

7 Impulso y variación de la cantidad de movimiento

Antes de comenzar con sistemas de partículas introduzcamos la cantidad de movimiento de una partícula. Es un vector definido como el producto de un escalar, la masa y su velocidad que es un vector

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v},$$

vemos aquí que su nombre está relacionado con el movimiento de una partícula, ya que aparece su velocidad y su inercia ya que contiene la masa. Notemos además que como hemos estado considerando una partícula sin estructura, pues sino sería en sí misma un sistema, su masa es constante y podemos ver que $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$ con lo que la segunda ley de Newton toma la forma

$$\mathbf{F}_N = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

que es más general que su forma original pues podría aplicarse al caso de una partícula o cuerpo de masa variable como sucede por ejemplo con un cohete que al moverse va perdiendo combustible. En ese caso cuando derivamos tendríamos un término $\frac{dm}{dt}\mathbf{v}$.

Ahora veamos que pasa cuando actúa una fuerza externa impulsiva (que actúa durante un corto tiempo Δt) sobre la partícula, tendremos

$$\begin{aligned}d\mathbf{p} &= \mathbf{F}_N(t)dt, \\ \Delta\mathbf{p} &= \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}_N(t)dt = \langle \mathbf{F}_N \rangle \Delta t\end{aligned}$$

donde hemos definido la fuerza media o promedio en el tiempo como

$$\langle \mathbf{F}_N \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}_N(t)dt$$

que cuando el intervalo es corto podemos hacer la aproximación $\mathbf{F}_N(t) \approx \langle \mathbf{F}_N \rangle = \mathbf{cte}$ para todo tiempo en $(t, t + \Delta t)$. De esta manera si nos dan las velocidades antes y después de la acción de la fuerza impulsiva podemos obtener la fuerza media o si nos dan las velocidades iniciales y la fuerza media podemos inferir algo sobre las velocidades finales.

7.1 Sistemas de partículas

La idea que tenemos ahora es extender los conceptos desarrollados a un sistema de varias partículas ya que sabemos que en la naturaleza esta es la situación que se nos presenta. No olvidemos que las leyes de Newton fueron enunciadas para una partícula y queremos ver si pueden extenderse en la forma que las conocemos a un sistema de N partículas, que por el momento consideramos discreto. Las consideraciones que obtendremos son generales independientemente de que sistema se trate.

Comencemos entonces tratando de definir una cantidad de movimiento para un sistema de N partículas. Probemos con la propuesta (pues no sabemos de antemano que forma tendrá)

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$$

si tomamos la derivada tendremos

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{Ni},$$

donde hemos aplicado la segunda ley de Newton a cada partícula lo cual es válido. \mathbf{F}_{Ni} es la fuerza neta actuante sobre cada partícula y como ahora tenemos un sistema podríamos separar dicha fuerza neta en fuerzas debidas a las otras partículas dentro del sistema, llamadas fuerzas internas, y a fuerzas provenientes desde afuera del sistema, que por supuesto ejercerán otras partículas que no son consideradas parte de nuestro sistema

$$\mathbf{F}_{Ni} = \mathbf{F}_{Ni}^{int} + \mathbf{F}_{Ni}^{ext} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{Ni}^{ext}$$

donde hemos expresado las fuerzas internas como la suma de fuerzas ejercidas sobre la i -ésima partícula por todas la demás j diferentes, una partícula no ejerce fuerza sobre si misma, y la fuerza neta externa. Sabemos que las fuerzas entre partículas respetan el principio de acción y reacción cumpliendose $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$, por lo tanto si desplegamos el segundo miembro de la derivada de \mathbf{P} para las fuerzas internas tendremos

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{Ni}^{int} = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \dots + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \dots + \mathbf{F}_{31} + \dots = \cancel{\mathbf{F}_{12}} + \cancel{\mathbf{F}_{13}} + \dots + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{23} + \dots + \cancel{\mathbf{F}_{13}} + \dots$$

con lo que vemos que las fuerzas internas del sistema se cancelan de a pares y no tendrán influencia en la variación temporal de \mathbf{P} . De esta manera sólo subsiste la fuerza neta externa o suma sobre todas las fuerzas externas actuantes sobre cada partícula y finalmente tendremos

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{Ni}^{ext} \equiv \mathbf{F}_N^{ext}, \quad \mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$$

con lo que vemos que podemos extender la segunda ley de Newton considerando a la cantidad de movimiento total del sistema como la suma de las individuales y en vez de aparecer la fuerza neta sobre una partícula ahora aparece la fuerza neta externa sobre el sistema, que se obtiene sumando las fuerzas externas sobre cada partícula individual.

