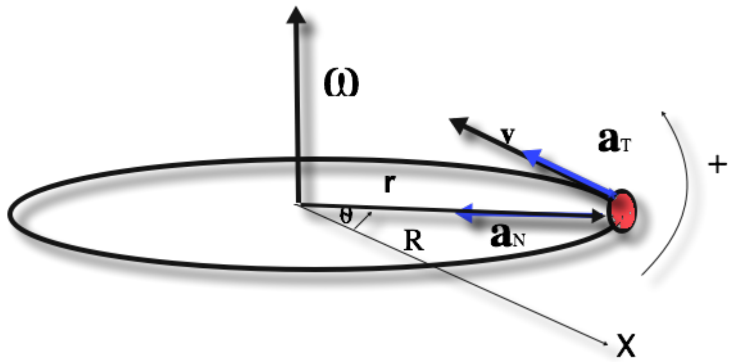
3 Movimiento circular

3.1 Cinemática

Ya hemos discutido como un ejemplo partícular de movimiento en el plano la cinemática del tiro oblicuo. Veamos ahora el movimiento circular. Dicho movimiento tiene como trayectoria una circunferencia de radio R y es conveniente usar como coordenada el ángulo que barre el vector posición respecto al eje X como muestra la figura, e iremos viendo que significa cada elemento mostrado allí



El vector posición puede escribirse como

$$\mathbf{r}(t) = R(cos\theta(t), sen\theta(t), 0), [\theta] = radianes$$

donde conviene medir por el momento el ángulo en radianes que es el número de veces que entra R en el arco de circunferencia S que corresponde a dicho ángulo $[\theta] = radianes = \frac{S}{R}$ que es adimensional por ser un cociente de longitudes. Es evidente la equivalencia $2\pi rad = 360^0 = 1$ vuelta o revolución pues el arco correspondiente a una circunferencia completa es $2\pi R$.

Podemos tomar sin perder generalidad el vector velocidad angular a lo largo del ejez z y el plano xy el de movimiento de la partícula, y además medir en ángulo en radianes lo que nos permite relacionar un arco de circunferencia $s(t)$ con el ángulo $\theta(t)$ mediante la relación $s(t) = R\theta(t)$. Luego uno puede cambiar las unidades a grados sexagesimales o revoluciones según el problema pero recordando que la relación existente entre velocidad ,velocidad angular y radio sólo se mantiene cuando medimos en radianes.

Si ahora calculamos la velocidad derivando el vector posición y la aceleración derivando el vecor velocidad debermos aplicar la derivada de una función compuesta $\frac{dsen\theta(t),cos\theta(t)}{dt} = cos\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}, -sen\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}$ y donde definimos la velocidad angular como el cambio del ángulo con el tiempo $\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$ asociandole un vector perpendicular al plano de rotación. Asi tendremos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} &= (0, 0, \omega(t)), [\omega] = radianes/[t] \\
\mathbf{r}(t) &= R(cos\theta(t), sen\theta(t), 0), [\theta] = radianes \\
\mathbf{v}(t) &= \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t),\ |\mathbf{v}| = abs(\omega) \times R \\
\mathbf{a}(t) &= \mathbf{a}_T(t) + \mathbf{a_N}(t)
\end{aligned}$$

donde uso *abs* para indicar el valor absoluto de cantidades escalares y || para el módulo de un vector por razones de claridad. Así vimos que calculando $d^2\mathbf{r}/dt^2$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_T(t) &= \frac{\alpha(t)}{\omega(t)}\mathbf{v}(t),\ \mathbf{a}_N(t) = -\omega(t)^2\mathbf{r}(t) \\
|\mathbf{a}_T| &= abs\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)|\mathbf{v}| = abs(\alpha)R \\
|\mathbf{a}_N| &= R\omega^2
\end{aligned}
$$

donde aparece la aceleración angular $\alpha(t) = d\omega(t)/dt = d^2\theta/dt^2$. Algunas observaciones son importantes de mencionar:

- Midiendo el ángulo en radianes, el radio en metros y el tiempo en segundos la velocidad se medirá en m/seg y la aceleración en m/seg^2, la velocidad angular en $rad/seg \equiv 1/seg$ ya que el radián es el número de veces que entra el radio en el arco de circunferencia que subtiende un dado ángulo y es adimensional, y la aceleración angular en $1/seg^2$.
- El movimiento circular siempre es acelerado porque a pesar de que cuando $\alpha = 0(\omega = cte)$ y $\mathbf{a}_T = 0(|\mathbf{v}| = cte)$, como $\omega \neq 0$ siempre entonces $\mathbf{a}_N \neq 0$, y esta aceleración llamada usualmente centrípeta es la que obliga a la partícula a realizar un movimiento circular.
- Si bien la aceleración normal siempre apunta al centro de la circunferencia trayectoria, dependiendo de los signos relativos de α y ω la tangencial puede ser colineal u opuesta a la velocidad produciendo un movimiento tangencial acelerado o desacelerado.

