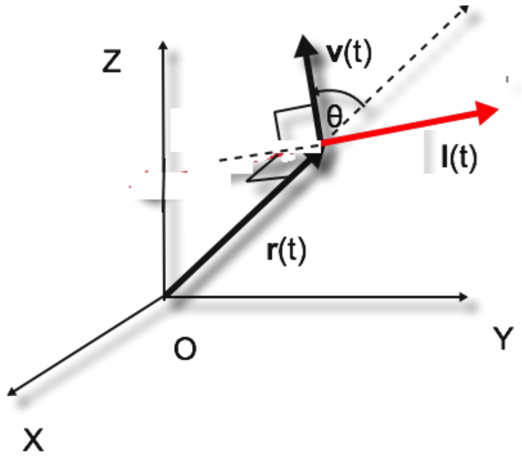
7 Rotaciones

7.1 Momento angular

Queremos definir para una partícula una magnitud que conecte el vector posición $\mathbf{r}$ y su vector velocidad $\mathbf{v}$ que llamaremos cantidad de movimiento angular o momento angular $\mathbf{l}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t) = m(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t))$. Notemos que esta magnitud vectorial es perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$ (o $\mathbf{v}$), su sentido lo da la regla de la mano derecha (que mencionamos cuando repasamos el producto vectorial al comienzo del curso regular) y su módulo depende tanto de la distancia de la partícula al orígen, el módulo su velocidad, su masa y del ángulo formado por el vector posición y la velocidad $\mathrm{l} = m\mathrm{rv}sen\theta$

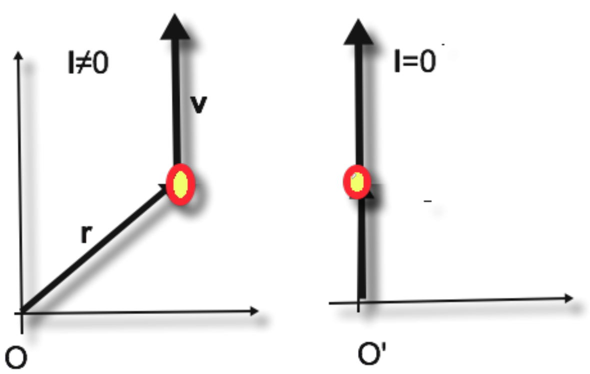


Es importante a hacer alguna observaciones respecto al momento angular

- Puede calcularse usando un determinante donde en la primera fila ubicamos a los versores unitarios $\hat{\imath}, \hat{\jmath},\hat{k}$, en la 2da x, y, z (componentes de $\mathbf{r}$) y en la 3ra v_x, v_y, v_z (componentes de $\mathbf{v}$)

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = (yv_z - zv_y)\hat{\imath} - (xv_z - zv_x)\hat{\jmath} + (xv_y - yv_x)\hat{z}$$

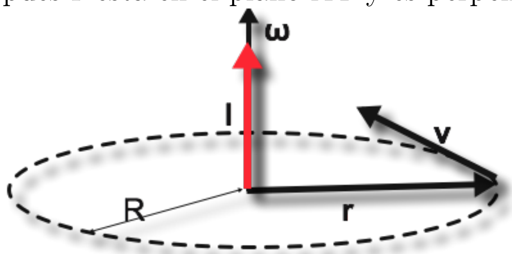
- Depende del sistema de referencia por ejemplo una partícula con velocidad constante puede tener momento angular nulo o no dependiendo de como se elijan los ejes coordenados



- Es una cantidad relacionada con las rotaciones, pues supongamos tener una partícula realizando un movimiento circular en un plano XY y supongamos colocar el origen de coordenadas en el centro de la circunferencia trayectoria, entonces tendremos($\boldsymbol{\omega}(t) = \omega\hat{k}$) y usando la identidad $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}$ tendremos

$$\mathbf{l}(t) = m\mathbf{r}(t)\times\mathbf{v}(t) = m\mathbf{r}(t)\times(\omega(t)\times\mathbf{r}(t)) = mR^2\boldsymbol{\omega}(t) - \cancelto{0}{\mathbf{r}(t)\cdot\boldsymbol{\omega}(t)}\mathbf{r}(t)$$

pues $\mathbf{r}$ esta en el plano XY y es perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$ como se ve en la siguiente figura



donde vemos que $\mathbf{l} = mR^2\boldsymbol{\omega}$ y es proporcional, con una constante de proporcionalidad $\mathrm{I} = \mathrm{mR}^2$ llamada momento de inercia de la partícula, a la velocidad angular.