La expresión anterior nos dice varias cosas interesantes:

- Primero que podemos aplicar la segunda ley de Newton si ahora interpretamos la cantidad de movimiento como la total del sistema y a la fuerza neta como la la neta externa sumada sobre todas las partículas.
- Las fuerzas internas centrales se cancelan de a pares y no influyen en la evolución de la cantidad de movimiento del sistema.
- Si las fuerzas externas se compensan o estamos en presencia de un sistema aislado (que no tiene influencia externa) $\mathbf{F}_N^{ext} = \mathbf{0}$, entonces se cumplirá

$$\mathbf{F}_N^{ext} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{P} = \text{cte}$$

o sea se conserva en el tiempo la cantidad de movimiento total del sistema. Observemos que aqui no hablamos de fuerzas conservativas o no, sino de que las fuerzas externas cualesquiera sean, den una fuerza neta cero. Este es el segundo principio de conservación que hemos encontrado.

- Notemos que $\mathbf{P} = \text{cte} \Rightarrow \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f$ entre dos instantes cualesquiera donde se cumple que $\mathbf{F}_N^{ext} = \mathbf{0}$ y que además como la cantidad de movimiento es un vector tenemos en realidad tres ecuaciones de conservación

$$\begin{aligned} P_{ix} &= P_{fx} \\ P_{iy} &= P_{fy} \\ P_{iz} &= P_{fz} \end{aligned}$$

Ya hemos entonces encontrado una definición que parece apropiada para la cantidad de movimiento de un sistema. Sigamos ahora con otras definiciones. Si quisieramos definir la velocidad de un sistema como un todo podríamos inclinarnos a decir que es la suma de la velocidades de todas las partículas que lo componen. Pero como veremos esto no es así. En lugar de ésto pensemos que si para una partícula hemos definido $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, para ser consistentes nuestra definición de la velocidad \mathbf{V} de un sistema debería cumplir $\mathbf{P} = M\mathbf{V}$ donde $M = m_1 + m_2 + \dots = \sum_i^N m_i$ que sería la masa total del sistema. En la mecánica no relativista (que significa que las velocidades de la partículas son muy pequeñas frente a la de la luz) la masa total puede considerarse como una constante. Finalmente si despejamos la velocidad del sistema obtendremos

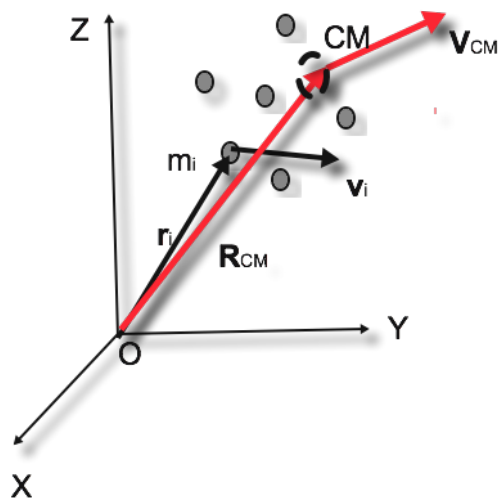
$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i}{M} = \sum_i \frac{m_i}{M} \mathbf{v}_i$$

donde hemos usado que $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$. Notemos entonces que la definición no sería $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i$ sino una suma pesada por un factor m_i/M que dependerá de cuanto contribuya cada partícula a la masa total. Siguiendo ahora con nuestra búsqueda de magnitudes del sistema como un todo podríamos ver si es posible definir algún vector posición para el sistema. Siendo coherentes esta vector posición \mathbf{R} debería cumplir con $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$ según el concepto de velocidad instantánea y entonces tendríamos

