Análisis de Señales
Curso 2017

Análisis de Fourier

Análisis de Fourier en TC

- Teorema de Fourier
- Serie de Fourier
- Transformada de Fourier (próxima clase)
- Fórmulas de análisis y síntesis
- Respuesta en f de sistemas LTI

Dominio de Frecuencia

- Metodología

-Señales elementales a partir de las cuales se puede construir por combinación lineal cualquier señal.

-Construir la respuesta al sistema a partir de su respuesta a la señal elemental.

- Se introducen los siguientes conceptos :

-Exponenciales complejas como señal básica.

-Dualidad entre dominios de tiempo y frecuencia.

-Respuesta en frecuencia de sistemas LTI

- Antes pensábamos $\Rightarrow$ impulsos
- Ahora pensamos $\Rightarrow$ funciones propias de los sistemas LIT

Entrada : función propia $\Rightarrow$ Salida : misma función multiplicada por una constante

A partir de la propiedad de superposición de los sistemas LIT

$$x(t)=\Sigma\ a_k\ \phi_k(t) \quad \Rightarrow \quad y(t)=\ \Sigma\ k\ a_k\ \phi_k(t)$$

¿Cómo calculamos k?

$x(t)=e^{st}$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,e^{s(t-\tau)}d\tau = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,e^{-s\tau}d\tau\right]e^{st} =$$

$$= H(s)\,e^{st}$$

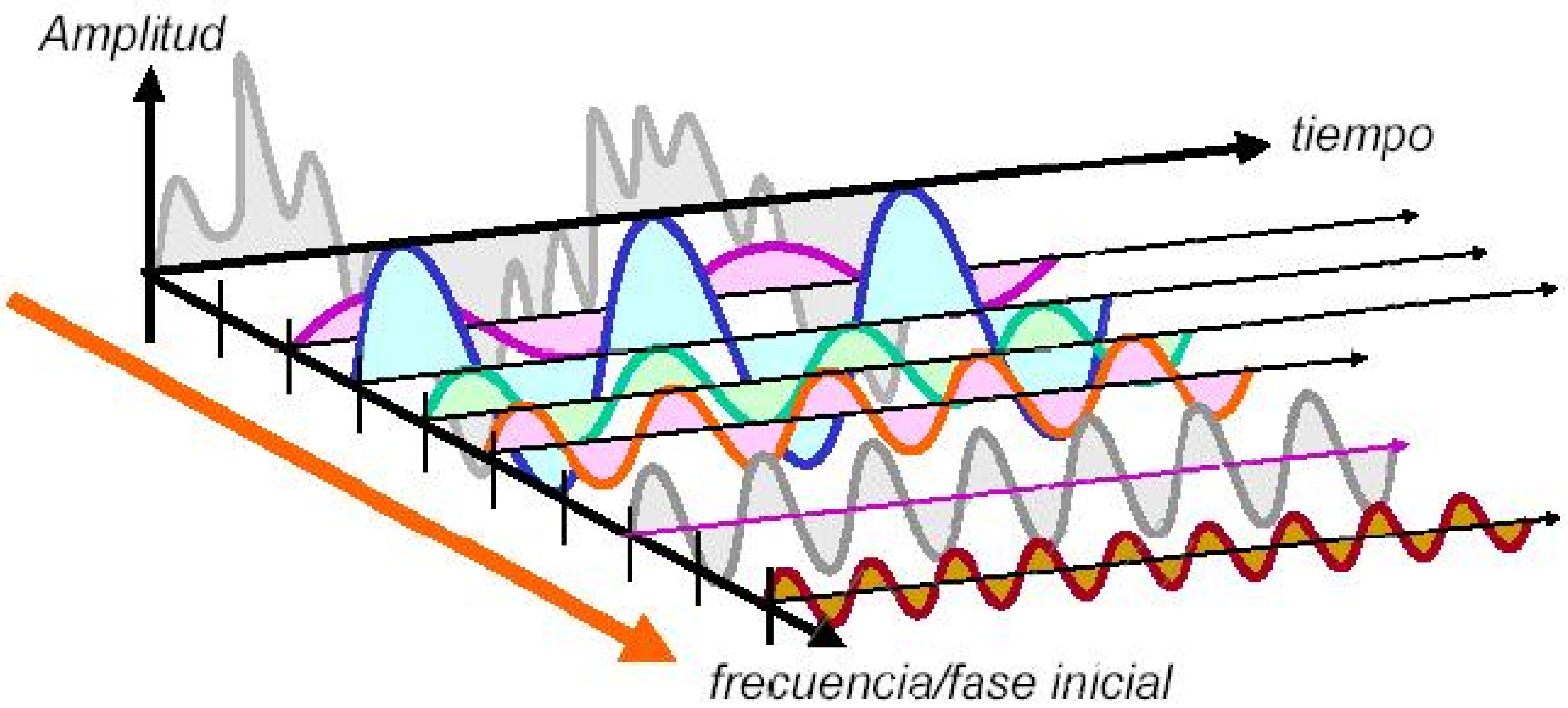
Función propia

Valor propio

Fourier : con
s=jw

Representación de señales

Uno de los métodos de representar la señal x(t) es bajo la forma de componentes de ≠ f, c/u de ellas con una amplitud y fase inicial