7.2 Momento de una fuerza o torque

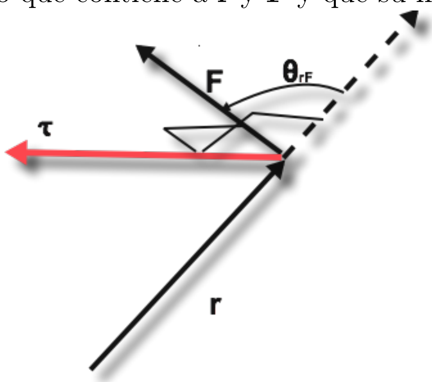
Ya vimos que el momento angular esta relacionado en las rotaciones y asi como en la 2da Ley de Newton la variación de la cantidad de movimiento está generada por la fuerza neta, quisieramos saber quien es responsable de la variación temporal del momento angular. Tomemos la derivada respecto al tiempo y tratemosla como la derivada de un producto

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{p} + \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \cancelto{0}{\mathbf{v}\times\mathbf{p}} + \mathbf{r}\times\mathbf{F}_N,$$

donde hemo tenido en cuenta que la cantidad de movimiento y la velocidad son colineales y hemos aplicado la segunda Ley de Newton, asi descubrimos que

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_N,\ \boldsymbol{\tau}_N \equiv \mathbf{r}\times\mathbf{F}_N,$$

y al vector $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$ se lo denomina torque de la fuerza $\mathbf{F}$ donde $\mathbf{r}$ es el vector posición del punto de aplicación de la fuerza que en este caso es sobre una partícula. Notemos que el torque es, según su definición, perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ y que su módulo $\tau = \mathrm{rF}sen\theta_{\mathbf{rF}}$ depende de los modulos y del ángulo entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$.



Algunas observaciones son importantes

- Notemos que cuando $\theta_{\mathbf{rF}} \neq 0, 180^0$ la fuerza tiende a generar una rotación del vector $\mathbf{r}$, mientras que cuando $\theta_{\mathbf{rF}} = 0, 180^0$ produce un estiramiento o compresión del vector posición y allí el torque vale cero.
- Cuando $\mathrm{r} = R = cte$ tenemos una partícula en movimiento circular y allí vimos que $\mathbf{l} = mR^2\boldsymbol{\omega}$ y por lo tanto

$$\boldsymbol{\tau}_N = \frac{d\mathbf{l}}{dt} \quad = \quad mR^2\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathrm{I}\boldsymbol{\alpha},$$

vemos cierta similitud con la 2da ley de Newton pero ahora la fuerza neta fue reemplazado por el torque de dicha fuerza neta, la masa por el momento de inercia de la partícula y la aceleración lineal por la aceleración angular. Notemos que la inercia frente a rotaciones no depende sólo de la masa sino también de la distancia de dicha masa al eje de rotación.

- Notemos que por su deinición el torque que produce la fuerza neta es

$$\boldsymbol{\tau}_N \quad = \quad \mathbf{r} \times \mathbf{F}_N = \mathbf{r} \times \sum_k \mathbf{F}_k = \sum_k \mathbf{r} \times \mathbf{F}_k = \sum_k \boldsymbol{\tau}_k,$$

o sea es la suma de los torques individuales de cada fuerza actuante sobre la partícula, por esto lo llamamos también torque neto.

7.3 Rotaciones en un sistema de partículas

Podemos extender ahora el concepto de momento angular a un sistema de partículasy por similitud con la cantidad de movimiento definamos el momento angular del sistema como la suma de los individuales

$$\mathbf{L} \quad = \quad \sum_{i=1}^{N} \mathbf{l}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

donde ahora cada vector posición y fuerza neta estan rotulados para cada i-esima partícula del sistema. De igual manera tendremos como hicimos antes para un partícula

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad = \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{d(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\tau}_{iNeto},$$

donde nuevamente recordamos que $\mathbf{F}_{iN} = \sum_{k=1,k\neq i}^{N} \mathbf{F}_{ik} + \sum_k \mathbf{F}_{ik}^{ext}$ pues puede haber también fuerzas externas al sistema. De allí podemos separar

$$\boldsymbol{\tau}_{iN} \quad = \quad \sum_{j=1,j\neq i}^{N} \mathbf{r_i} \times \mathbf{F}_{ij} + \sum_{k(ext)} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik}^{ext} \equiv \boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{int} + \boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{ext},$$

el torque neto sobre cada partícula es el torque neto debido a fuerzas internas y externas. Ahora notemos la siguiente propiedad importante, consecuencia del principio de acción y reacción y de tener fuerzas centrales

