\frac{v_y}{v} \\ F_y t &= T\frac{v_y}{v} t \end{aligned}$$

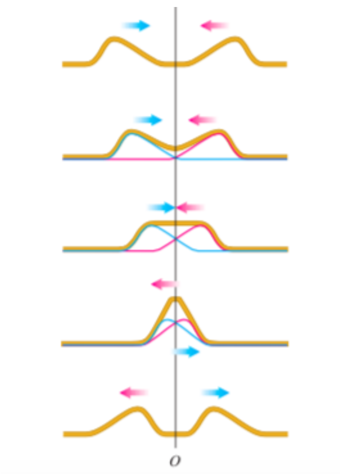
la masa es $m = \mu vt$ porque es la densidad por la longitud aproximada del segmento de cuerda puesto en movimiento (suponemos pequeños apartamientos) y finalmente poniendo el impulso y la variación de la camtidad de movimieto en la primera ecuación tendremos

$$\begin{aligned} T\frac{v_y}{v} t &= \mu v t v_y \\ &\Downarrow \\ v &= \sqrt{\frac{T}{\mu}} \end{aligned}$$

donde vemos que la velocidasd de propagación depende de la tensión y la densidad lineal.

9.3 Superposición de ondas

Cuando dos ondas se cruzan en una región del eje x la onda resultante se obtiene aplicando el principio de superposición que nos dice que el desplazmiento resultante es la suma de los individuales. Veamoslo en ondas transversales con expresiones $y_1(x, t), y_2(x, t)$ y tendremos $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$



Cuando se suman ondas armónicas de igual amplitud podemos usar para realizar la suma las siguientes expresiones

$$sen(A) + sen(B) = 2sen.\frac{A+B}{2}.\cos.\frac{A-B}{2}$$

$$sen(A) - sen(B) = 2cos.\frac{A-B}{2}.\text{sen}.\frac{A+B}{2}$$

$$cos(A) + cos(B) = 2cos.\frac{A+B}{2}.\cos.\frac{A-B}{2}$$

$$cos(A) - cos(B) = -2sen.\frac{A+B}{2}.\text{sen}.\frac{A-B}{2}$$

Por ejemplo si tenemos dos ondas de igual frecuencia o periodo moviendose en sentido contrario obtendriamos

$$\begin{aligned} y_1(x,t) &= A \quad sen(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t) \\ y_2(x,t) &= A \quad sen(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{2\pi}{T}t) \\ y(x,t) &= \quad 2Asen\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \end{aligned}$$

y obtenemos una llamada onda estacionaria donde la parte dependiente de x y t se factorizan.