$$\mathbf{R}(t) = \int \mathbf{V}(t) dt + \mathbf{R}_0 = \sum_i \frac{m_i}{M} \int \mathbf{v}_i(t) dt + \mathbf{R}_0 = \sum_i \frac{m_i}{M} \mathbf{r}_i(t) + \mathbf{R}_0$$

donde hemos usado que $\mathbf{v}_i(t) = d\mathbf{r}_i/dt$ y además podemos tomar en origen de coordenadas de manera que $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0 = 0$. De esta manera tampoco la posición del sistema como un todo es $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{r}_i$ sino una suma pesada $\mathbf{R} = \sum_i \frac{m_i}{M} \mathbf{r}_i$. Obviamente el vector posición \mathbf{R} no coincidirá en general con la posición de ninguna de las partículas y es considerado un punto en el espacio dentro de cada sistema que se movera a medida que evolucione el movimiento del sistema. Estará mas cerca de las partícula más masivas ya que tenemos un peso m_i/M . A dicho punto que define el movimiento de un sistema como un todo se lo llama centro de masas (CM). Definimos entonces la posición, velocidad y cantidad de movimiento de ese punto ficticio para un sistema como

$$\mathbf{R}_{CM}(t) = \sum_i \frac{m_i}{M} \mathbf{r}_i(t), \quad \mathbf{V}_{CM}(t) = \sum_i \frac{m_i}{M} \mathbf{v}_i(t), \quad \mathbf{P}_{CM} \equiv \mathbf{P} = M\mathbf{V}_{CM}$$



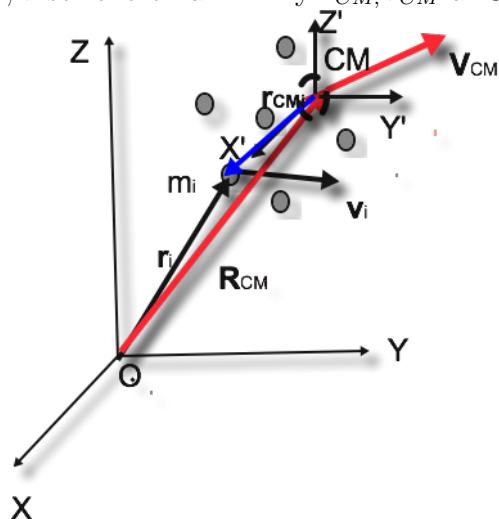
Algunas observaciones importantes deberán hacerse:

- Nuestras definiciones nos llevan a pensar que la cantidad de movimiento total \mathbf{P} del sistema sería como el de una partícula de masa M que se moviera como el CM. Esto no es algo real, pues ya hemos dicho que el CM no coincide con ninguna de las partículas dentro del sistema, simplemente es una forma de pensar las cosas.
- Cuando el sistema está aislado o $\mathbf{F}_N = \mathbf{0}$ la cantidad de movimiento \mathbf{P}_{CM} permanece constante y también $\mathbf{V}_{CM} = \mathbf{P}_{CM}/M = \text{cte}$, o sea el centro de masas se mueve con velocidad constante aunque no lo hagan cada una de las partículas. En particular si el CM estaba en reposo seguirá estando en reposo, y las partículas se irán acomodando para mantener ésto.
- Cuando el CM se mueve a velocidad constante es posible montar un sistema de referencia inercial sobre él con origen O' . Será posible entonces conectar nuestras observaciones entre el sistema O (comunmente llamado de laboratorio o LAB) con el O' (CM) mediante una transformación de Galileo

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_{CM}(t) + \mathbf{R}_{CM}(t) = \mathbf{r}_{CM}(t) + \mathbf{V}_{CM} t$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_{CM}(t) + \mathbf{V}_{CM}$$

donde \mathbf{r}, \mathbf{v} se refieren al LAB y $\mathbf{r}_{CM}, \mathbf{v}_{CM}$ al CM.



asi podrmos transformar la posición y velocidad de cada partícula del LAB ($\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i$) a CM($\mathbf{r}_{CMi}, \mathbf{v}_{CMi}$).