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{int} \quad = \textstyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N} \mathbf{r_i} \times \mathbf{F}_{ij} \quad &= \mathbf{r_1} \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r_1} \times \mathbf{F}_{13} + ... + \mathbf{r_2} \times \mathbf{F}_{21} + \mathbf{r_2} \times \mathbf{F}_{23} + ... \\ &= \mathbf{F}_{12} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \mathbf{F}_{13} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + ...\end{aligned}$$

donde hemos usado el principio de acción y reacción para cada par de partículas $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}, \mathbf{F}_{13} = -\mathbf{F}_{31}, ...$ademas si las fuerzas se dirijen en la recta que une a las partículas $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,||\,\mathbf{F}_{12}, (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)\,||\,\mathbf{F}_{13}, ...$ y por lo tanto como los productos vectoriales entre vectores paralelos dan cero tendremos

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{int} = \mathbf{0}$$

con lo que sólo sobreviven los torques generados por fuerzas externas al sistema. Esto es similar a lo sucedido cuando calculabamos la variación temporal de la cantidad de movimiento total del sistema donde sólo sobrevivian las fuerzas externas, tendremos entonces

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{ext},\ \boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{ext} = \sum_{k} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik}^{ext}, \\ \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{iNeto}^{ext},\ \boldsymbol{F}_{iNeto}^{ext} = \sum_{k} \mathbf{F}_{ik}^{ext}. \end{aligned}}$$

De esta manera tanto la evolución temporal de la cantidad de movimiento total del sistema y el momento angular total queda fijada por las interacciones externas al sistema. Ahora, nosotros vimos que se podía escribir $\mathbf{P} = M\mathbf{V}_{CM}$, y podriamos intentar ver si podemos conectar el momento angular total ahora con el CM también, entonces pasemos del LAB al CM usando

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_{CM}(t) + \mathbf{R}_{CM}(t) \\ \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}_{CM}(t) + \mathbf{V}_{CM}(t) \end{aligned}$$

con lo que tendremos

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{l}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(\mathbf{r}_{iCM} + \mathbf{R}_{CM}) \times (\mathbf{v}_{iCM} + \mathbf{V}_{CM})\right] \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i(\mathbf{r}_{iCM} \times \mathbf{v}_{iCM}) + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_{iCM}\right) \times \mathbf{V}_{CM} + \mathbf{R}_{CM} \times \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_{iCM}\right) + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) \mathbf{R}_{CM} \times \mathbf{V}_{CM} \\ &= \mathbf{L}_{CM} + M(\cancelto{0}{\mathbf{R}_{CM,CM}} \times \mathbf{V}_{CM}) + M(\mathbf{R}_{CM} \times \cancelto{0}{\mathbf{V}_{CM,CM}}) + M(\mathbf{R}_{CM} \times \mathbf{V}_{CM}) \\ &= \mathbf{R}_{CM} \times \mathbf{P} + \mathbf{L}_{CM} \equiv \mathbf{L}_{orb} + \mathbf{L}_{int}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que tanto la posición como la velocidad del CM respecto al CM es nula y asi vemos que el momento angular total se descompone en una parte que correspondería a una partícula ficticia de mas M que se mueve con el CM más el momento angular del sistema calculado respecto a CM que suelen llamarse orbital e interno o intrínseco respectivamente.A su vez en el torque externo tendremos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{ext} = \sum_{k} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik}^{ext} &= \sum_{k} (\mathbf{r}_{iCM} + \mathbf{R}_{CM}) \times \mathbf{F}_{ik}^{ext} \\ &= \left(\boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{ext}\right)_{CM} + \mathbf{R}_{CM} \times \mathbf{F}_{iNeta}^{ext} \end{aligned}$$

o sea descomponemos cada torque externo en torque respecto del CM más el torque de la fuerza externa neta sobre una partícula que se mueve como el CM, suponiendo que las fuerzas y tendremos

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{R}_{CM} \times \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{iNeta}^{ext}\right) + \sum_{i=1}^{N} \left(\boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{ext}\right)_{CM}.$$

