FÍSICA GENERAL III - 2018
Departamento de Física - UNLP

Guía complementaria: números complejos

Los números complejos son objetos de la forma $z = x + iy$, donde x e y son números reales y se denotan respectivamente como la parte real de z ($\mathrm{Re}\, z$) y la parte imaginaria de z ($\mathrm{Im}\, z$). La *unidad imaginaria* "i" satisface la ecuación $i^2 = -1$.

Los números complejos cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \ , \\ a\,z &= a\,x + i\,a\,y \quad (a \in \mathbb{R}) \ , \\ z_1\,z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \ . \end{aligned}$$

Dado un número complejo, $z = x + i\,y$, se define su complejo conjugado $\overline{z}$, su módulo $|z|$ y su argumento $\arg(z)$ como

$$\overline{z} = x - i\,y \ , \qquad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \ , \qquad \arg(z) = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \ .$$

Ejercicios

1. Probar que
   (a) $\dfrac{1}{i} = -i$
   (b) $z\,\overline{z} = |z|^2 \ , \ \forall\, z \in \mathbb{C}$
   (c) $\dfrac{10\,i}{3+i} = 1 + 3\,i$
2. Sea $z = z_1 + z_2$, donde $z_1 = 3 + i\,5$ y z_2 tiene módulo 2 y argumento 30°. Hallar módulo y argumento de z.
3. Sea z tal que $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}$, donde $z_1 = x_1 + i\,y_1$ y $z_2 = x_2 + i\,y_2$. Hallar módulo y argumento de z.
4. *Fórmula de Euler*. Sea x un número real, probar que $e^{i\,x} = \cos x + i\,\mathrm{sen}\, x$. Notar que esto implica que todo complejo se puede escribir de la forma $z = r\,e^{i\,\theta}$, donde $r = |z|$ y $\theta = \arg(z)$. Esta forma de escribir a un número complejo se denomina forma exponencial.
5. Probar que
   (a) $|e^z| = e^{\,\mathrm{Re}\, z}$
   (b) $e^{z + 2\pi i} = e^z$
   (c) $e^z \neq 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$
6. A partir de la fórmula de Euler mostrar que para α, $\beta \in \mathbb{R}$ se cumple
   (a) $\cos(\alpha + \beta) \,=\, \cos\alpha\,\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\ \mathrm{sen}\,\beta$
   (b) $\mathrm{sen}\,(\alpha + \beta) \,=\, \mathrm{sen}\,\alpha\,\cos\beta + \mathrm{sen}\,\beta\,\cos\alpha$

7. Mostrar que la operación de conjugación conmuta con las operaciones de suma, producto y módulo, es decir

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \ , \qquad \overline{(z_1\, z_2)} = \overline{z_1}\ \overline{z_2} \ , \qquad \overline{|z|} = |\,\overline{z}\,| = |z| \ .$$

Como consecuencia, se tiene que si $P(z)$ es un polinomio con coeficientes reales, entonces $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.

8. Sea $F_C(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función compleja solución de la ecuación diferencial

$$A\,\frac{d^2F_C}{dt^2} + B\,\frac{dF_C}{dt} + C\,F_C \;=\; D\,e^{i\omega t} \ ,$$

con $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Probar que dicha función puede escribirse como $F_C(t) = F_R(t) + i\,F_I(t)$, donde $F_R(t)$ y $F_I(t)$ son dos funciones reales, soluciones de las ecuaciones diferenciales

$$A\,\frac{d^2F_R}{dt^2} + B\,\frac{dF_R}{dt} + C\,F_R \;=\; D\cos\left(\omega t\right)$$

y

$$A\,\frac{d^2F_I}{dt^2} + B\,\frac{dF_I}{dt} + C\,F_I \;=\; D\,\mathrm{sen}\left(\omega t\right) \ ,$$

respectivamente.