• Notemos que tanto la posición como la velocidad del CM respecto de si mismo serán siempre cero o sea $\mathbf{R}_{CM,CM}, \mathbf{V}_{CM,CM} = \mathbf{0}$ y por lo tanto cuando nos paremos en el CM siempre se cumplirá

$$\sum_i^N \frac{m_i}{M} \mathbf{r}_{CMi}(t) = \mathbf{0}, \quad \sum_i^N \frac{m_i}{M} \mathbf{v}_{CMi}(t) = \mathbf{0}$$

Como veremos el uso del CM simplifica la resolución de algunos problemas.

Ahora veamos que pasa cuando actua una fuerza externa impulsiva (que actua durante un corto tiempo Δt) sobre el sistema, tendremos

$$d\mathbf{P} = \mathbf{F}_N^{ext}(t)dt, \quad \mathbf{P}(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i(t)$$

$$\Delta P = \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}_N^{ext}(t)dt = \langle \mathbf{F}_N^{ext} \rangle \Delta t$$

donde hemos definido la fuerza media o promedio en el tiempo como

$$\langle \mathbf{F}_N^{ext} \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}_N^{ext}(t)dt$$

que cuando el intervalo es corto podemos hacer la aproximación $\mathbf{F}_N^{ext}(t) \approx \langle \mathbf{F}_N^{ext} \rangle = \mathbf{cte}$ para todo tiempo en $(t, t + \Delta t)$.

Ejemplo 1:

Una bala de $m_1 = 0.1kg$ se mueve a una velocidad $\mathbf{v}_1 = (100m/seg, 0)$ y se encaja en un bloque de madera en reposo de $m_2 = 40kg$ apoyado sobre una superficie sin roce, y después de $\Delta t = 0.1seg$ el sistema bala+bloque se mueve a una velocidad $\mathbf{V}' = (0.25m/seg, 0)$. Determinar la fuerza media actuante durante el tiempo en que la bala se va encajando en el bloque. Es un problema unidimensional asi que trabajamos con la componente x solamente y planteamos la variación de la cantidad de movimiento tanto de la bala como el bloque por separado. Para el bloque

$$\Delta P_x = 40kg \times 0.249m/seg - 40kg \times 0m/seg = \langle F \rangle \times 0.1seg$$

$$\frac{9.96kg \frac{m}{seg} - 0kg \frac{m}{seg}}{0.1seg} = \langle F \rangle$$

$$\langle F \rangle = 99.6 \text{ N},$$

y para la bala

$$\Delta p_x = 0.1kg \times 0.249m/seg - 0.1kg \times 100m/seg = \langle F \rangle \times 0.1seg$$

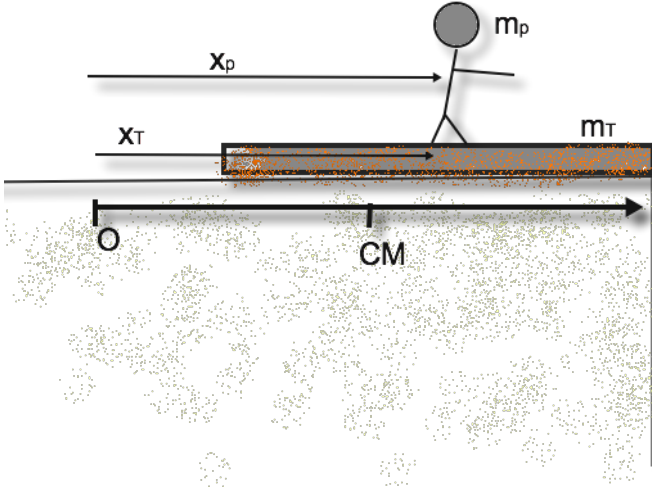
$$\frac{0.0249kg \frac{m}{seg} - 10kg \frac{m}{seg}}{0.1seg} = \langle F \rangle$$

$$\langle F \rangle = - 99.8N$$

como vemos debe cumplirse el principio de acción y reacción.