Finalmente teniendo en cuenta que

$\frac{d\mathbf{L}_{orb}}{dt} = \frac{d(\mathbf{R}_{CM}\times\mathbf{P})}{dt} = \cancelto{0}{\mathbf{V}_{CM} \times \mathbf{P}} + \mathbf{R}_{CM} \times \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{R}_{CM} \times \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{iNeta}^{ext}\right)$,deberemos tener

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_{orb}}{dt} &= \mathbf{R}_{CM} \times \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{iNeta}^{ext}\right), \\ \frac{d\mathbf{L}_{int}}{dt} &= \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{r}_{iCM} \times \mathbf{F}_{iNeta}^{int}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{ext}\right)_{CM}. \end{aligned}}$$

Parecería que se han desacoplado las evoluciones temporales de el momento angular orbital y en intrínseco, pero notemos que $\mathbf{F}_{iNeta}^{ext} \equiv \mathbf{F}_{Neta}^{ext}(\mathbf{r}_{iCM} + \mathbf{R}_{CM})$ porque las interacciones pueden depender de la posición de las partículas y asi ambas ecuaciones estan acopladas salvo en casos especiales.

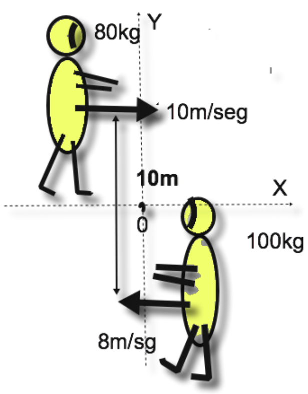
Notemos que cuando $\sum_k \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik}^{ext} = \mathbf{0}$ o sea la suma de todos los torques externos da cero entonces

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{cte},}$$

y tenemos nuestra tercera ley de conservación, la del momento angular del sistema. Esto no implica que no haya fuerzas externas, que en ese caso no habria torque externo, sino que las suma de los torques den cero. En el caso de las fuerzas centrales externas que cumplen $\mathbf{F}_{iNeta}^{ext} || \mathbf{r}_i$ los torques también dan cero. Un ejemplo es la fuerza gravitacional entre dos cuerpos.

Ejemplo

Dos astronautas (considerados como un sistema de partículas) estan alejados de cualquier planeta $\sum_{i=1}^{N=2} \mathbf{F}_{iNeta}^{ext} \approx \mathbf{0}$ y se acercan uno a otro con velocidad constante como muestra la figura. En el momento que pasan uno frente a otro uno arroja una cuerda , el otro la agarra y el primero pega un tiron durante 0.1seg de $200N$. Determinar que tipo de movimiento tiene el CM y la velocidad de c/u después del tirón. Que sucede con el momento angular total?



La velocidad del CM debe ser constante pues la fuerza neta externa es cero y la cantidad de movimiento del sistema $\mathbf{P} = M\mathbf{V}_{CM}$ debe mantenerse constante. Tomemos el eje x con origen en el punto medio de ambas trayectorias iniciales y paralelo a ellas y sentido positivos hacia la derecha, con esto

$$V_{CMx} = \frac{80kg \times 10m/seg - 100kg \times 8m/seg}{180kg} = 0m/seg$$

y el CM esta quieto con lo que su posición no cambiará en el tiempo. Para determinar dicha posición lo podemos hacer en cualquier momento y si lo hacemos justo cuando pasan uno frente a otro tendremos

$$\begin{aligned}
X_{CM} &= \tfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2} = \frac{0m \times 80kg + 0m \times 100kg}{180kg} = 0m \\
Y_{CM} &= \tfrac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2} \quad \frac{5m \times 80kg - 5m \times 100kg}{180kg} = -0.55m
\end{aligned}$$

y luego del tirón seguirá estando en $(0, -0.55m)$. Si suponemos que la fuerza fue constante durante el tirón tendremos después tendremos

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'_1 &= (v_1\Delta t, d/2 - 1/2(F/m_1)\Delta t^2) = (1m, 4.99m) \\
\mathbf{r}'_2 &= (v_2\Delta t, -d/2 + 1/2(F/m_2)\Delta t^2) = (-0.8m, -4.99m) \\
\mathbf{v}'_1 &= (v_1, -F/m_1\Delta t) = (10m/seg, -0.025m/seg) \\
\mathbf{v}'_2 &= (v_2, F/m_2\Delta t) = (-8m/seg, 0.01m/seg)
\end{aligned}$$

