4 Energía y Trabajo mecánico

Existen muchas formas de explicar el concepto de energía. A mi me gusta la forma en que lo expresa Richard Feynman premio novel de Física, que lo hace mediante un cuento que paso a exponerles.

Pablito jugada todos los días con 28 cubitos totalmente indestructibles. Al final de cada día, su mamá hacia un recuento de ellos para ver que no se perdiera ninguno. Digamos de paso que a la mamá de Pablito le gustaba la física y conocía un poco de matemáticas. Un día ella encuentra 25 cubitos , pero inmediatamente descubrió que habia 3 debajo de la cama de Pablito asi que $25 + 3 = 28$ y estaba todo bien. Otra vez faltaban 5 y se fijó debajo de la cama y nada, pero pensó que quizas habia quedado en la caja donde se guardaban, pero cuando intentó habrirla Pablito comenzó a llorar y entonces pensó como podré saber si estan allí? Entonces recordó que la caja vacia pesaba un peso P y que cuando la puso en la balanza pesaba P' y que cada cubito tenía un peso p así que hizo la cuenta

$$\frac{P\text{'} - P}{p} = 5$$

y así $\frac{P\text{'}-P}{p} + 23 = 28$, y nuevamente estaba todo bien. Otro día se encontró con 31 cubitos, y pensó que habia sucedido. Entonces recordó que Juancito habia venido a jugar y que seguramente se habia olvidado esos 3 y así fue. Una vez encontró 20 cubitos y después de buscar bajo la cama, en la caja y recordando que nadie habia vendio a jugar a casa, al pasar por el baño detectó que la bañera estaba demasiado llena como si algo estuviera sumergido adentro, pero no queria meter su mano ya que era el agua con que habia bañado a Pablito que venia embarrado del fondo. Asi que uso de nuevo su instinto físico y recordó que siempre llenaba la bañera hasta una altura H, que ahora media H' y que cada cubito arrojado a la bañera elevaba su nivel en h así que hizo la cuenta

$$\frac{H' - H}{h} = 8$$

y así nuevamente $20 + \frac{H'-H}{h} = 28$. Podríamos seguir hablando de las distintas formas en que Pablito esconde sus cubitos pero, con lo visto nos basta para identificar a la casa de Pablito con lo que llamamos un sistema físico, y que los cubitos pueden salir o entrar del sistema o esconderse de diferentes maneras dentro de sistema pero que la suma siempre dá 28. O sea

$$cubitos\,bajo\,la\,cama + \frac{P\text{'} - P}{p} + \frac{H' - H}{h} + ... + cubitos\,salientes \quad -entrantes = 28.$$

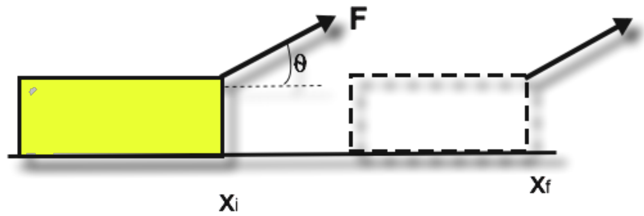
Ahora podriamos preguntarnos que tiene que ver este cuento con el concepto de energía. Primeramente diremos que la energía es algo análogo a los cubitos indestructibles pero que no es material, es algo abstracto de los que sólo conocemos la ecuaciones para calcularla como las que inventó la mamá de Pablito. Además que podríamos comprobar la conservación de la energía solamente si conocemos *todas* las formas de energía y como evaluar su cambio en los procesos físicos. Finalmente si podemos aislar un determinado sistema físico y conocemos como calcular cada forma de energía podriamos plantear la conservación de la energía frente a cambios o procesos en dicho sistema.

Ahora una pregunta esencial es saber como podemos descubrir las expresiones matemáticas con que se calcula una determinada forma de energía y como definir una determinada forma, no es cuestion de ocurrencia. La forma de hacerlo resulta ser definiendo primeramente el trabajo realizado por una fuerza.

4.1 Trabajo Mecánico

La noción de trabajo en física difiere de la que tenemos normalmente en la vida cotidiana. Por ejemplo, cuando tranportamos una valija cierta distancia horizontalmente, sentimos su peso en nuestro brazo y decimos que nos cuesta "trabajo" el transportarla, sin embargo según la definción en física no hemos realizado trabajo.