Ejemplo 2:

Una persona esta parada sobre una tabla larga que está apoyada sobre la nieve al borde de un risco. Hacia donde deberá caminar la persona para alejarse del risco?



Primero consideraremos al sistema tabla-persona. Si suponemos despreciable el roce con la nieve tendremos $\mathbf{F}_N^{ext} = (0, N - P_T - P_p) = 0$ pues la normal sobre la tabla debe ser igual a los pesos sumados para que no se unda la tabla, y no tenemos fuerzas externas a lo largo del eje X pues hemos despreciado el roce. La posición y velocidad del CM serán

$$X_{CM} = \frac{m_T}{m_h + m_T} x_T + \frac{m_p}{m_h + m_T} x_p,$$

$$V_{CM} = \frac{m_T}{m_h + m_T} v_T + \frac{m_p}{m_h + m_T} v_p,$$

y el CM estará mas cerca de la tabla o de la persona según quien tenga mayor masa respecto a la total. Ahora como las fuerzas externas se compensan la velocidad de CM es constante y como la tabla y la persona comienzan a moverse desde el reposo $v_T(0) = v_p(0) = 0 \Rightarrow V_{CM}(0) = 0$, deberá cumplirse en todo momento que $V_{CM} = 0$, de esta manera para todo tiempo se cumplirá

$$\frac{m_T}{m_h + m_T} v_T + \frac{m_p}{m_h + m_T} v_p = 0$$

$$v_p = -\frac{m_T}{m_p} v_T$$

ya así si quiero que la tabla se aleje del risco ($v_T < 0$) la persona debera tener $v_p > 0$ o sea caminar hacia el risco, contrariamente a lo que el sentido común nos indicaría.

Hasta el momento hemos supuesto que el sistema es discreto pero hay casos en que puede ser considerado como un continuo de materia distribuida con una densidad $\rho(\mathbf{r})$ que nos dá la masa por unidad de volumen del sistema en la posición \mathbf{r} del mismo. De esta manera en dicho punto tendremos una masa $dm = \rho(\mathbf{r})d^3r$ y ahora consideramos al sistema constituido por "partículas" con dicha masa ubicadas en la posiciones \mathbf{r} , ahora las sumatorias sobre partículas se sustituyen por integrales de volumen, herramienta que aprenderán en Análisis II pero aquí los problemas a resolver las reducirán a casos muy simples. De esta manera para un sistema continuo nuestra definición de la posición del CM será

$$\mathbf{R}_{CM} = \int_V d^3r \frac{\rho(\mathbf{r})}{M} \mathbf{r}, \quad M = \int_V d^3r \rho(\mathbf{r})$$

donde las integrales se realizan sobre el volúmen V que ocupa el sistema en un tiempo dado y sobre las diferentes posiciones en dicho tiempo.

Ejemplo:

Calcular la posición del CM de una barra de longitud $L = 1m = 100cm$ de sección pequeña con una densidad lineal de masa $\rho(x) = 2 \times 10^{-4} \frac{kg}{cm^2} x$. Como es un problema unidimensional y la sección de la barra es despreciable vamos a reemplazar la integral de volúmen por una integral convencional

$$M = \int_0^L \rho(x) dx = 2 \times 10^{-4} \frac{kg}{cm^2} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = 1Kg,$$

$$X_{CM} = \int_0^L \frac{\rho(x)}{M} x dx = 2 \times 10^{-4} \frac{kg}{cm^2} x^2 dx = \frac{2 \times 10^{-4}}{3} \frac{kg}{cm^2} x^3 \Big|_0^{100cm} = 67cm$$

a partir de su extremo.

