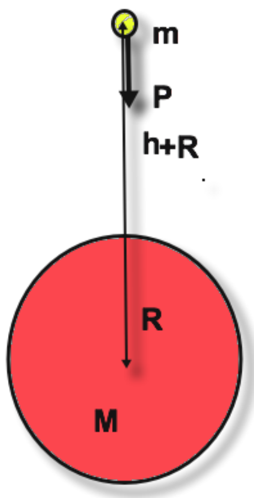
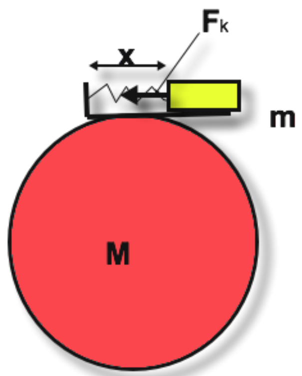
4.3 Energía potencial

Ya hemos encontrado una de las formas en que se esconde la energía, la energía cinética y sabemos como calcularla. La energía cinetica es la forma de energía en virtud del movimiento de la partícula. Ahora la partícula no está sola en el universo, interactua con otras partículas y si dicha interacción depende de las posiciones relativas entre las partículas algo debería cambiar en el sistema para las diferentes posiciones. Veamos si se puede definir alguna forma de energía que dependa de la posición.

Vamos a comenzar con una situación sencilla de un sistema de dos partículas donde una de las partículas tiene una masa mucho mayor que la otra, me manera que practicamente la podemos considerar como quieta. Por ejemplo cuando un cuerpo de masa m cae desde alturas cercanas a la superficie terrestre, por acción de su peso no nos preocupamos por la aceleración de la tierra ya que su masa M es muy grande frente a m y será de un valor $-\frac{m}{M}g \approx 0$, recordemos el principio de acción y reacción. De igual manera cuando un resorte esta unido a la pared y un cuerpo atado al resorte se desplaza horizontalmente, no nos preocupamos por los movimiento de la pared que está unida a la tierra.





Entonces calculemos el trabajo que nos cuesta por ejemplo levantar la partícula de masa desde una altura h_i hasta una altura h_f aplicando una fuerza apenas mayor y contraria a su peso, para que practicamente la fuerza neta sea cero y no incrementemos apreciablemente su velocidad, asi no hay cambios en la energía cinética. Queremos que el trabajo que realicemos contra el peso sirva para cambiar la posición y no la velocidad. A esta forma de realizar trabajo se la llama cuasiestática. Tendremos $\mathbf{r}_i = (0, h_i+R), \mathbf{r}_f = (0, h_f+R), \mathbf{P} = (0, -mg),\ d\mathbf{r} = (0, dy)$

$$W^{if}_{\mathbf{F}=-\mathbf{P}} = \int_{h_i+R}^{h_f+R} mgdy = mgh_f - mgh_i$$

y donde si definimos a $U_g = mgh$ como la llamada energía potencial gravitacional (a altura cercana a la superficie) tendremos que el trabajo que realizamos para levantar el cuerpo es

$$W^{if}_{\mathbf{F}=-\mathbf{P}} = U_g(h_f) - U_g(h_i) = \Delta U_g$$

y podemos pensar que se usó para incrementar la energía potencial gravitatoria, es decir el cuerpo al ganar altura respecto a la tierra adquirió energía potencial. Así la energía potencial gravitacional está relacionada con la posición realtiva de un cuerpo respecto a la tierra. De igual manera si quiero estirar el resorte debemos aclarar que éste ejerce una fuerza proporcional y opuesta al estiramiento ($x > x_0$) o compresión ($x < x_0$),