Casos particulares

Asi como antes definimos el MRU ahora podriamos hablar de un movimiento circular uniforme MCU que se da cuando la velocidad angular $\omega = cte(\alpha = 0)$ y velocidad tangencial $v_T \equiv \pm|\mathbf{v}| = \omega R = cte$,($\pm$) dependiendo si nos movemos en sentido positivo (antihorario según nuestra convención) o negativo. Como por definición

$$
\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega t,\ \omega = cte
$$

que pueden relacionarse inmediatamente con la velocidad tangencial obtendiendose $s = R\theta_0 + \omega Rt = s_0 + v_T t$, $v_T = \omega R = cte$. notemos la similitud con las ecuacines de MRU $v = cte$, $x = x_0 + vt$.

El otro caso particular interesante el el movimiento circular uniformemente acelerado o variado MCUV que se da cuando $\alpha = cte$ y de la definición obtendremos

$$
\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \alpha t,\ \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2,
$$

nuevamente se puede hacer la conexión con la velocidad tangencial y el arco usando $v_T = \omega R$, $s = \theta R$.

Ejemplo

Un motor se encuentra girando a 2000 rev/min y al cortarle la alimentación eléctrica comienza a frenarse a razón de $-100\frac{rev}{minseg}$(disminuye 100 rev/min en cada segundo), determinar

a) Qué velocidad angular tendrá y cuantas vueltas dió al cabo de 10 segundos?

b) Cuanto tiempo tardará en detenerse?

c) Cual es el valor de la velocidad tangencial y la distancia recorrida en esos 10 segundos si el eje del motor mide $R = 0.1m$?

Si trabajamos solamente con la velocidad angular y el ángulo no tenemos que preocuparnos por pasar a radianes, ésto deberiamos hacerlo al final para calcular la velocidad tangencial. Recordemos que $2\pi rad = 1rev = 360^0$.

La velocidad angular y ángulo barrido en los primeros 10 seg serán

$$\begin{aligned}
\omega(10seg) &= 2000\frac{rev}{min} - 100\frac{rev}{min\,\cancel{seg}}10\cancel{seg} = 1000\frac{rev}{min} \\
\theta(10seg) &= 0 + 2000\frac{rev}{min = 60seg}10seg + \frac{1}{2}(-100\frac{rev}{(min = 60seg)seg})(10seg)^2 \\
&= 333.33rev - 83.33rev = 250rev = 90000^0 = 91570.8rad
\end{aligned}$$

Cuando se detenga deberá ser $\omega = 0$ asi tendremos

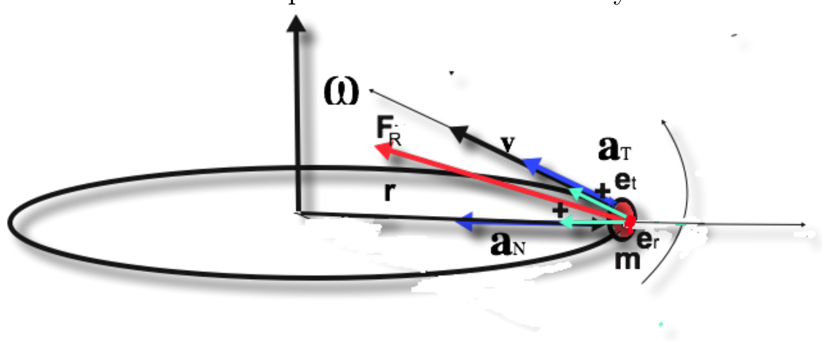
$$0 = 2000\frac{rev}{min} - 100\frac{rev}{min\,seg}t \Rightarrow t = \frac{2000}{100}seg = 20seg$$

Finalmente para determinar la velocidad tangencial y arco recorrido deberemos trabajar en rad/seg

$$\begin{aligned}
\omega(10seg) &= 1000\frac{2\pi}{min} = \frac{6280}{min} \Rightarrow v_T(10seg) = \omega(10seg)R = \frac{6280}{min} \times 0.1m = 628\frac{m}{min} \\
s(10seg) &= \theta(10seg)R = 91570.8 \times 0.1m = 9157.08m
\end{aligned}$$

3.2 Dinámica del Movimiento circular

Hemos visto que el movimiento circular es intrisicamente acelerado, es decir aunque el módulo de la velocidad tangencial sea constante hay un cambio de dirección. Por lo tanto si hay aceleración según la 2da Ley de Newton debe haber fuerza resultante o neta $\mathbf{F}_R$ sobre la partícula que describe el movimiento circular. Esa fuerza podría ser ejercida mediante una cuerda, una pista circular, etc. Si bien un sistema de referencia que rote con la partícula no es un sistema de referencia inercial, podriamos imaginarnos en cada instante de tiempo un sistema de referencia inercial que tenga un eje en la dirección del radio y otro perpendicular y asi tangencial a la circunferencia, al primero lo llamamos "normal" y al otro "tangencial" con versores $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_t$ respectivamente. Podriamos definir como sentidos positivos hacia el centro y en el sentido antihorario .