de donde hemos calculado las posiciones y velocidades luego del tirón usando cinemática notemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}'_{CM} &= \frac{m_1\mathbf{r}'_1 + m_2\mathbf{r}'_\mathbf{2}}{M} = \frac{m_1v_1 + m_2v_2 + d/2(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = (0m, -0.55m), \\
\mathbf{V}'_{CM} &= \frac{m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_\mathbf{2}}{M} = \frac{(m_1v_1 + m_2v_2) + 0}{m_1 + m_2} = (0m/seg, 0m/seg)
\end{aligned}$$

como se vió antes. Finalmente

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} = m_1(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1) + m_1(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2)m_1 \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & d/2 & 0 \\ v_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & -d/2 & 0 \\ v_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= (0, 0, -m_1v_1d/2 + m_2v_2d/2) \\
= 0, 0, -4000Nmseg - 4000Nmseg) &= (0, 0, -8000Nmseg) \\
\mathbf{L}' = (0, 0, -7998Nmseg) &\approx \mathbf{L}
\end{aligned}$$

como puede comprobarse y mejor es la coincidencia cuando menor es el intervalo donde actua la fuerza, pues a pesar de ser interna esta es sólo central y constante en un intervalo muy corto.

7.4 Cuerpo rígido

Hasta el momento no hemos hecho ninguna referencia a la naturaleza de nuestro sistema de partículas y por lo tanto nuestras conclusiones son generales. Hay un caso partícular que merece ser tratado por la variedad de situaciones en la que se presenta y es el denominado cuerpo rígido donde las posiciones relativas entre las partículas se mantienen constantes. Como las partículas no pueden acercarse ni alejarse la única posibilidad que le queda al sistema es trasladarse como un todo y rotar respecto a algún eje. La condición que permite tener en cuenta esto es que para cada partícula se cumple

$$\mathbf{v}_i(t) \;=\; \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i(t)$$

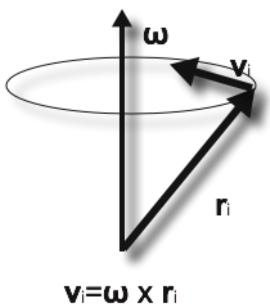
donde $\boldsymbol{\omega}$ indica una dirección y sentido y una velocidad angular de rotación común a todas las partícula. Si ahora metemos esta condición en el cálculo del momento angular del sistema tendremos ($\sum_i \equiv \sum_{i=1}^N$)

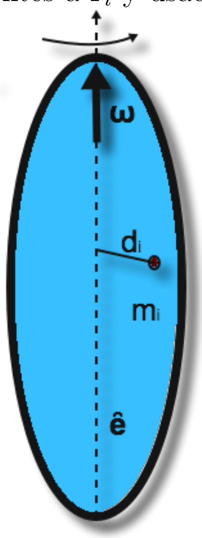
$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \sum_i m_i(\mathbf{r}_i\times\mathbf{v}_i) = \sum_i m_i(\mathbf{r}_i\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i))\\
&= -\sum_i m_i(\mathbf{r}_i\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{r}_i + \sum_i m_i(\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_i)\boldsymbol{\omega}\\
&= \sum_i m_i \mathrm{r}_i^2\boldsymbol{\omega} - \sum_i m_i(\mathbf{r}_i\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{r}_i
\end{aligned}$$

donde hemos aplicado la identidad $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = -(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$. Ahora para simplificar y sin perdida de generalidad podríamos tomar nuestro eje Z a lo largo de la velocidad angular y así $\boldsymbol{\omega} = (0,0,\omega)$ con lo que

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \sum_i m_i \mathrm{r}_i^2\boldsymbol{\omega} - \sum_i m_i z_i\omega\mathbf{r}_i\\
&= \sum_i m_i \mathrm{r}_i^2\boldsymbol{\omega} - \sum_i m_i z_i^2\,\boldsymbol{\omega} - (\omega\sum_i m_i z_i x_i, \omega\sum_i m_i z_i y_i, 0)\\
&= \sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)(0,0,\omega) - \omega(\sum_i m_i z_i x_i, \sum_i m_i z_i y_i, 0)
\end{aligned}$$

donde hemos separado en componentes a $\mathbf{r}_i$ y usado el hecho de que $\boldsymbol{\omega}$ apunta a lo largo del eje Z.