$\mathbf{F}_k = -k(x - x_0)\hat{i}$, donde x_0 es la posición donde el resorte no está estirado, x la posición en un instante de la partícula y k una constante que depende del material del resorte (ya veremos más adelante de donde sale dicha expresión para la fuerza). Si quiero estirar o comprimir el resorte con una fuerza casi igual pero opuesta a tendré que realizar un trabajo($\mathbf{r}_i = (x_i, 0)$, $\mathbf{r}_f = (x_f, 0)$, $\mathbf{F_k}$ =$(-k(x - x_0), 0)$, $d\mathbf{r} = (dx, 0)$)

$$W^{if}_{\mathbf{F}=-\mathbf{F_k}} = k\int_{x_i}^{x_f}(x - x_0)dx = k\frac{(x - x_0)^2}{2}\,|_{x_i}^{x_f} = \frac{1}{2}(x_f - x_0)^2 - \frac{1}{2}(x_i - x_0)^2$$

que podría simplificarse si tomamos en origen de coordenadas en x_0, es decir $x_0 \equiv 0$. Así podriamos definir una energía potencial elástica $U_k(x) = \frac{1}{2}kx^2$ entonces el trabajo realizado sería

$$W^{if}_{\mathbf{F}=-\mathbf{F_k}} = U_k(x_f) - U_k(x_i) = \Delta U_k$$

y decir que al estirarse o comprimerse el resorte adquiere energía potencial elástica.

Ahora podriamos finalmente generalizar, si tenemos una fuerza $\mathbf{F}_c(\mathbf{r})$ que actua sobre la partícula (generada por otra partícula muy masiva) definir la energía potencial asociada $U_c(\mathbf{r})$ como

$$\boxed{U_c(\mathbf{r}_f) - U_c(\mathbf{r}_i) = \int_{\mathbf{r_i}}^{\mathbf{r}_f}(-\mathbf{F}_c)\cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathbf{r_i}}^{\mathbf{r_f}}\mathbf{F_c}\cdot d\mathbf{r} = -W^{if}_c}$$

el trabajo realizado en contra de la fuerza en forma cuasiestática. También podriamos decir que $W^{if}_c = -\Delta U_c$. Ya que lo importante son los cambios de energía uno podría fijar el origen de energía en cierto $\mathbf{r_i} \equiv 0$ es decir $U(\mathbf{r}_i) = 0$ y pensar a la energía potencial como una función de la posición $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_f$

$$U_c(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{r}}\mathbf{F}_c\cdot d\mathbf{r}'.$$

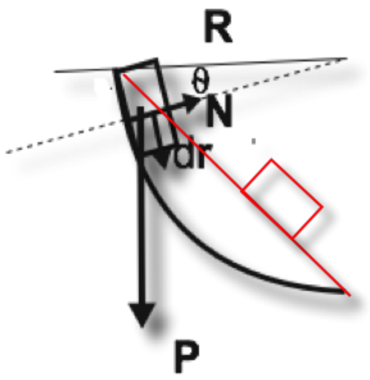
Es importante mencionar que como el trabajo que realiza la fuerza $\mathbf{F_c}$ debe quedar expresado como la diferencia entre cantidades que dependen de solamente la posición inicial y final, este no puede depender de la trayectoria que los una, como sucede con el peso y la fuerza elástica, por esto en nuestra definición general no hemos indicado el $\mathcal{C}$ en la integral. Este tipo especial de fuerzas se llaman conservativas y de allí el subindice "c". Existen además de la fuerza gravitacional y la elástica, otras fuerzas conservativas como la electrostática entre cargas eléctricas. En realidad la fuerza elástica es una manisfestación macroscópica de las fuerzas eléctricas entre los átomos del resorte. Otra forma de caracterizar una fuerza conservativa es calcular el trabajo en un camino cerrado, es decir partiendo de un punto y volviendo al mismo, asi tendremos

$$U_c(\mathbf{r}_i) - U_c(\mathbf{r}_i) = -\int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_i}\mathbf{F}_c\cdot d\mathbf{r} \equiv -\oint\mathbf{F}_c\cdot d\mathbf{r} = 0 \Longrightarrow \oint\mathbf{F}_c\cdot d\mathbf{r} = 0$$

o sea la integral sobre un camino cerrado debe dar cero. Obviamente no podemos demostrar que una fuerza realiza el mísmo trabajo cuando vamos por *todas* las trayectorias posibles ya que son infinitas pero al menos podemos comprobar que da lo mismo para dos trayectorias posibles. Recordemos que en el ejemplo 2 de trabajo mecánico habiamos resuelto el problema:

Un bloque de peso 40 **kg** se deja caer desde una altura de 10m deslizandose sobre una rampa de cuarto de circulo con radio $R = 10m$ sin roce. Determinar el trabajo que realiza el peso y la normal a la rampa.