Asi entonces podemos aplicar la 2da Ley de Newton a este caso haciendo una descomposición sobre los ejes normal y tangencial obteniendo

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_R &= m\mathbf{a} \\
F_{R_N} &= ma_N \\
F_{R_T} &= ma_T
\end{aligned}
$$

donde $F_{R_{N,T}}, a_{N,T}$ son componentes con su respectivos signos de la fuerza resultante y aceleración a lo largo de las direcciones normales y tangenciales. Lo que si podemos ver que como siempre $a_N = \omega^2 R > 0$, entonces como la masa es una cantidad positiva la componente normal de la fuerza deberá ser positiva (según nuestra convención), es decir deberá apuntar hacia el centro para "obligar" a la partícula a describir un movimiento circular. La componente tangencial de la fuerza también deberá tener el mismo signo que la aceleración tangencial, pero como ésta es $a_T = \frac{\alpha}{\omega} v_T$ y α/ω puede ser postivo o negativo, es decir la fuerza puede frenar o acelerar tangencialmente a la partícula.

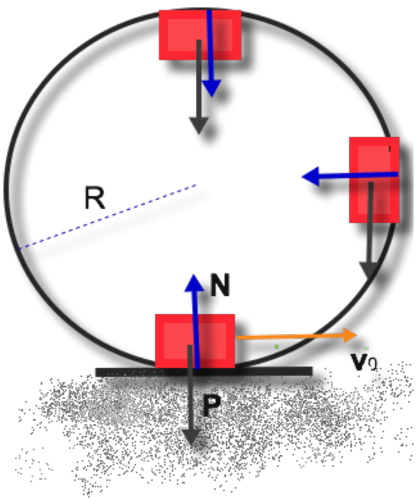
Ejemplos:

1) Supongamos tener una rampa que termina en un rulo de radio R sin roce y que un bloque de masa m ingresa al rulo con velocida v_0, alcanza el punto medio con $v_1 < v_0$, y el punto más alto con $v_2 < v_1$y queremos saber :

a) Cuánto vale la normal que ejerce a la rampa cuando el bloque esta abajo, a media altura y en el punto más alto?

b) Cúal es la aceleración en cada punto mencionado en a)?

c) Cuál sería la velocidad mínima con que debe llegar arriba para no caer ?



Planteamos en cada posición la 2da ley de Newton. Cuando la partícula entra (posición 0) al rulo tenemos (recordemos que tomamos posivo hacia el centro)

$$
\begin{aligned}
F_{R_N} &= N - mg = ma_N = mR\omega^2 = mv_0^2/R \\
N_0 &= mg + \frac{mv_0^2}{R} > mg,\ a_{N_0} = \frac{v_0^2}{R} \\
F_{R_T} &= 0 \rightarrow a_{T_0} = 0
\end{aligned}
$$

Cuando alcanza el punto medio(posición 1)

$$
\begin{aligned}
F_{R_N} &= N = ma_N = mR\omega^2 = mv_1^2/R \\
N_1 &= \frac{mv_1^2}{R} < \frac{mv_0^2}{R} < \frac{mv_0^2}{R} + mg = N_0,\ a_{N_1} = \frac{v_1^2}{R} < a_{N0} \\
F_{R_T} &= -mg \to a_T = -g.
\end{aligned}
$$

Final(posición 2)

$$
\begin{aligned}
F_{R_N} &= N + mg = ma_N = mR\omega^2 = mv_2^2/R \\
N_2 &= -mg + \frac{mv_2^2}{R} < -mg + \frac{mv_0^2}{R} < N_1,\ a_{N_2} = \frac{v_2^2}{R} \Rightarrow a_{N_2} < a_{N1} < a_{N_0} \\
F_{R_T} &= 0 \to a_{T_2} = 0,
\end{aligned}
$$