La ecuación anterior podría resumirse como

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sum_i m_i z_i xi \\ 0 & 0 & -\sum_i m_i z_i y_i \\ 0 & 0 & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix},$$

si queremos simplificar aún más, podemos considerar que el cuerpo rígido es simétrico respecto al eje de rotación como sucederia como un cilindrio girando alrededor de un eje que pasa por el centro de sus bases o una esféra alrededor de un eje que pasa por su centro y en ese caso si tenemos una partícula en (x_i, y_i, z_i) tendremos otra en $(-x_i, -y_i, z_i)$ con lo que las sumas sobre todas las partículas de $z_i x_i$y $z_i y_i$ se van, finalmente tenemos la expresión simplificada válida cuando rotamos alrededor del eje Z y cuando el cuerpo presenta simetria respecto al eje de rotación

$$L_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)\omega \equiv \left(\sum_i m_i d_i^2 \right) \omega$$

a la magnitud I $= \sum_i m_i d_i^2$ que depende de las masas de las partículas del sistema y de su distancia al eje de rotación lo llamamos momento de inercia y en este caso simplificado es un número de dimensiones $masa \times longitud^2$. En realidad podriamos tomar un eje cualquiera de rotación dirigido según $\hat{e}$ y asi $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{e}$, donde este eje es de simetria del cuerpo rígido y tendriamos

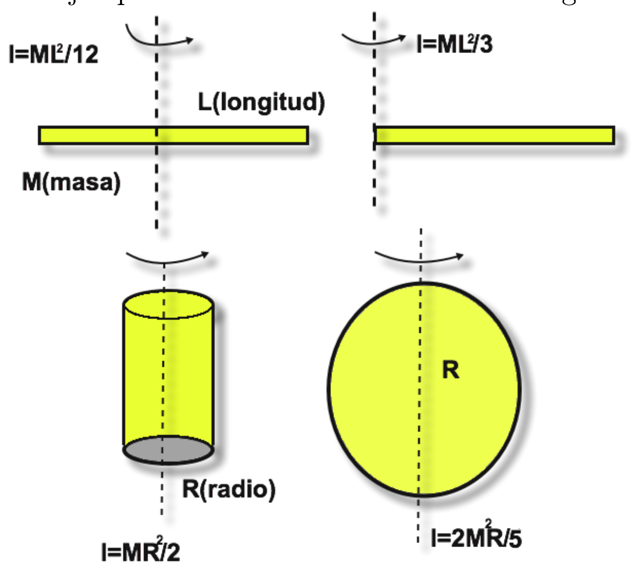
$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{L} &= I\boldsymbol{\omega} \\ I &= \sum_i m_i d_i^2, \end{aligned}}$$

siendo d_i la distancia de la partícula i-ésima al eje $\hat{e}$.

Cuando el cuerpo es continuo y su masa está distribuida según una densidad de masa $\rho(\mathbf{r})$ tendremos

$$I = \int d^3 r \rho(\mathbf{r}) d(\mathbf{r})^2,$$

donde la función distancia $d(\mathbf{r})$ me da la distancia al eje de rotación del elemento de masa $dm = \rho(\mathbf{r}) d^3 r$. Algunos ejemplos de momentos de inercia de algunos cuerpos son dados en la siguiente figura



Algunas observaciones tenemos que hacer

- Nuestro origen de coordenadas en un cuerpo de masa M lo estamos tomando sobre el eje $\hat{e}$ en algún lugar, si quisieramos calcular el momento de inercia respecto a otro eje $\hat{e}$' $\parallel$ $\hat{e}$ separado una distancia D entonces aplicamos el llamado teorema de Steiner (que puede demostrarse) y obtenemos

$$\mathrm{I}' = \mathrm{I} + MD^2$$

- Cuando tenemos un cuerpo compuesto por varias partes con momentos de inercia $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, ...$ todas calculadas respecto al mísmo eje, el momento de inercia total es $\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + ...$

- Para calcular el $\mathbf{L}_{int}$ en un cuerpo rígido respecto a algún eje de rotación que pase por el CM tendremos que calcular el momento de inercia respecto a dicho eje y así

$$\boxed{\mathbf{L}_{int} = \mathrm{I}_{CM}\boldsymbol{\omega}}$$

- La energía cinetica para un cuerpo rígido rotando respecto a un determinado eje (que como al comienzo lo colocamos primero a lo largo del eje Z) toma una forma particular usando $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{c})\,(\boldsymbol{b} \cdot \mathbf{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{d})\,(\boldsymbol{b} \cdot \mathbf{c})$

$$\begin{aligned} E_c &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathrm{v}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i [\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{2}} \mathrm{r}_i^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)^2] = 1/2\omega^2 \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \frac{1}{2} \mathrm{I}\omega^2 \end{aligned}$$