Teorema de Fourier

- Toda señal periódica que cumpla las condiciones de Dirichlet :
  - Integrable en el período
  - Nº finito de máximos y mínimos en el período
  - Nº finito de discontinuidades
- Puede reproducirse como una superposición de componentes sinusoidales de frecuencias f_0, $2f_0$,...
- La componente con el mismo período que la función original se denomina *fundamental.*
- Las componentes con f superiores a la fundamental se denominan *armónicos.*

Serie trigonométrica de Fourier

Algunas funciones periódicas f(t) de periodo T pueden expresarse por la siguiente serie, llamada Serie Trigonométrica de Fourier

$f(t) = ½a_0 + a_1\cos(w_0t) + a_2\cos(2w_0t) + \ldots$

$+ \; b_1\mathrm{sen}(w_0t) + b_2\mathrm{sen}(2w_0t) + \ldots$

Donde $w_0 = 2$®$/T$.

Es decir:

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\mu_0 t) + b_n sen(n\mu_0 t)]$$

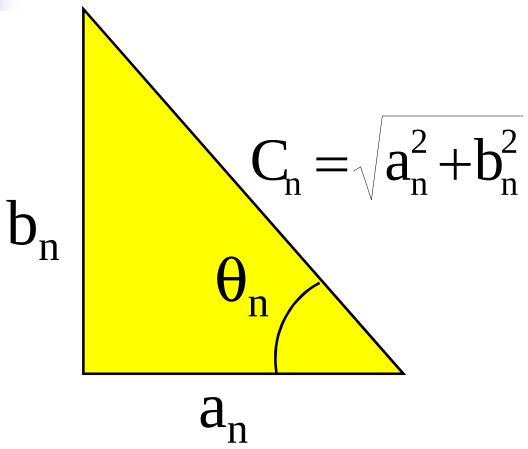
Serie trigonométrica de Fourier

Es posible escribir de una manera ligeramente diferente la Serie de Fourier, si observamos que el término $a_n\cos(nw_0t)+b_n\text{sen}(nw_0t)$ se puede escribir como

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos(n\omega_0 t)+\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\text{sen}(n\omega_0 t)\right)$$

Podemos encontrar una manera más compacta para expresar estos coeficientes pensando en un triángulo rectángulo:

Serie trigonométrica de Fourier



$$\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \cos\theta_n$$

$$\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \mathrm{sen}\theta_n$$

Con lo cual la expresión queda

$$C_n\left[\cos\theta_n \cos(n\omega_0 t) + \mathrm{sen}\theta_n \mathrm{sen}(n\omega_0 t)\right]$$

$$= C_n\left[\cos(n\mu_0 t - {}^{-}{}_{n})\right]$$

Serie trigonométrica de Fourier

Si además definimos $C_0=a_0/2$, la serie de Fourier se puede escribir como:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[\cos(n\omega_0 t - \theta_n)\right]$$

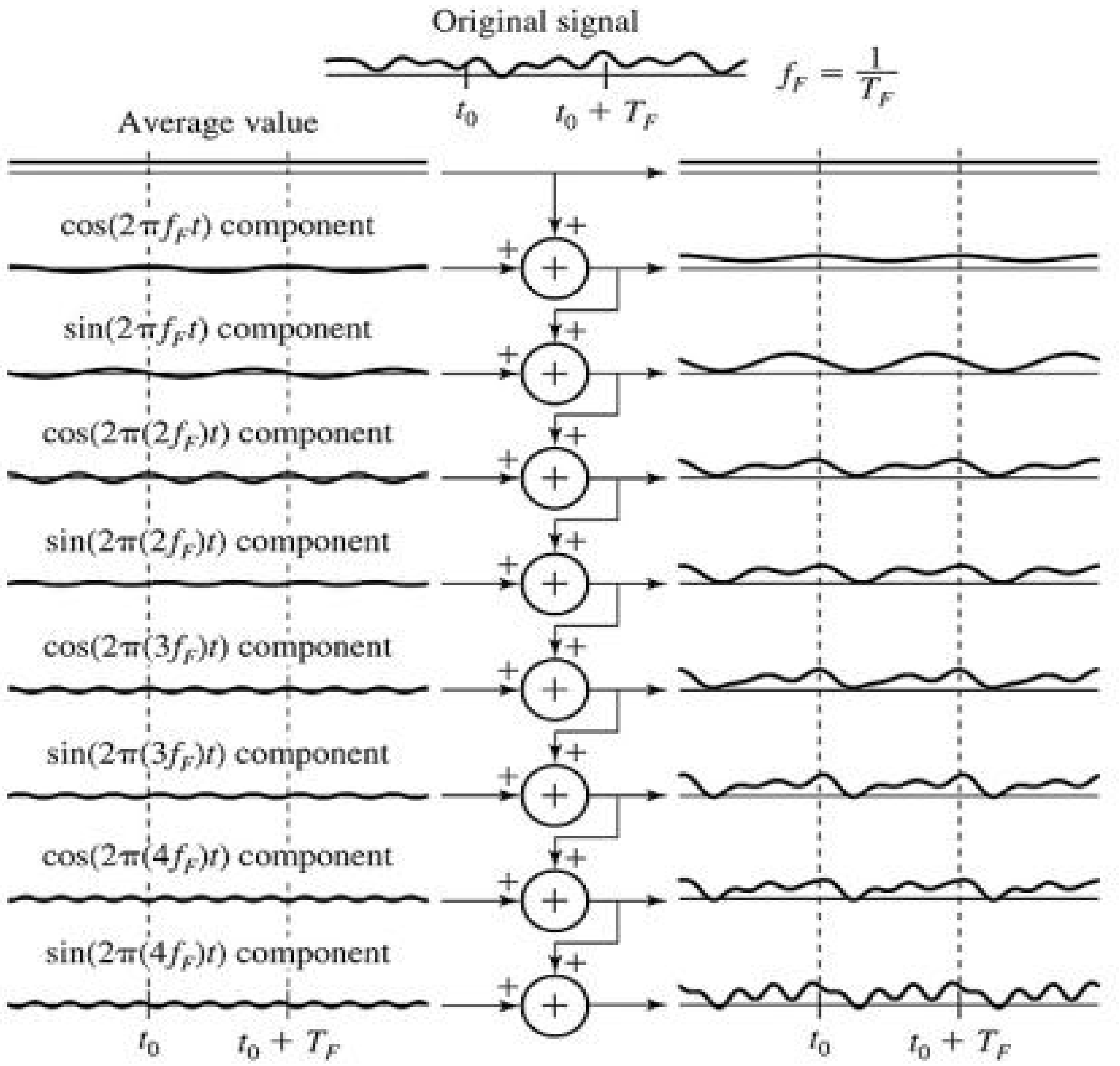
$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Serie trigonométrica de Fourier