7.2 Energía mecánica de un sistema de partículas

Si queremos extender el concepto de energía mecánica a un sistema podríamos recordar como encontramos la expresión para la energía cinética de una partícula y como se definió la energía potencial. Recordemos que la variación en la energía cinética y su expresión se obtuvo calculando el trabajo realizado por la fuerza neta que actúa sobre una partícula. Ahora tenemos varias partículas cada una con una dada trayectoria y podríamos volver a calcular el trabajo que realiza \mathbf{F}_{Ni} sobre cada una de ellas y obtendríamos como antes

$$W_{\mathbf{F}_{Ni}}^{AB} = \int_{\mathcal{C}_i^{AB}} \mathbf{F}_{Ni} \cdot d\mathbf{r}_i = \Delta \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \frac{1}{2} m_i v_{Bi}^2 - \frac{1}{2} m_i v_{Ai}^2$$

entre dos posiciones A y B recorriendo la trayectoria \mathcal{C}_i^{AB} . Además podríamos sumar cada trabajo realizado sobre cada partícula y *definir* así el trabajo realizado por todas las fuerzas actuantes sobre el sistema (tanto internas como externas ya que sobre cada partícula actúan fuerzas de este tipo). Observese que digo definir el trabajo total ya que no se podría calcular como la integral de \mathbf{F}_N pues esta fuerza no actúa en sí sobre una determinada partícula y además cada partícula tiene su trayectoria diferente. Aquí el trabajo sobre cada partícula se calculará sobre cada trayectoria entre dos configuraciones $A \equiv \mathbf{r}_{A1}, \mathbf{v}_{A1}; \mathbf{r}_{A2}, \mathbf{v}_{A2}; \mathbf{r}_{A3}, \mathbf{v}_{A3}; \dots$ y $B \equiv \mathbf{r}_{B1}, \mathbf{v}_{B1}; \mathbf{r}_{B2}, \mathbf{v}_{B2}; \mathbf{r}_{B3}, \mathbf{v}_{B3}; \dots$ de posiciones y velocidades de todas las partículas en el sistema y con la fuerza neta sobre cada partícula. Podemos denir la energía cinética para cada partícula como $E_{ci} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$ y el cambio ΔE_{ci} sobre cada partícula. Si definimos ahora la energía cinética del sistema como la suma de las individuales tendremos

$$W_N^{AB} = \sum_i^N W_{\mathbf{F}_{Ni}}^{AB} = \sum_i^N \left(\frac{1}{2} m_i v_{Bi}^2 - \frac{1}{2} m_i v_{Ai}^2 \right)$$

$$E_c = \sum_i^N E_{ci} = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$W_N^{AB} = E_c^B - E_c^A$$

que es la generalización del teorema trabajo-variación de energía cinética para un sistema.

Podríamos ahora separar la fuerza neta sobre cada partícula en conservativas y no conservativas como lo hicimos para el caso de una partícula (en realidad dos porque alguien tenía que ejercer la fuerza). Nuevamente si definimos el trabajo de las fuerzas conservativas como

$$W_C^{AB} = \sum_{i,c}^N W_{ci}^{\mathbf{r}_i^B \mathbf{r}_i^A}$$

donde W_{ci} es el trabajo realizado por la fuerza conservativa \mathbf{F}_{ic} que actúa sobre la partícula i –ésima (podemos tener fuerzas conservativas de distinta naturaleza presentes) y recordamos que definimos la energía potencial asociada a dicha fuerza como $-W_{ci}^{\mathbf{r}_i^B \mathbf{r}_i^A} = U_c(\mathbf{r}_i^B) - U_c(\mathbf{r}_i^A)$. Notemos que como fue mencionado antes $\mathbf{r}_i^{A,B}$ era la posición de la partícula respecto de otra más masiva, que considerábamos quieta, que es quien produce la fuerza conservativa. Además por el principio de acción y reacción la otra partícula sentirá una fuerza igual y contraria. Por esto no hablamos de la energía potencial de una partícula sino de dos partículas interactuantes y la expresaremos en términos de la posición relativa. Ahora ya no asumimos que la otra partícula dentro del sistema es muy masiva. Es decir hablaremos de $U_c(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ como la energía potencial de interacción entre ambas partículas i, j y ambas se moverán normalmente. Si hubiera interacciones generadas por partículas externas al sistema podríamos considerar a dichas partículas como cuasi-fijas si es que son muy masivas y entonces la energía potencial dependería de las coordenadas de cada partícula individual del sistema. Por ejemplo si tenemos dos cuerpos unidos por un resorte este ejerce una fuerza interna, pero además está el peso de cada partícula que ejerce la tierra que son fuerzas externas al sistema de dichos dos cuerpos. Por lo tanto la energía mecánica de la partícula i será (separada en energías potenciales debidas a fuerzas internas y externas)