Ahora si tomamos este eje pasando por CM esta será le energía cinética intrínseca respecto al CM y la energía cinética total del sistema será

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} M {\mathbf{V}_{CM}}^2 + \frac{1}{2} \mathrm{I}_{CM} \omega^2}$$

co

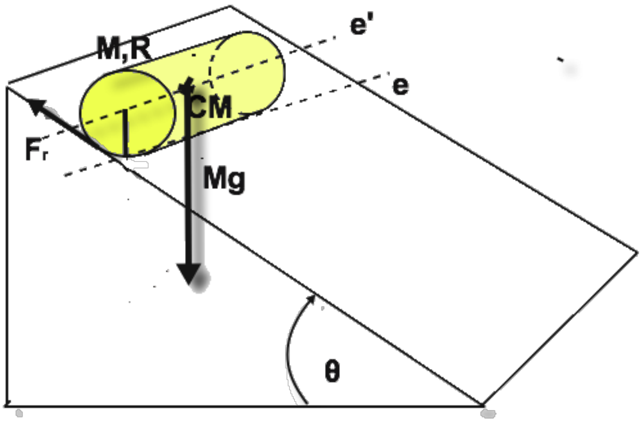
una parte debida a la traslación del CM y otra de rotación respecto al CM. Finalmente tendremos para el cuerpo rígido en particular y para las restricciones mencionadas de rotar a entorno a un eje llamado Z y cuerpo simétrico,

$$\frac{d(\mathrm{I}_{CM}\boldsymbol{\omega})}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{ext}, \ \boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{ext} = \sum_k \mathbf{r}_{iCM} \times \mathbf{F}_{ik}^{ext},$$

$$\frac{d\mathbf{L}_{orb}}{dt} = \mathbf{R}_{CM} \times \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{iNeta}^{ext} \right), \frac{d(\mathrm{I}_{CM}\boldsymbol{\omega})}{dt} = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{r}_{iCM} \times \mathbf{F}_{iNeta}^{int}).$$

Ejemplo1

Determinar la velocidad que tendrá el CM y de rotación ω alrededor de un eje que pase por el CM, de un cilindro homogeneo que partiendo del reposo que cae desde una altura H sobre un plano inclinado, cuya masa es M y su radio R, sin deslizar, cuando llegue a la parte inferior.



Nos encontramos aqui con un elemento nuevo, la fuerza de roce por rodadura que es diferente a la de deslizamiento. Sin entrar en detalles sobre esta fuerza lo importante es que el punto de contacto siempre estará debajo del eje de rotación alrededor del CM con lo que es desplazamiento del punto de contacto sobre el cilindro será el mismo que lo que se desplace el CM o sea $ds = V_{CM}dt \Rightarrow ds/dt = v_T = V_{CM} = R\omega$.

Si planteamos las ecuaciones de movimiento y consideramos al cilindro como sistema de partículas rígido, la única fuerza que produce un torque respecto al eje que pasa por el CM es la $\mathbf{F}_r$ (suponemos que el eje Z esta saliendo hacia afuera) pero tenemos dos fuerzas externas que aceleran el CM y la condición de no deslizamiento

$$\begin{aligned}
-\mathrm{F}_r R &= I_{CM}\frac{d\omega}{dt} \\
-\mathrm{F}_r + Mgsen\theta &= M\frac{dV_{CM}}{dt} \\
\frac{dV_{CM}}{dt} &= R\frac{d\omega}{dt}
\end{aligned}$$

asi resolviendo (recordemos que para un clindro homogéneo $I_{CM} = \frac{MR^2}{2}$)

$$\begin{aligned}
I_{CM}\frac{dV_{CM}}{dt} + R^2 Mgsen\theta &= MR^2\frac{dV_{CM}}{dt} \\
\frac{dV_{CM}}{dt} &= \frac{R^2 Mgsen\theta}{MR^2 - I_{CM}} = \frac{R^2 Mgsen\theta}{MR^2/2} = 2gsen\theta \\
V_{CM}(t) &= V_{CM}(0) + 2gsen\theta t \\
X_{CM}(t) &= X_{CM}(0) + V_{CM}(0)t - gsen\theta t^2 \\
\omega(t) &= V_{CM}(t)/R
\end{aligned}$$

si planteamkos que $X_{CM}(t) - X_{CM}(0) = \frac{H}{sen\theta}$ de allí despejamos el tiempo que tarda en llegar a la parte más baja del plano y con este las velocidades allí.