- Así, una función periódica f(t) se puede escribir como la suma de componentes sinusoidales de diferentes frecuencias $w_n=nw_0$.
- A la componente sinusoidal de frecuencia nw_0: $C_n\cos(nw_0t+q_n)$ se le llama la enésima armónica de f(t).
- A la primera armónica (n=1) se le llama la componente fundamental y su periodo es el mismo que el de f(t)
- A la frecuencia $w_0=2\pi f_0=2\pi/T$ se le llama frecuencia angular fundamental.

Forma trigonométrica



Propiedades de las funciones seno y coseno: funciones ortogonales

- Un conjunto de funciones $\text{¤}_k(t)$ es ortogonal en un intervalo $a < t < b$ si para dos funciones cualesquiera se cumple:

$$\int_a^b \text{¤}_m(t)\,\text{¤}_n(t)\,dt = \begin{cases} 0 & para \quad m \neq n \\ r_n & para \quad m = n \end{cases}$$

Senos y Cosenos: Ortogonalidad

El siguiente es un conjunto de funciones ortogonales en el intervalo $-{}^{T}/_{2}<t<{}^{T}/_{2}$.

$1, \cos w_0 t, \cos 2w_0 t, \cos 3w_0 t, \ldots, \operatorname{sen} w_0 t, \operatorname{sen} 2w_0 t, \operatorname{sen} 3w_0 t, \ldots$

(para cualquier valor de $\omega_0 = {}^{2\pi}/_{T}$).

Para verificar lo anterior podemos probar:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t)dt = \left.\frac{\operatorname{sen}(m\omega_0 t)}{m\omega_0}\right|_{-T/2}^{T/2} = \frac{2\operatorname{sen}(m\omega_0 T/2)}{m\omega_0} = \frac{2\operatorname{sen}(m\pi)}{m\omega_0} = 0$$

Ya que m es un entero.

Senos y Cosenos: Ortogonalidad

$$\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(m\omega_0 t)\,dt = \left.\frac{-\cos(m\omega_0 t)}{m\omega_0}\right|_{-T/2}^{T/2} =$$

$$= \frac{-1}{m\omega_0}[\cos(m\omega_0 T/2) - \cos(m\omega_0 T/2)] = 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ T/2 & \text{para } m = n \neq 0 \end{cases}$$

Senos y Cosenos: Ortogonalidad

$$\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(m\omega_0 t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ T/2 & \text{para } m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,dt = 0 \quad \text{para cualquier } m, n$$

Cálculo de los coeficientes de la Serie de Fourier

- Dada una función periódica f(t) ¿cómo se obtiene su serie de Fourier?

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \mathrm{sen}(n\omega_0 t)]$$

- Obviamente, el problema se resuelve si sabemos como calcular los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$

- Esto se puede resolver considerando la ortogonalidad de las funciones seno y coseno comentada anteriormente.