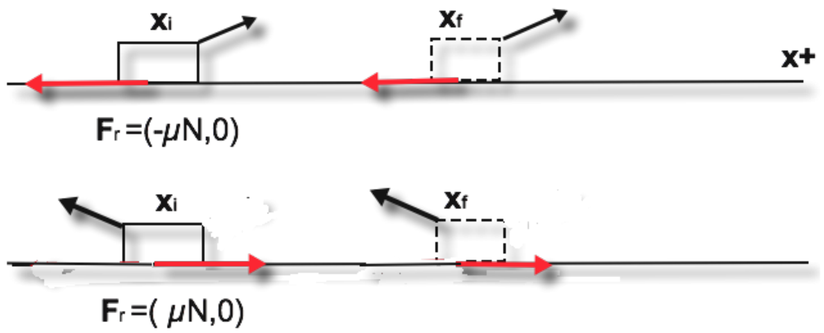
Podríamos pedir calcular el trabajo cuando conectamos el punto incial y final con un plano inclinado como muestra la siguiente figura



donde ahora la trayectoria es la recta $y = -x$ poniendo el origen en el punto de partida, y el desplazamiento $d\mathbf{r} = (dx, dy = -dx)$, asi obtendremos

$$W_{\mathbf{P}}^{if} = \int_{(0,0)}^{(R,-R)} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^R (-mg)(-dx) = mg \int_0^R dx = mgR = 400kgm$$

que es lo mismo que daba antes cayendo por la rampa semicircular, esto nos convence de que el peso es una fuerza conservativa. Para convencernos de que la fuerza de roce no es conservativa podríamos hacer una cuenta muy sencilla, calcular el trabajo que hace dicha fuerza cuando un cuerpo es arrastrado desde x_i a x_f y vuelto a traer al punto inicial



con lo que el trabajo de la fuerza de roce será

$$\oint \mathbf{F}_r \cdot d\mathbf{r} = -\mu N \int_{x_i}^{x_f} dx + \mu N \int_{x_f}^{x_i} dx = -2\mu N(x_f - x_i) \neq 0$$

con lo cual no puede ser una fuerza conservativa. Finalmente observemos que si nos dan la fuerza nos es permitido definir la energía potencial como

$$U_c(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r}'$$

donde hemos elegido un origen donde asumimos $U_c(0) = 0$, que podría ser por ejemplo donde la fuerza se anula pero que carece de importancia ya que siempre calculamos diferencias de energías y el valor de la energía en el origen se cancelará. También es posible si se nos dá la función energía potencial calcular la fuerza, veamoslo en una dimensión

$$U_c(x) \;=\; -\int_{\mathbf{0}}^{x} F_c dx'$$

si derivamos tendremos

$$\frac{dU_c(x)}{dx} \;=\; -F_c(x) \Longrightarrow F_c(x) = -\frac{dU_c(x)}{dx}$$

asi por ejemplo en el caso del peso la coordenada es la altura y entonces si $U_g(y) = mgy \Longrightarrow -\frac{dU}{dy} = -mg = P_y$ pues recordemos que $\mathbf{P} = (0, -mg)$. Más generalmente tendremos que

$$\boxed{\mathbf{F}_c(\mathbf{r}) \;=\; -\nabla U_c(\mathbf{r}),\ \nabla = (\frac{\partial}{\partial_x}, \frac{\partial}{\partial_y}, \frac{\partial}{\partial_y}),}$$

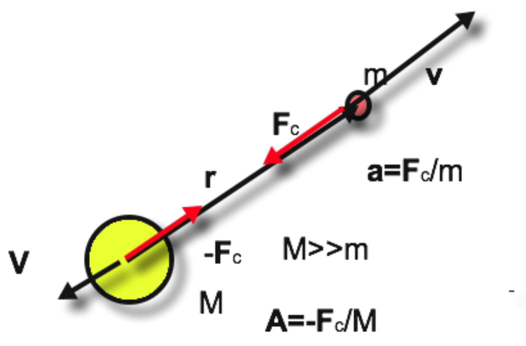
y entonces si nos dan la expresión de U_c podemos inferir propiedades de la fuerza que genera dicha energía potencial.