Otra forma de plantear el problema es mediante consideraciones energéticas si planteamos conservación de la energía pues la fuerza de roce por rodadura no realiza trabajo ya que su punto de aplicación no se desplaza tendremos

$$
\begin{aligned}
E_M &= E'_M \\
MgH &= \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\frac{V_{CM}^2}{R^2} \\
&= \frac{3}{4}MV_{CM}^2 \Rightarrow V_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3}gH}
\end{aligned}
$$

Finalmente notemos que si tomaramos como eje de rotación el de contacto con el plano podriamos considerar al movimiento como una rotación pura y la energía cinética sería (usando Steiner y $V_{CM} = R\omega, D = R$)

$$
\begin{aligned}
E_c &= \frac{1}{2}I\omega'^2 = \frac{1}{2}(I_{CM} + MR^2)\omega'^2 \\
E_c(antes) &= \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \frac{1}{2}(I_{CM} + MR^2)\omega^2
\end{aligned}
$$

de donde se ve comparando que $\omega = \omega'$, y no importa si cambiamos el eje de rotación la velocidad angular es la mísma.

Finalmente recordemos que una partícula estaba en equilibrio cuando la fuerza neta era cero. Para un cuerpo rígido es más complicado porque debemos pedir que la fuerza neta sea cero para que el CM se mueva con velocidad cte y que la suma de los torques externos respecto del CM sean cero para no tener aceleración angular y velocidad angular cte. Más aún como vimos antes que

$$
\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{ext} = \sum_{i=1}^{N} \left(\boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{ext}\right)_{CM} + \mathbf{R}_{CM} \times \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{iNeta}^{ext}
$$

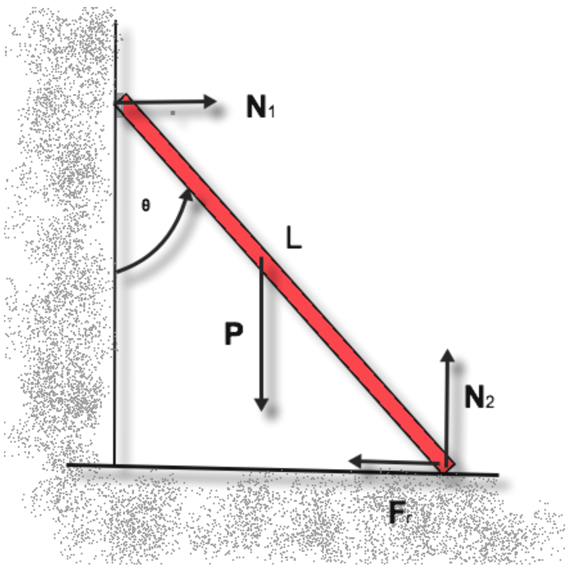
si $\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{iNeta}^{ext} = \mathbf{0}$ deberá ser el torque nulo respecto a cualquier eje y en especial respecto a al CM. Por lo tanto un cuerpo rígido estará en equilibrio si

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{iNeta}^{ext} &= \mathbf{0} \\
\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{ext} &= \mathbf{0}
\end{aligned}
}
$$

esto perimite elegir el punto respecto del cual tomar el torque en forma conveniente.

Ejemplo 2

Una escalera homogénea de masa M y longitud L esta apoyada sobre una pared sin roce, si el coeficiente de roce ente el piso y la escalera es μ_e determinar el ángulo máximo que podrá formar la misma con la vertical para que no se caiga. Se debe cumplir (tomemos torques respecto al punto de contacto con el piso)



$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{iNeta}^{ext} &= 0 \\
-Mg + N_2 &= 0 \\
N_1 - F_r &= 0 \\
F_r &= N_2\mu \\
N_1 - N_2\mu &= 0 \\
\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{ext} &= \mathbf{0} \\
-N_1 L sen(90^0 + \theta) + Mg\frac{L}{2} sen(180^0 - \theta) &= 0 \\
-N_1 cos\theta + Mg\frac{L}{2} sen\theta &= 0
\end{aligned}
$$

de donde podemos obtener

$$
\begin{aligned}
N_2 &= Mg \\
N_1 &= Mg\mu \\
tang(\theta) &= \frac{2\cancel{Mg}\mu}{\cancel{Mg}} = 2\mu \leq 2\mu_e \\
tang(\theta) &\leq 2\mu_e
\end{aligned}
$$