El trabajo mecánico realizado por una fuerza relaciona la intensidad de dicha fuerza, el ángulo que esta forma con el desplazamiento y al desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza. Tomemos el caso simple de una fuerza constante y un desplazamiento unidimensional



Vamos a definir el trabajo mecánico realizado por la fuerza $\mathbf{F}$ como

$$W_{\mathbf{F}}^{if} \;=\; |\mathbf{F}|(x_f - x_i)cos\theta,$$

notemos lo siguiente:

- El trabajo mecánico es un escalar (número)
- El trabajo es directamente proporcional a la intensidad de la fuerza, al desplazamiento y al ángulo que forma la fuerza con el desplazamiento. Cuando el desplazamiento es positivo y el ángulo agudo $(x_f - x_i) = d$ es la distancia recorrida por el punto de aplicación de la fuerza.
- Cuando el ángulo es 90^0 aunque el cuerpo se desplace, la fuerza no realiza trabajo (el caso de la valija transportada)
- Cuando $\theta = 180^0$ el trabajo es negativo aunque haya un desplazamiento hacia adelante, esta es la situación con la fuerza de roce que siempre se opone al desplazamiento.

Las unidades de trabajo mecánico son unidades de fuerza $\times$unidades de desplazamiento y tendremos $Joule \equiv J = N(Newton) \times m(metro)$ en el sistema MKS, $Ergio \equiv erg = dyn(dina) \times cm(centímetro)$ en el CGS y $Kilográmetro \equiv Kgm=$ $\mathbf{kg}(kilográmo) \times m(metro)$.

Ahora nos gustaría generalizar la definición de trabajo al caso de una fuerza que cambie de dirección e intensidad, y cuando el desplazamiento es arbitrario. Sigamos por el momento con una dimensión y notemos que los vectores posición en este caso son $\mathbf{r}_i = (x_i, 0), \mathbf{r}_i = (x_f, 0)$ y que usando el concepto de producto escalar por componentes $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, podemos escribir el caso de la interacción constante como

$$W_{\mathbf{F}}^{if} \;=\; |\mathbf{F}|(x_f - x_i)cos\theta = \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i).$$

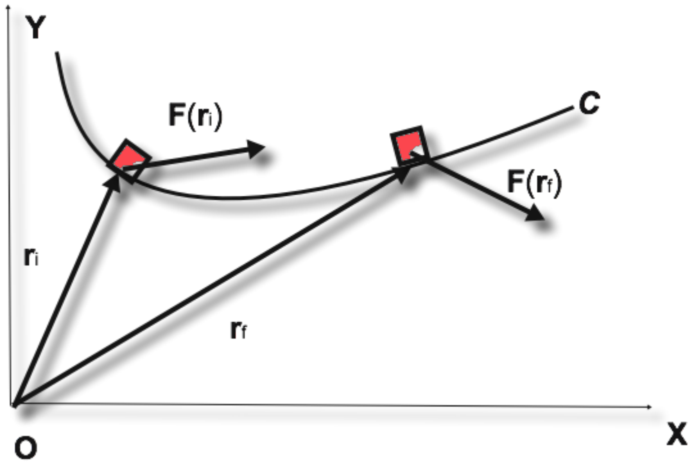
Ahora si la interacción cambiara punto a punto con la coordenada x tendriamos $\mathbf{F}(x)$ y la expresión hallada anteriormente sólo sería válida para un pequeño desplazamiento donde pueda considerarse a la fuerza como constante, es decir un diferencial de desplazamiento $d\mathbf{r} = (dx, 0)$ y el trabajo sería $\mathbf{F}(x)\cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{F}(x)|cos\theta(x)dx = F_x(x)dx$ o sea el producto de la componente x de la fuerza por el desplazamiento en x y evaluado en un punto dado. Si ahora queremos calcular el trabajo para un desplazamiento finito entre x_i y x_f usamos a la integral como herramienta que nos permite sumar cantidades infinitesimales

$$W_{\mathbf{F}}^{if} \quad = \quad \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)dx.$$