4.4 Conservación de la energía mecánica

Recordemos que habiamos definido la energía potencia con la fuerza actuante entre dos partículas, una mucho más masiva (M) que la otra (m) y que considerabamos casi en reposo o a velocidad constante (recordemos que podemos tomar un sistema de referencial inercial sobre una partícula no acelerada). De ésta manera pensabamos en una partícula en un "campo de fuerzas" generador por la otra que poniamos en el origen de coordenadas por comodidad. Sin embargo es un sistema de dos partículas y más adelante estudiaremos como extender nuestros conceptos definidos para una partícula a un sistema, pero por el momento podriamos deninir la energía mecánica de este sistema como la suma de la energía cinética más la potencial de interacción

$$\begin{aligned} E_M &= E_c + U_c \\ E_c &= \frac{1}{2}M\mathrm{V}^2 + \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 \\ U_c &\equiv U_c(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector relativo de la partícula liviana respecto a la pesada. Notemos que la energía potencial la contamos una sóla vez porque es la de interacción entre las partículas, no es algo individual y que por el principio de acción y reacción es percibida por ambas partículas. Sin embargo debido a la masa la aceleración sufrida por la más masiva y mucho menor que la sufrida por la otra.



Como la aceleración **A** será practicamente despreciable cuando el sistema experimente un cambio tendremos $\Delta E_M = \Delta E_c + \Delta U_c$ con $\Delta E_c = \Delta E_c^M + \Delta E_c^m \approx \Delta E_c^m, \Delta U_c = U_c(\mathbf{r}_f) - U_c(\mathbf{r}_i)$,donde como el cuerpo M tiene velocidad casi constante podemos pensar que $\mathbf{r}$ mide la posición instantanea de m respecto al origen de coordenadas colocado en M. Por lo tanto aunque hablemos de cambios en la partícula más liviana y pongamos $E_M = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 + U_c(\mathbf{r})$ debemos recordar que se encuentra dentro de un sistema. Además podriamos tener más de una fuerza conservativa que actua entre ambas partículas entonces allí cambiaremos $U_c \to \sum_c U_c$. Además podriamos tener fuerzas no conservativas (nc) entre ambas partículas por ejemplo cuando un patinador se mueve sobre la tierra, hay roce entre los patines y el suelo.

Habiemdo hecho estas aclaraciones supongamos que la fuerza neta actuando sobre la partícula m es $\mathbf{F}_N = \sum_c \mathbf{F}_c + \sum_{nc} \mathbf{F}_{nc}$ y el trabajo de dicha fuerza neta vimos antes que lo podemos conectar con la variación de energía cinética

$$W_{\mathbf{F}_N}^{if} = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_f^2 - \frac{1}{2}m\mathrm{v}_i^2 \equiv \Delta E_c^{if}$$

y por otro lado como la fuerza neta esta compuesta por fuerzas conservativas y no conservativas

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{F}_N}^{if} &= \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \sum_c \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C},\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \sum_{nc} \mathbf{F}_{nc} \cdot d\mathbf{r} = \\ &= \int_{\mathcal{C},\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \sum_{nc} \mathbf{F}_{nc} \cdot d\mathbf{r} - \Delta \left(\sum_c U_c \right)^{if} \\ &\equiv \int_{\mathcal{C},\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \sum_{nc} \mathbf{F}_{nc} \cdot d\mathbf{r} - \Delta U^{if}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la definición de energía potencial, y donde notamos que el trabajo de las no conservativas dependerá de la trayectoria seguida por la partícula, asi tendremos finalmente juntando ambas ecuaciones anteriores