Multiplicando ambos miembros por $\cos(n\omega_0 t)$ e integrando de –T/2 a T/2, obtenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt \qquad n = 0,1,2,3,...$$

Similarmente, multiplicando por $\text{sen}(n\omega_0 t)$ e integrando de –T/2 a T/2, obtenemos:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\text{sen}(n\omega_0 t)dt \qquad n = 1,2,3,...$$

Similarmente, integrando de –T/2 a T/2, obtenemos:

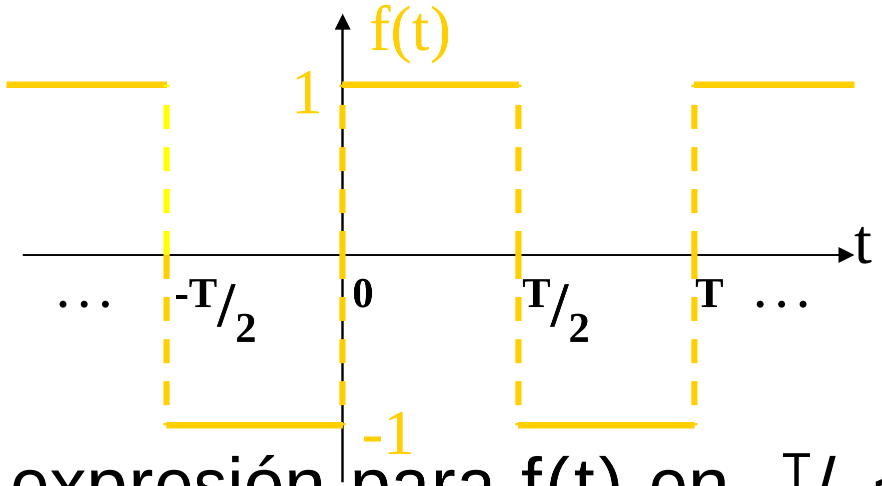
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$$

- El intervalo de integración no necesita ser simétrico respecto al origen.
- Como la ortogonalidad de las funciones seno y coseno no sólo se da en el intervalo de $-T/2$ a $T/2$, sino en cualquier intervalo que cubra un periodo completo:

(de t_0 a t_0+T, con t_0 arbitrario)

- las fórmulas anteriores pueden calcularse en cualquier intervalo que cumpla este requisito

Ejemplo: Encontrar la Serie de Fourier para la siguiente función de periodo T:



Solución: La expresión para f(t) en $-^{T}/_{2}<t<^{T}/_{2}$ es

$$f(t)=\begin{cases}-1 & \text{para } -\frac{T}{2}<t<0\\ 1 & \text{para } 0<t<\frac{T}{2}\end{cases}$$

Coeficientes a_n:

$$a_n = \tfrac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$= \tfrac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} -\cos(n\omega_0 t)dt + \int_{0}^{T/2}\cos(n\omega_0 t)dt\right]$$

$$= \tfrac{2}{T}\left[-\frac{1}{n\omega_0}\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\Big|_{-T/2}^{0} + \frac{1}{n\omega_0}\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\Big|_{0}^{T/2}\right]$$

$$= 0 \quad \text{para } n \neq 0$$

Coeficientes b_n:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} -\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt + \int_{0}^{T/2} \mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{1}{n\omega_0}\cos(n\omega_0 t)\Big|_{-T/2}^{0} - \frac{1}{n\omega_0}\cos(n\omega_0 t)\Big|_{0}^{T/2}\right]$$

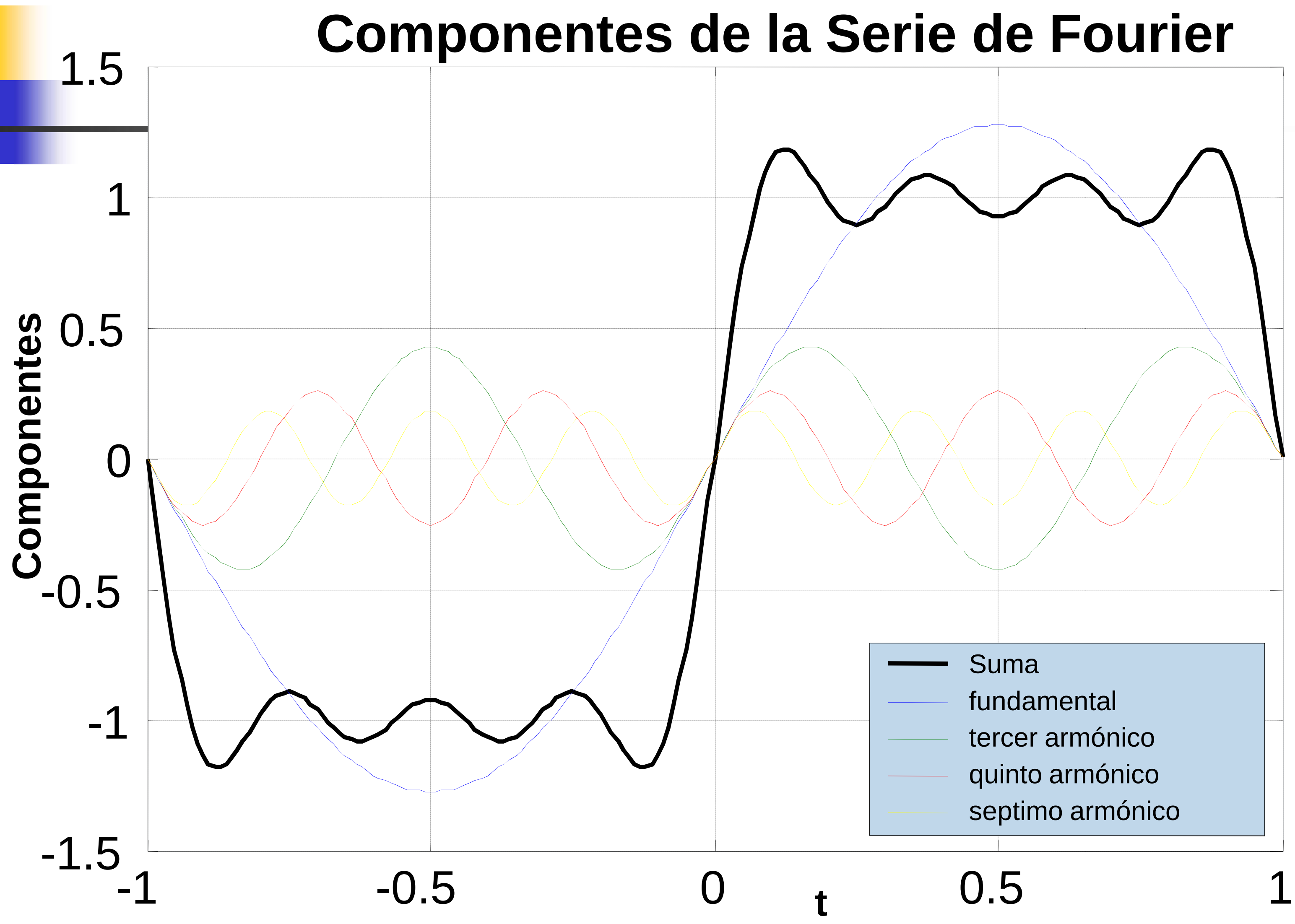
$$= \frac{1}{n\pi}\left[(1-\cos(n\pi)) - (\cos(n\pi) - 1)\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right] \quad \text{para } n \neq 0$$