Finalmente si el desplazamiento no es unidimensional sino cualquier curva $\mathcal{C}$ del plano (o el espacio) que conecta el punto iniciales $\mathbf{r}_i$ con $\mathbf{r}_f$ tendremos lo que se llama una integral de línea

$$W_{\mathbf{F}}^{if} \quad = \quad \int_{\mathcal{C}_{if}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_{if}} (F_x(\mathbf{r})dx + F_y(\mathbf{r})dy + F_z(\mathbf{r})dz)$$

ya veremos como meter la información de la trayectoria seguida en cada caso particular, ésto lo haremos en el $d\mathbf{r}$,



Ejemplo 1

Una caja de peso 500 N es arrastrada por una fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (5\frac{N}{m}\ x, 100N)$, la superficie es rugosa con un coeficiente dinámico $\mu = 0.01$. Determinar el trabajo realizado por la fuerza para desplazar 2m la caja y el trabajo realizado por la fuerza de roce. Tendremos $\mathbf{r}_i = (0,0), \mathbf{r}_f = (2m, 0)$, $d\mathbf{r} = (dx, 0)$

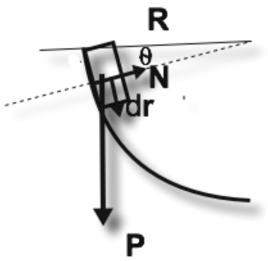
$$W_{\mathbf{F}}^{if} \quad = \quad \int_{\mathcal{C}_{if}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2m} 5\frac{N}{2m}xdx = \frac{5}{2}\frac{N}{m}x^2|_0^{2m} = 10J$$

Para determinar la fuerza de roce por deslizamiento que es constante, debemos considerar la normal que será $N = P - 100N = 400N$ pues la fuerza aplicada va contraria al peso en su componente vertical con lo cual la fuerza aplicada sobre el piso es menor y asi su reacción que es la normal. Así tendremos $\mathbf{F}_r = (-\mu_d N, 0) = (-4N, 0)$ constante y su trabajo realizado será

$$W_{\mathbf{F_r}}^{if} \quad = \quad \int_{\mathcal{C}_{if}} \mathbf{F_r}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\int_0^{2m} 4Ndx = -4Nx|_0^{2m} = -8J$$

Ejemplo 2

Un bloque de peso 40 **kg** se deja caer desde una altura de 10m deslizandose sobre una rampa de cuarto de circulo con radio $R = 10m$ sin roce. Determinar el trabajo que realiza el peso y la normal a la rampa.



Observemos que entre el desplazamiento infinitesimal y el peso se tiene el ángulo θ, por perpendicularidad al ángulo que forman los radios, de estra manera $\mathbf{P}\cdot d\mathbf{r} = Pdrcos\theta = PRd\theta cos\theta$ donde hemos usado la relación entre arco y ángulo, y de paso mencionamos que al haber usado dicha relación estamos indicando que el desplazamiento es sobre una circunferencia. Vemos que el ángulo es apropiado para indicar la posición y así tendremos (no olvidemos que los ángulos siempre los medimos en sentido positivo antihorario)

$$W_{\mathbf{F}}^{if} = \int_{\mathcal{C}_{if}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} PRd\theta cos\theta = PRsen\theta \,|_0^{\pi/2} = PR = 400Kgm > 0,$$

respecto de la normal como se cumple en cada punto que $\mathbf{N} \cdot d\mathbf{r} = 0$ entonces el trabajo realizado será nulo.

Una observación debemos hacer referente a como calculamos el trabajo de la fuerza de roce en el ejemplo 1. La fuerza de roce por deslizamiento es una fuerza que aparece cuando el cuerpo va entrando en contácto con la superficie a medida que se desplaza y no es una fuerza que vaya desplazando su punto de aplicación rigurosamente hablando. Sin embargo como veremos en la subsección siguiente se puede calcular el trabajo de la fuerza de roce con la expresión de la integral de línea ya que el efecto producido será correctamente evaluado de ésa manera. Otra segunda observación es que en general el trabajo realizado por una fuerza entre dos puntos depende de la trayectoria que los una, es decir para diferentes trayectorias tendremos diferentes trabajos, por esta razón siempre aparece una indicación de la curva $\mathcal{C}$. Veremos más adelantes que existe un tipo especial de fuerzas para las cuales el trabajo no depende de la trayectoria, pero por el momento estamos hablando en general.