$$\boxed{\Delta E_c^{if} + \Delta U^{if} = W_{\mathcal{C},nc}^{if}.}$$

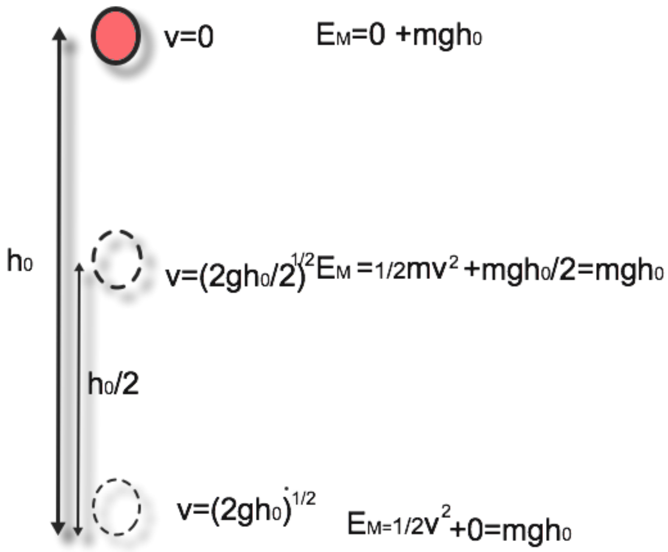
Que es el teorema trabajo -variación de energía mecánica. Esta expresión nos dice que *cuando las fuerzas no conservativas no realicen* trabajo (que no es lo mismo que decir que no hayan fuerzas no conservativas) se conservará la energía mecánica del sistema

$$\Delta E_M^{if} = \Delta E_c^{if} + \Delta U^{if} = 0 \Longrightarrow E_M^i = E_M^f.$$

Que el trabajo de las fuerzas no conservativas sea nulo puede darse en diversas circunstancias, por ejemplo cuando no hay fuerzas no conservativas como en la ausencia de roce o cuando sean ortogonales a la trayectoria y no realicen trabajo, como la normal a una superficie que es no conservativa (no podemos asociarle una energía potencial) o las tensiones en las cuerdas.

Ejemplo 1

Cuando un cuerpo de masa m realiza una caida libre en el vacio puede comprobarse usando cinemática que la cantidad $E_M = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 + mgh$ permanece constante durante la caida, ya que no habra roce con el aire y $W_{nc} = 0$



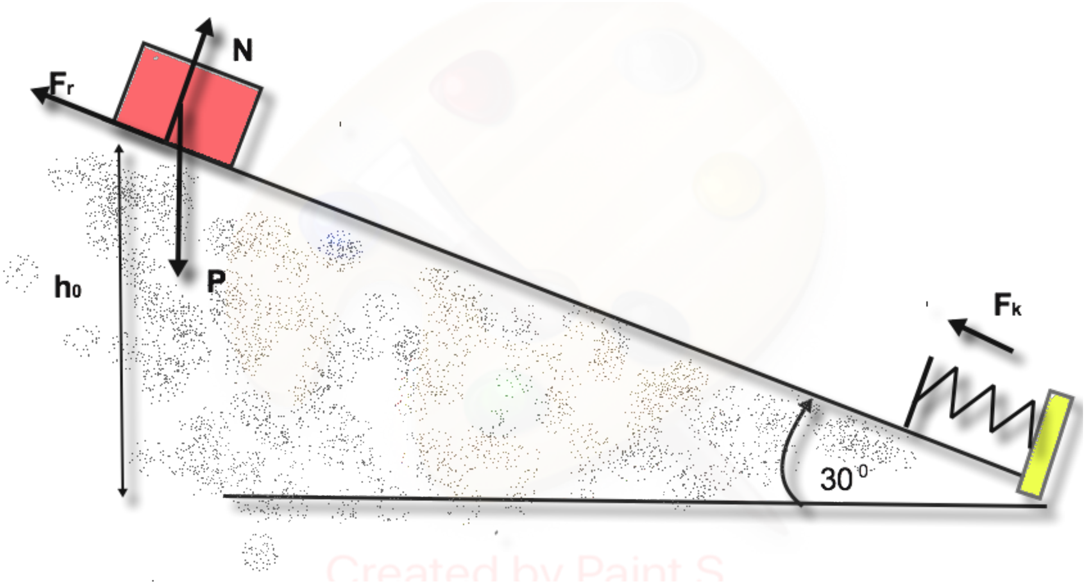
Observemos que la energía cinética y potencial no se consrvan por separado, sino que peuede haber transformación entre ambas a medida que el cuerpo cae conservandose la total o mecánica. Pablito podía esconder 3 cubitos un día en su caja y 25 en la bañera o 10 en su caja y 18 en la bañera pero siempre tendremos 28.

