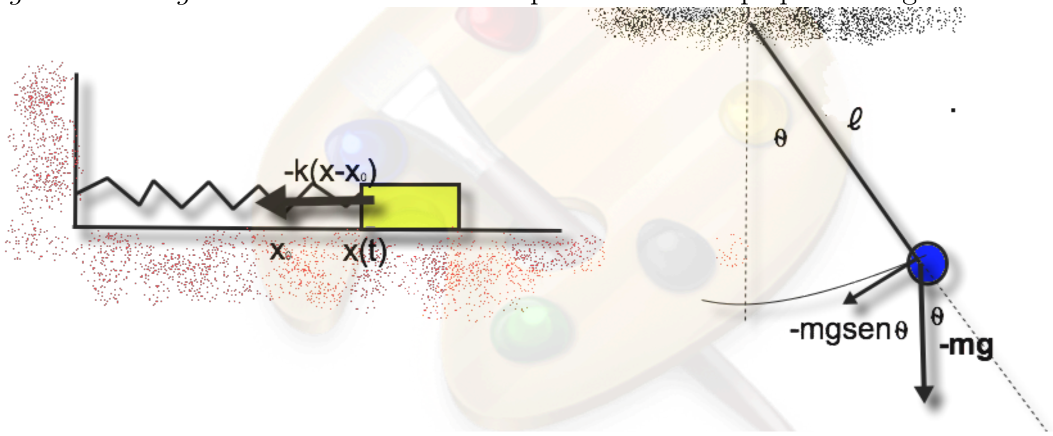
5 Oscilaciones

5.1 Cinemática y dinámica

Un movimiento periódico es aquel donde la partícula repite después de un periodo T su posición y velocidad. Estudiaremos movimientos unidimensionales o aquellos que puedan describirse con una sóla coordenada, como el ángulo barrido en un movimirnto circular. Asi si $x(t)$ es la coordenada que describe el movimiento deberá cumplirse que $x(t+T) = x(t)$. Existen varos ejemplo de este tipo de movimiento, por ejemplo el movimiento circular uniforme, un péndulo de un reloj en ausencia de roce en el eje o con el aire, un bloque unido a un resorte en ausencia de roce interno en el resorte y con la superficie donde desliza etc.

Dentro de los movimientos periódicos un caso especial e importante es el movimiento oscilatorio armónico, porque la función que describe la posición es una función armónica o sea seno o coseno. Ahora si nos preguntamos que fuerza puede producir un movimiento oscilatorio armónico, veremos que son por ejemplo la fuerza que produce un resorte para pequeñas oscilaciones que es proporcional al estiramiento respecto a la posición sin estiramiento de la punta del resorte $F_k(x) = -k(x - x_0)$, la cual se conoce como ley de hooke. Tambien la componente tangencial del peso en un péndulo para pequeños ángulos de apartamiento de la vertical $P_t(\theta) = -mgsen\theta \approx -mg\theta$ donde hemos hecho la aproximación de pequeños ángulos $sen\theta \approx \theta$,



aqui hemos puesto sentido positivo hacia la derecha en el primer gráfico y antihorario en el 2do. Ahora, si aplicamos la segunda ley de Newton para movimiento en el eje x o para el movimiento tangencial del péndulo (suponemos que la soga que conecta la partícula con el techo es inextensible y sin masa) tendremos

$$\begin{aligned} -k(x(t) - x_0) &= ma(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) &= 0 \\ -mg\theta(t) &= ma_t(t) = ml\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta(t) &= 0 \end{aligned}$$

donde vemos que las ecuaciones pra $x(t)$ o $\theta(t)$ son muy similares. No vamos a hacer un desarrollo del método matemático para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes como las obtendidas, ya que seguramente van a desarrollarlo en los cursos de análisis matemático I o II, solamente diremos que las soluciones pueden ser (lo haremos para el resorte pero las consideraciones son similares para el péndulo)

$$x(t) = Asen(\omega t + \delta) \text{ ó } cos(\omega t + \delta)$$

que son funciones armónicas, y donde A y δ dependerán de las condiciones iniciales con que comience el movimiento. En tanto que ω puede determinarse para que dichas expresiones sean solución. Elijamos el conseno $x(t) = Acos(\omega t + \delta)$ y reemplacemos en

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

tendremos

$$\begin{aligned} -A\omega^2 cos(\omega t + \delta) + A\frac{k}{m}cos(\omega t + \delta) &= 0 \\ (-\omega^2 + \frac{k}{m})Acos(\omega t + \delta) &= 0 \end{aligned}$$

y como se debe cumplir que sea cero para todo tiempo y el coseno no lo es, tendremos que deberá ser