Serie de Fourier: Finalmente la Serie de Fourier queda como

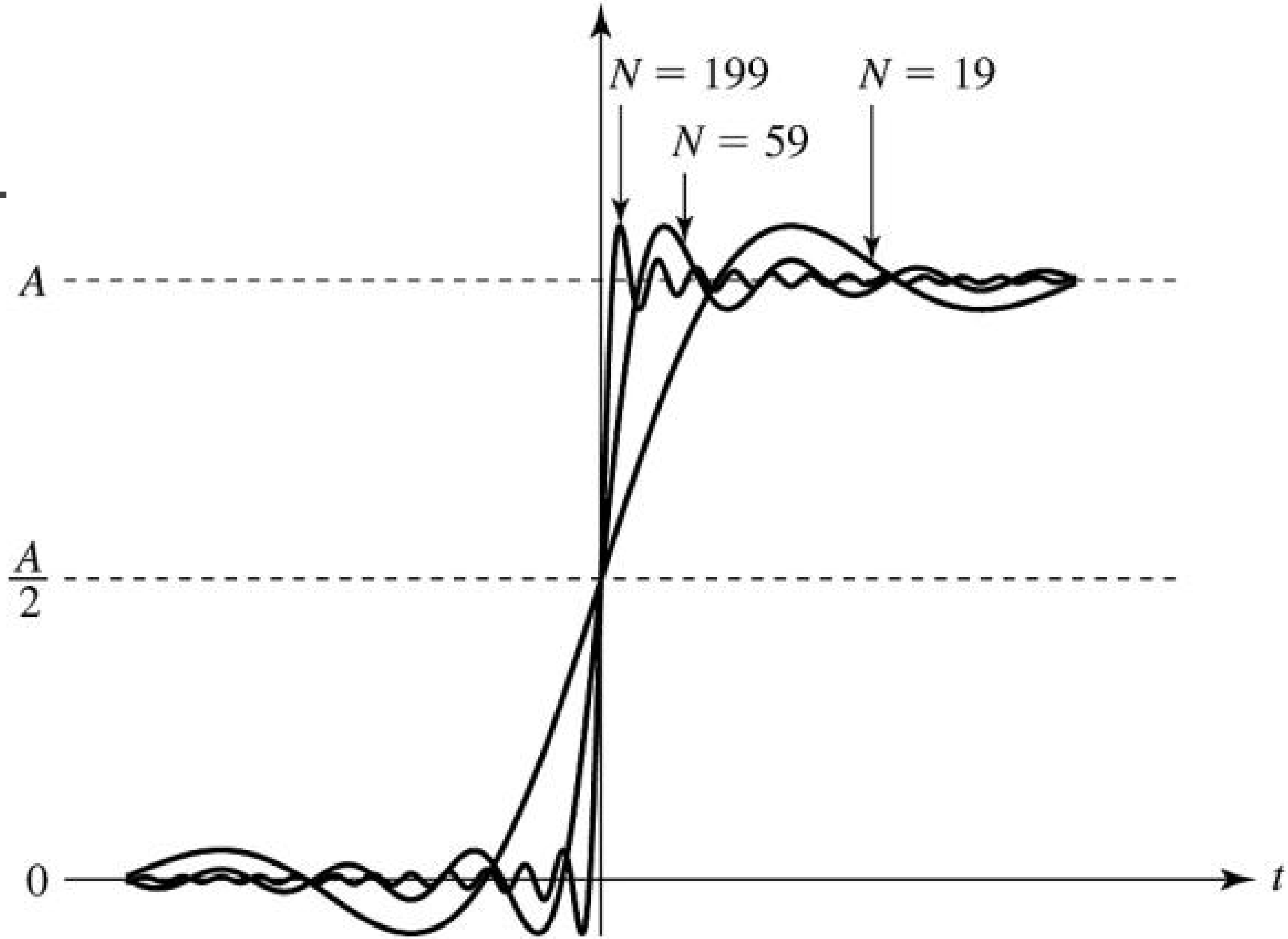
$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left[\operatorname{sen}(\omega_0 t)+\tfrac{1}{3}\operatorname{sen}(3\omega_0 t)+\tfrac{1}{5}\operatorname{sen}(5\omega_0 t)+\ldots\right]$$