Cuando hay fuerzas no conservativas (o disipativas) que realizan trabajo, no es que no haya conservación de la energía en general, sino que no se conserva la energía mecánica porque se produce una transformación de parte de dicha energía mecánica en energía interna (agitación de atomos y moléculas) de los cuerpos en fricción, es decir una transformación de energía mecánica a otra forma de energía que aún no hemos considerado. El incremento de energía interna va acompañado normalmente con una aumento de temperatura y ya veremos en el próximo curso de Física que dependiendo de los materiales en contacto y de ese aumento de temperatura puede calcularse el cambio en la energía interna. Así por ejemplo nos frotamos las manos para calentarnos. Si ahora consideraramos a la energía del sistema como $E_M + E_{int}$ tendriamos conservación de la energía.

La solución de problemas utilizando el teorema trabajo-variación de energía mecánica es apropiada cuando queremos conocer magnitudes del sistema después de una transformación o proceso sabiendo cuales son las condiciones iniciales, las energias potenciales presentes en el problema y como actuan las fuerzas no conservativas. Este procedimiento suele ser mas sencillo que resolver directamente las ecuaciones de movimiento para las partículas y fuerzas presentes.

Ejemplo 2

Desde la parte superior de un plano inclinado se suelta un cuerpo de masa $m = 20kg$ desde una altura de 5m. El plano tiene una inclinación de 30^0 y en su parte inferior se encuentra un resorte de constante $2000N/m$. El plano inclinado tiene un coeficiente de roce con el cuerpo $\mu_d = 0.5$. Determinar cuanto se comprime el resorte cuando llega a la parte inferior.



La energía potencial del sistema tierra-cuerpo (el plano está sujeto a la tierra) es $U = mgh + \frac{1}{2}k\Delta x^2$ donde Δx es el estiramiento o compresión, y hemos puesto nuestro eje x a lo largo del plano . Las fuerzas no consevativas presentes son la normal $\mathbf{N} = N\hat{j}$ que no realiza trabajo y la fuerza de roce constante $\mathbf{F}_r = -N\mu_d\hat{i}$. Vemos que la normal es $N = mgcos30^0$. Asi si aplicamos el teorema trabajo-energía a este ejemplo tendremos (L es la longitud del plano inclinado)

$$\begin{aligned} W_{nc}^{if} &= E_M^f - E_M^i \\ W_{nc}^{if} &= NLcos90^0 + N\mu Lcos180^0 = 0 - mgcos30^0\mu L,\ L = h_0/sen30^0 \\ E_M^i &= 0 + mgh_0 + 0,\ E_M^f = 0 + 0 + \frac{1}{2}k\Delta x^2 \end{aligned}$$

ya que la energía cinética al comienzo y al final es nula. Notemos que hemos despreciado el Δx en el trabajo de la fuerza de roce suponiendo que es mucho menor que L. Así colocando los números tendremos

$$\begin{aligned} -20 \times 9.8N \times 0.86 \times 0.5 \times \frac{5m}{0.5} &= \frac{1}{2}2000\frac{N}{m}\Delta x^2 - 20 \times 9.8N \times 5m \\ -842.8J &= 1000\frac{N}{m}\Delta x^2 - 980J \\ \Delta x &= \sqrt{\frac{980J - 842.8J}{1000N/m}} = 0.37m \end{aligned}$$

que si es pequeño frente a $L = 10m$.