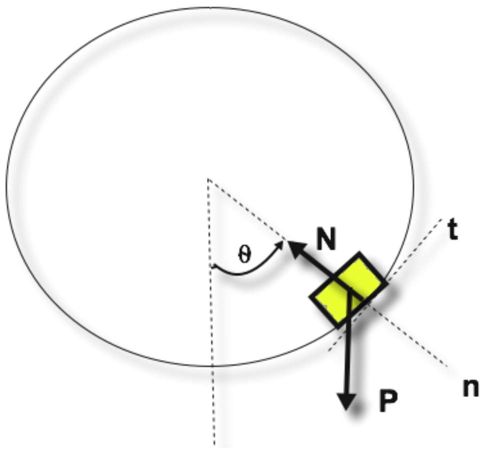
donde finalmente concluimos

$$
\begin{aligned}
N_0 = mg + \frac{mv_0^2}{R} &> N_1 > N_2 \geq 0 \\
a_{N_0} = \frac{v_0^2}{R} &> a_{N1} > a_{N_0}.
\end{aligned}
$$

No podemos ver cuanto vale exactamente la velocidad en 1 por ejemplo porque desde 0 hasta 1 la aceleración tangencial no es contante pues la componente tangencial del peso va cambiando con el ángulo.

Si la partícula llega arriba y no queremos que caiga siguiendo su movimiento circular, notemos que como$N_2 = -mg + \frac{mv_2^2}{R} \geq 0$ (la normal no puede ser negativa porque significaria que el rulo "tira" del bloque en vez de empujarlo) entonces $v_2 \geq \sqrt{R/g}$, que llegue con dicha velocidad dependerá de con qué velocidad el bloque entra al rulo.

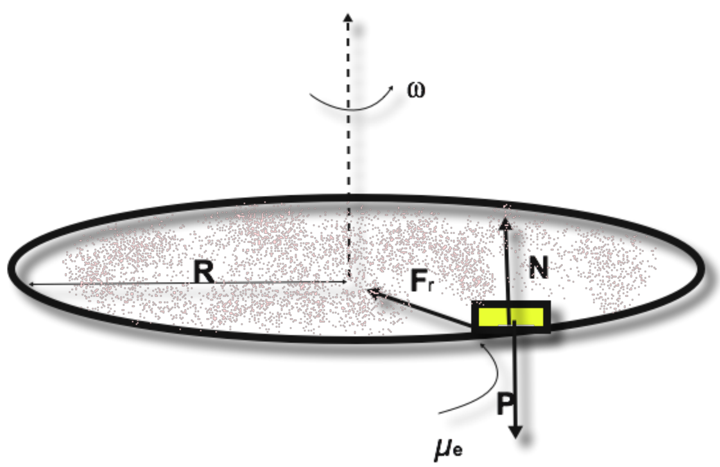
Si quisieramos hacer una evaluación cuantitativa de las velocidades en el punto medio y arriba, y así las normales correspondientes, tendriamos que plantear la segunda Ley de Newton para una posición cualquiera de la partícula en un dato tiempo t y resolver las ecuaciones diferenciales que nos quedan



$$\begin{aligned}
-mgcos\theta(t)+N(t) &= mR\omega(t)^2 = mR\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2 \\
(1)\ \left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2+\frac{g}{R}cos\theta(t)-\frac{N(t)}{mR} &= 0 \\
-mgsen\theta(t) &= m\alpha(t)R = m\,\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}R \\
(2)\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+\frac{g}{R}sen\theta(t) &= 0
\end{aligned}$$

que son en general muy complicadas porque deberiamos primero resolver (2) y luego meter $\theta(t)$para obtener la normal$N(t)$ en la (1) y velocidad tangencial $v(t) = R\frac{d\theta}{dt}$ en cualquier punto del recorrido. Más adelante resolveremos la (2) para pequeños ángulos θ cuando estudiemos el movimiento de un péndulo, pero por ahora nos quedamos con el análisis cualitativo qude hicimos arriba.

2)Un bloque de masa m se encuentra al borde sobre una superficie giratoria de radio R que tiene una velocidad angular constante ω , si el coeficiente de roce entre el bloque y la mesa es μ_e, cuál será la velocidad máxima que puede alcanzar la mesa para que el bloque no deslice?



Para que el bloque acompañe a la mesa con movimiento circular notemos que la única fuerza radial que aparece es la de roce, que no hay aceleración tangencial y que las fuerzas verticales son la normal y el peso, así se debe cumplir

$$\begin{aligned}
ma_N &= F_r \leq \mu_e N \\
0 &= N - mg
\end{aligned}$$

ya que el cuerpo no se acelera verticalmente y por lo tanto

$$ma_N \ = mR\omega^2 \ \ \leq \mu_e mg \Rightarrow \omega \leq \sqrt{g/R},$$

donde vemos que las unidades resultantes son $1/tiempo$ que es lo correcto.