En la siguiente figura se muestran: la componente fundamental y los armónicos 3, 5 y 7 así como la suma parcial de estos primeros cuatro términos de la serie para w_0=®, es decir, T=2:


Componentes de la Serie de Fourier
Componentes
t
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
Suma
fundamental
tercer armónico
quinto armónico
septimo armónico

Convergencia de la serie de Fourier

- Las señales que encontramos en el mundo real cumplen las condiciones de Dirichlet. Por lo tanto :
- Las series de Fourier=x(t) donde x(t) es continua
- Las series de Fourier="punto medio" en puntos de discontinuidad.
- Convergencia. Fenómeno de Gibbs en puntos de discontinuidad.



N = 199
N = 59
N = 19
A
A/2
0
t

Forma compleja de la Serie de Fourier

Consideremos la serie de Fourier para una función periódica f(t), con periodo T=2 π /w$_0$.

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \mathrm{sen}(n\omega_0 t)]$$

Es posible obtener una forma alternativa usando las fórmulas de Euler:

$$\cos(n\omega_0 t) = \tfrac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t})$$

$$\mathrm{sen}(n\omega_0 t) = \tfrac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})$$

Donde

$$j = \sqrt{-1}$$

Forma compleja de la Serie de Fourier

Sustituyendo

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \tfrac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + b_n \tfrac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})]$$

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[\tfrac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t} + \tfrac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega_0 t}]$$

Y definiendo:

$$\boxed{c_0 = \tfrac{1}{2}a_0, \quad c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad c_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + jb_n)}$$

Forma compleja de la Serie de Fourier

La serie se puede escribir como

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t})$$

O bien,

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Es decir,

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\mu_0 t}}$$

A la expresión obtenida

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\mu_0 t}$$

Se le llama forma compleja de la serie de Fourier y sus coeficientes c_n pueden obtenerse a partir de los coeficientes a_n, b_n como ya se dijo, o bien:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\mu_0 t}dt$$

Para n=0, ±1, ±2, ±3, ...

Los coeficientes c_n son números complejos, y también se pueden escribir en forma polar:

$$c_n = |c_n| e^{j\phi_n}$$

$$c_{-n} = c_n^* = |c_n| e^{-j\phi_n}$$

Donde

$$|c_n| = \tfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \phi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Para todo $n \neq 0$,

Para $n=0$, c_0 es un número real: $$c_0 = \tfrac{1}{2} a_0$$

Exponencial compleja (lo mismo que antes)

- Asociado a c/exponencial compleja existe un conjunto de señales relacionadas armónicamente, sus frecuencias son múltiplos enteros de una única frecuencia w_0 $\Rightarrow$ $\phi_k(t) = e^{j w_0 t k}$ $\qquad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots$
- Para c/k ϕ_k es una función periódica de frecuencia fundamental $|k| w_0$.

Una combinación lineal de dichas señales :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk w_0 t}$$

también es periódica con período T_0 y se conoce como representación por Series de Fourier de x(t). Expresa la descomposición de la señal x(t) como combinación lineal de k exponenciales complejas:

- Con amplitudes C_k discretas
- Para un conjunto discreto de frecuencias kw_0 relacionadas armónicamente

Determinación de la representación en series de Fourier de una señal periódica contínua

- Suponiendo que una señal periódica pudiera representarse con la serie anterior, necesitaríamos un procedimiento para determinar los coeficientes c_k:

$$x(t)\,e^{-jnw_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{jkw_0 t}\, e^{-jnw_0 t}$$

- Integrando ambos miembros de 0 a T

$$\int_0^T x(t)\, e^{-jnw_0t}\, dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{jk w_0 t}\, e^{-jnw_0t}\, dt$$

$$\int_0^T x(t)\, e^{-jnw_0t}\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k [\int_0^T e^{j(k-n)w_0t}\, dt]$$

$$\int_0^T e^{j(k-n)w_0t}\, dt = \int_0^T \cos(k-n)\, w_0\, tdt + j\int_0^T sen(k-n)\, w_0\, tdt$$

$$\int_0^T e^{j(k-n)w_0t}\, dt = \begin{cases} T & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-jnw_0t} dt$$

Este par de ecuaciones define la serie de Fourier de una señal periódica contínua :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-jn w_0 t} dt$$

Ecuación de análisis

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{jk w_0 t}$$

Ecuación de síntesis

Espectros de frecuencia

- A la gráfica de la magnitud de los coeficientes c_n contra la frecuencia angular w de la componente correspondiente se le llama el espectro de amplitud de f(t).