$$E_{Mi} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{j=1, j \neq i, c}^N U_c^{int}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + \sum_c U_c^{ext}(\mathbf{r}_i)$$

y ahora para el sistema no debemos sumar dos veces la energía potencial ya que está definida para un par de partículas, por esto podemos hacer una suma sin restringir entre partículas distintas pero como $U_c^{int}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = U_c^{int}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$ debe ir sólo una vez ponemos un factor $\frac{1}{2}$ adelante y tendremos

$$E_M = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, j \neq i}^N \sum_c U_c^{int}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + \sum_{i=1, c}^N U_c^{ext}(\mathbf{r}_i).$$

Además hasta el momento estamos hablando de un sistema de partículas donde consideramos a cada partícula puntual sin estructura interna, pero en los problemas reales como el choque de dos cuerpos, estos tienen una estructura interna pues están constituidos por otras partículas y entonces podríamos asociar una energía interna a cada cuerpo participante en el choque ya que por ejemplo podría deformarse como sucede cuando chocan dos autos. Así aunque sigamos despreciando el tamaño de cada cuerpo participante le agregamos un término de energía interna, sin que demos detalles de su origen, así la energía del sistema la expresamos como

$$E = E_M + E_{int} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, j \neq i}^N \sum_c U_c^{int}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + \sum_{i=1, c}^N U_c^{ext}(\mathbf{r}_i) + \sum_{i=1}^N E_{int}(i)$$

Finalmente quisieramos ver como se ve la energía de un sistema desde el sistema CM. Primeramente tomamos la energía cinética y hacemos la transformación vectorial para conectar un vector visto desde LAB con uno visto desde CM que son totalmente generales se mueva o no el CM a velocidad constante

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_{CM}(t) + \mathbf{R}_{CM}(t) \\ \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}_{CM}(t) + \mathbf{V}_{CM}(t)\end{aligned}$$

y así tendremos

$$\begin{aligned}E_c &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_{CMi} + \mathbf{V}_{CM})^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_{CMi}^2 + \mathbf{V}_{CM} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_{CMi} + \frac{1}{2} M \mathbf{V}_{CM}^2 \\ &= E_c^{CM} + \mathbf{V}_{CM} \cdot M \mathbf{V}_{CM,CM} + \frac{1}{2} M \mathbf{V}_{CM}^2\end{aligned}$$

ya que la velocidad del CM respecto a sí mismo es cero. Así finalmente la energía cinética se descompone en la energía cinética de una partícula (ficticia) que tiene la masa total del sistema y se mueve como el CM más la energía cinética del sistema respecto al CM.

Como la energía potencial es una función escalar que no debería cambiar su forma si es vista desde LAB o CM, solamente cambiamos las coordenadas de cada partícula y tendremos

$$\begin{aligned}E_M &= \frac{1}{2} M \mathbf{V}_{CM}^2 + U^{ext} + E_M^{CM} \\ E_M^{CM} &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_{CMi}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, j \neq i}^N \sum_c U_c^{int}(\mathbf{r}_{CMi} - \mathbf{r}_{CMj})\end{aligned}$$

donde en U^{ext} tenemos la energía potencial debida a fuerzas externas al sistema que dependería tanto de las coordenadas de las partículas individualmente respecto a CM y de la coordenada del CM, y si pudiéramos hacer la aproximación $r_{CMi} \ll R_{CM}$ es decir que las partículas están cercanas al CM y a una distancia mucho menor que la distancia del CM respecto al origen tendremos

$$E_M = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_{CM}^2 + U^{ext}(\mathbf{R}_{CM}) + E_M^{CM}$$

y tendríamos aproximadamente una partícula de masa M moviéndose por la influencia de las fuerzas externas, y la energía mecánica respecto a CM.