4.2 Energía cinética

Podriamos decir que la energía cinética es una forma de energía asociada al movimiento de la partícula. Por lo tanto debería depender de su velocidad y de su inercia, la cual es cuatificada por su masa. Ahora cómo podemos encontrar la expresión para esta energía cinética? Supongamos que sobre una partícula actua una fuerza neta $\mathbf{F}_N$(suma de todas las fuerzas actuantes) que realiza trabajo a lo largo de su trayectoria $\mathcal{C}$ entre dos posiciones $\mathbf{r}_{i,f}$, tendremos

$$W_{\mathbf{F}_N}^{if} = \int_{\mathcal{C},\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{F}_N \cdot d\mathbf{r}.$$

Ahora como estamos calculando el trabajo de la fuerza neta podemos aplicar la 2da ley de Newton a la partícula y decir que

$$\mathbf{F}_N \quad = \quad m\frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

y usando el concepto de velocidad que $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, donde si reemplazamos en la integral estos dos últimos elementos tendremos

$$\begin{aligned} W^{if}_{\mathbf{F}_N} &= \int_{\mathcal{C},\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{F}_N \cdot d\mathbf{r} = m\int_{\mathcal{C},\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \frac{d\mathbf{v}}{\cancel{dt}} \cdot \mathbf{v}\cancel{dt} = m\int_{\mathbf{v}_i}^{\mathbf{v}_f} d\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = m\int_{\mathbf{v}_i}^{\mathbf{v}_f}(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) \\ &= m(\frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} + \frac{v_z^2}{2}) \mid_{\mathbf{v}_i}^{\mathbf{v}_f} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_f^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_i^2. \end{aligned}$$

Observemos que hemos hecho aqui arriba un cambio de variables pasando de la posición a la velocidad y que ha desaparecido la referencia explícita a la trayectoria. Esto es asi porque para una velocidad inicial dada, las ecuaciones de movimiento para una dada fuerza neta nos conducirán siempre a una mísma velocidad final, es decir la información de la trayectoria esta "cargada" en la velocidad final que adquiere la partícula. Ahora, notemos que hemos conectado el trabajo realizado por la fuerza neta sobre la partícula con el cambio de una magnitud que depende de la masa y velocidad de la mísma. Si la partícula hubiera estado en reposo ($\mathbf{v}_i = 0$) habría adquirido una velocidad $\mathbf{v}_f \equiv \mathbf{v}$ diferente de cero, es decir el trabajo de la fuerza se invirtió en ponder en movimiento a la partícula y la magnitud que mide ese "movimiento adquirido" es $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2$. Vamos a llamar a esta cantidad escalar "Energía cinética" que sería una forma de energía que tiene una partícula en virtud de su movimiento. Asi

$$\boxed{W^{if}_{\mathbf{F}_N} \quad = \quad E_c^f - E_c^i \equiv \Delta E_c, \qquad E_c(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2.}$$

Esta expresión del trabajo de la fuerza neta relacionada con la variación (Δ) de la energía cinetíca, es conocida como *Teorema trabajo-variación de energía cinética.* Notemos que la energía cinética es entonces una función que depende de la velocidad de la partícula, no depende de la dirección y sentido sino sólo de su módulo.

Ejemplo :

Un cuerpo cae desde una altura h a partir del reposo cuál es su energía cinética cuando llega al piso y su velocidad? Suponemos no hay roce con el aire. Así el peso $\mathbf{P} = (0, -mg)$ es la fuerza neta y tendremos

$$W^{if}_{\mathbf{F}_N} \quad = \quad \int_h^0 dy(-mg) = mhg = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_f^2 = E_{cf} \Rightarrow \mathbf{v}_{\mathrm{f}} = (0, -\sqrt{2\mathrm{gh}}).$$

Respecto de lo mencionado arriba sobre la fuerza de roce notemos que si suponemos que la única fuerza actuante sobre la partícula es la de roce por deslizamiento $\mathbf{F}_N = \mathbf{F}_r$, como la demostración del teorema se basa en la 2da ley de Newton y la fuerza de roce la cumple, se deberá satisfacer que

$$\int_{\mathcal{C},\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{F}_r \cdot d\mathbf{r} \quad = \quad \Delta E_c$$

independientemente del nombre que le demos a esa integral, pero como en el caso general de una fuerza que desplaza su punto de aplicación a dicha integral la llamamos "trabajo" entonces diremos que también para la fuerza de roce que evalua el trabajo realizado.