- A la gráfica del ángulo ¤$_n$ de fase de los coeficientes c_n contra w, se le llama el espectro de fase de f(t).

- Como n sólo toma valores enteros, la frecuencia angular $w=nw_0$ es una variable discreta y los espectros mencionados son gráficas discretas.

Espectros de frecuencia

- Dada una función periódica f(t), le corresponde una y sólo una serie de Fourier, es decir, le corresponde un conjunto único de coeficientes c_n.

- Por ello, los coeficientes c_n especifican a f(t) en el dominio de la frecuencia de la misma manera que f(t) especifica la función en el dominio del tiempo.

Propiedades de la serie de Fourier

- Linealidad

$$x(t) \longrightarrow a_k \qquad\qquad y(t) \longrightarrow b_k$$

$$Ax(t)+By(t) \longrightarrow c_k=Aa_k+Bb_k$$

- Desplazamiento en el tiempo

$$x(t) \longrightarrow a_k$$

$$x(t-t_0) \longrightarrow e^{-jk w_0 t_0} a_k$$

Propiedades de la serie de Fourier

- Escalamiento de tiempo

$$x(at) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{jka w_0 t}$$

- Relación de Parseval

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 \, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

Simetría de la forma de onda

- ✓ Función par
- ✓ Función impar
- ✓ Simetría de ½ onda

$$f(t)=-f(t+T/2)$$

La porción negativa de la onda es el reflejo de la porción positiva, desplazada ½ período.

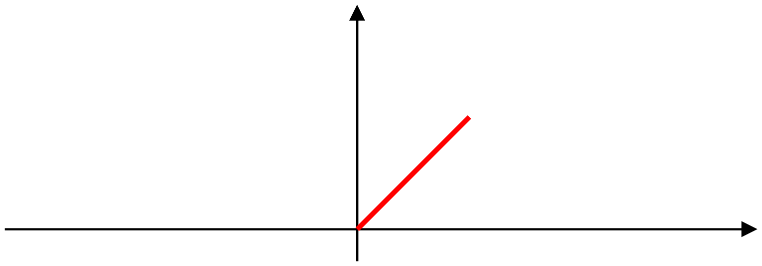
Simetría de la forma de onda

- Simetría de cuarto de onda

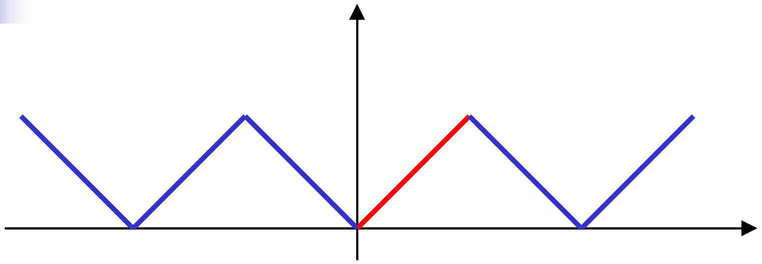
Si una función periódica f(t) tiene simetría de media onda y además es una función par ó impar, entonces f(t) tiene simetría de cuarto de onda par ó impar.

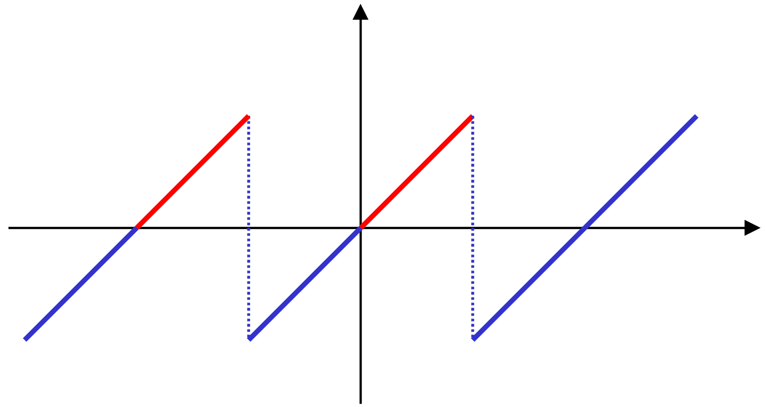
¿Qué podemos decir de los coeficientes con la simetría?