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

donde hemos elegido la solución positiva de la raiz pues ya veremos la interpretación física que tiene esta cantidad. Asi que finalmente obtenemos

$$x(t) = \omega Acos(\omega t + \delta),\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

donde la velocidad y aceleración pueden obtenerse calculando la derivada 1era y 2da respectivamente

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = -\omega Asen(\omega t + \delta) \\ a(t) &= \frac{dv}{dt} = -\omega^2 Acos(\omega t + \delta). \end{aligned}$$

Es importante notar que si hacemos un desarrollo de Taylo alrededor de la posición x_0 de longitud natural del resorte (suponemos que la función que representa a la fuerza lo permite) tendremos

$$F_k(x) = F_k(x_0) + F_k'(x_0)(x - x_0) + \frac{F_k''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{F_k'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \frac{F^{\mathrm{iv}}(x_0)}{24}(x - x_0)^4 + ...,$$

donde $F_k(x_0) = 0$ por no haber fuerza a la longitud natural, y que la ley de Hooke corresponde a la aproximación de primer orden con $F_k'(x_0) = -k$. Además es importante notar que un movimiento periódico solo puede darse para potencias pares del desarrollo pues tomando la derivada negativa, el signo de la fuerza la hace apuntar hacia x_0 estando a derecha o izquierda, mientra que para una potencia impar en alguno de los dos casos tendremos una fuerza que se aparte de x_0 no pudiendo la partícula volver a recorrer la trayectoria anterior.

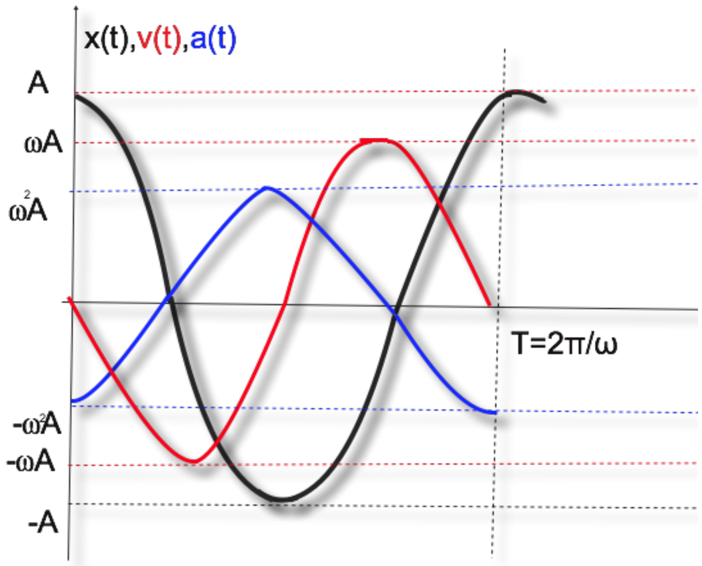
Antes de pasar a hacer una análsis del significado físico del movimiento notemos que se nos deben dar condiciones iniciales (en $t = 0$) $x_0 \equiv x(0), v_0 \equiv v(0)$ para poder definir el movimiento por completo, desde el punto de vista matemático diremos que una ecuación diferencial de segundo orden debe complementarse con dos condiciones iniciales. Así deberá cumplirse

$$
\begin{aligned}
x_0 &= Acos(\delta) \\
v_0 &= -\omega Asen(\delta)
\end{aligned}
$$

de donde puede obtenerse $x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2$, $\frac{-v_0/\omega}{x_0} = tang\delta$, ya que $sen^2\delta + cos^2\delta = 1$ y así finalmente obtenemos

$$
\begin{aligned}
A &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \\
\delta &= arctg(\frac{-v_0/\omega}{x_0})
\end{aligned}
$$

donde podriamos haber elegido el signo negativo de la raiz, pero esto conllevaría a cambiar la elección de δ , ya que hay dos ángulos con la misma tangente en el intervalo $[0, 2\pi]$, asi que basta con quedarnos con uno y elegimos el positivo por comodidad en la expresión. En la siguiente figura esquematizamos en caso $\delta = 0$ que corresponde a la situación cuando la partícula parte de $x_0 = A, v_0 = 0$, o sea cuando el resorte se estira hasta la posición $x_0 = A$ y se suelta



Es importante hacer las siguientes observaciones :

- La frecuencia angular $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ esta relacionada con el periodo del movimiento como$T = 2\pi/\omega$ pues $x(t+T) = Acos(\omega t + \cancel{\omega}\frac{2\pi}{\cancel{\omega}}) = x(t)$ ya que las funciones armónicas son periódicas con periodo 2π. Lo mísmo sucede para la velocidad y la aceleración que vuelven a repetirse a intervalos de tiempo T. Como el movimiento se realiza entre $x = \pm A$ a A se la suele llamar amplitud del movimiento.