- Función par → a_0 y a_n sólo cos
- Función impar → b_n sólo senos
- Función con simetría de ½ onda → armónicos impares
- Función con simetría de ¼ de onda par → armónicas impares coseno
- Función con simetría de ¼ de onda impar → armónicas impares senos

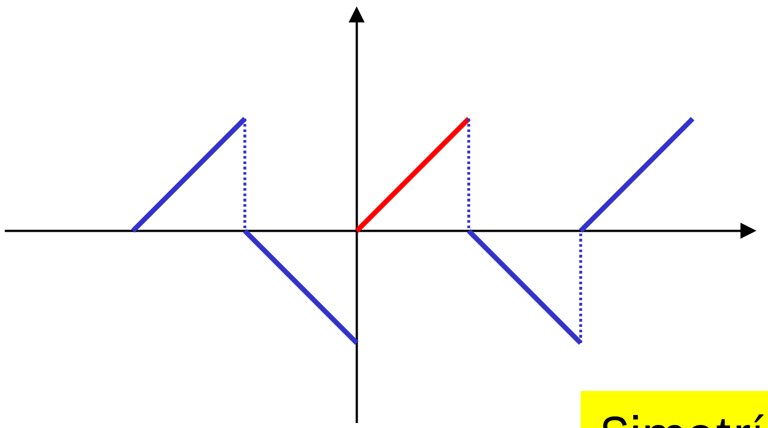


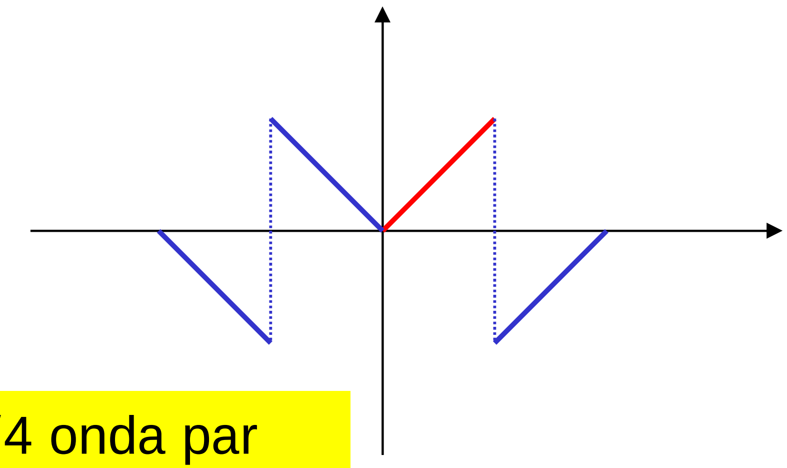
Simetría impar (senos)





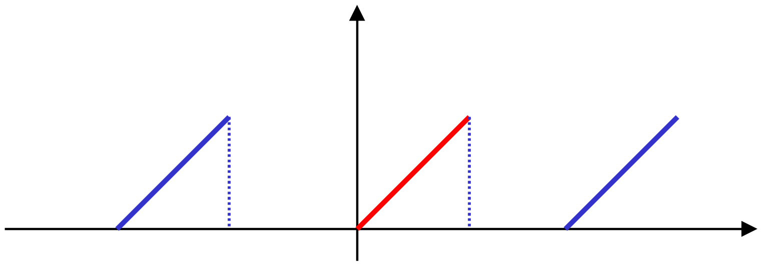
Simetría par (cosenos)



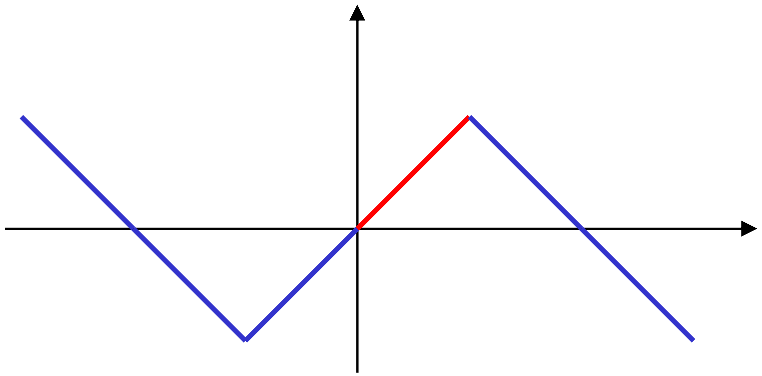


Simetría ½ onda (senos y cosenos impares)

Simetría 1/4 onda par (cosenos impares)



senos y cosenos



Simetría 1/4 onda impar
(senos impares)

Simetrías y Coeficientes de Fourier

Simetría	Coeficientes		Funciones en la serie
Ninguna	$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$	$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\text{sen}(n\omega_0 t)dt$	Senos y cosenos
Par	$a_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$	$b_n=0$	únicamente cosenos
Impar	$a_n=0$	$b_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\text{sen}(n\omega_0 t)dt$	únicamente senos
media onda	$a_n = \begin{cases} 0 & n\ \text{par} \\ \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt & n\ \text{impar} \end{cases}$	$b_n = \begin{cases} 0 & n\ \text{par} \\ \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\text{sen}(n\omega_0 t)dt & n\ \text{impar} \end{cases}$	Senos y cosenos impares

Simetrías y Coeficientes de Fourier

Simetría	Coeficientes		Funciones en la serie
Ninguna	$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$	$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\text{sen}(n\omega_0 t)dt$	Senos y cosenos
¼ de onda par	a_n=0 (n par) $a_n = \frac{8}{T}\int_{0}^{T/4} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$ (n impar)	b_n=0	Sólo cosenos impares
¼ de onda impar	a_n=0	b_n=0 (n par) $b_n = \frac{8}{T}\int_{0}^{T/4} f(t)\text{sen}(n\omega_0 t)dt$ (n impar)	Sólo senos impares