- En número de oscilaciones por segundo o frecuencia es $f = 1/T$ y asi $\omega = 2\pi f$, y se mide en $1/seg$ que se denomina Hertz o usando multiplos del segundo en el denominador.

- La velocidad está atrasada en $T/4$ o desfasada en $-\pi/2$, respecto de la posición pues cuando x es máxima v es cero , cuando x e cero v es máxima pero con signo negativo porque el sentido positivo es hacia la derecha, y asi. La aceleración esta atrasada en $T/2$ o desfasada en $-\pi$ respecto a la posición. Cuando tenemos posición máxima la aceleración (y la fuerza es máxima) con signo negativo o sea hacia el centro.

5.2 Energética

Ya hemos calculado el trabajo en contra de la fuerza del resorte para obtener la energía potencial elástica y obtuvimos

$$U_k(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

donde pusimos el origen donde el resorte no está estirado ni comprimido. Por otro lado para el péndulo la energía es la potencial gravitatoria para pequeñas oscilaciones

$$\begin{aligned} U_g(h) &= mgh = mg(l - lcos\theta) \\ cos\theta &\approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \\ U_g(h) &\approx \frac{1}{2}mgl\theta^2 \end{aligned}$$

donde hemos hecho una aproximación de 2do orden para pequeños ángulos en el coseno porque la de primer orden dá cero. Notemos las similitud entre ambas expresiones, la del resorte y la del péndulo cambiando $k \leftrightarrow mgl$. Notemos que la energía mecánica del sistema tierra-resorte o tierra-péndulo se conserva porque el trabajo de las fuerzas no conservativas (la normal para el resorte y la tensión para el péndulo) es cero en ausencia de roce. Así

$$\begin{aligned} E_M &= \frac{1}{2}mv(t)^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2 = cte \\ E_M &= \frac{1}{2}m(l\frac{d\theta(t)}{dt})^2 + \frac{1}{2}mgl\theta(t)^2 = cte. \end{aligned}$$

y no es difícil comprobar que la energía mecánica se mantiene constante a lo largo del movimiento pues por ejemplo para el péndulo

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_{max}cos(\omega t + \delta) \\ l\frac{d\theta(t)}{dt} &= -l\omega\theta_{max}sen(\omega t + \delta) = -l\sqrt{\frac{g}{l}}\theta_{max}sen(\omega t + \delta) \\ E_M &= \frac{1}{2}mlg\theta_{max}^2(sen^2(\omega t + \delta) + cos^2(\omega t + \delta)) = \frac{1}{2}mlg\theta_{max}^2 \end{aligned}$$

que es una constante independiente del tiempo y sólo depende de la aplitud angular máxima de la que es soltado o llega el péndulo. Notemos que el periodo del péndulo es $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ depende de su longitud y de la aceleración de la gravedad del planeta donde oscila, asi en la luna que tiene una g menor oscilará más lento pues tendrá un mayor periodo.

Ejemplo:

Un resorte de constante $k = 200N/m$ tiene atada una masa de $0.5kg$, quisieramos saber cual es la expresión de su posición en el tiempo cuando en $t = 0$ se la coloca en $x_0 = 0$ y se le da un empujón con velocidad $v_0 = 2m/seg$. Primeramente notemos que

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{4m/seg^2}{\frac{200N/m}{0.5kg}}} = \sqrt{\frac{2}{200}m^2} = 0.1m = 10cm$$

$$\omega = \sqrt{\frac{200N/m}{0.5kg}} = \frac{20}{seg}$$

y que

$$\delta = arctg(\frac{\frac{-2m}{20}}{x_0})\overrightarrow{x_{0\to 0}} - \pi/2$$

y así tendremos $x(t) = 10cm \cos(\frac{20}{seg}t\text{-}\frac{\pi}{2})$. También quiseramos saber cuál es la energía total del sistema y según lo analizado anteriormente para el péndulo y haciendo el cambio $k, \theta_{max} \leftrightarrow mgl, A$ obtendremos $E_M = \frac{1}{2}kA^2 = 0.5 \times 200N/m \times 0.1^2 = 1Joule$.