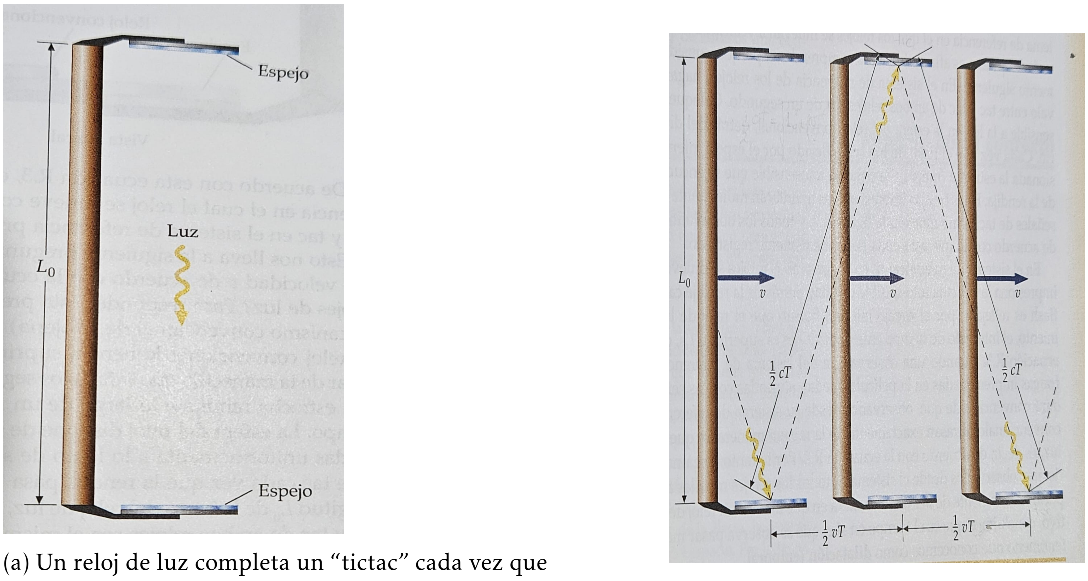
Práctica 1: Relatividad Especial - Transformaciones de Lorentz

Transformaciones de Galileo

1. Considere un reloj de luz que consta de dos espejos separados por una distancia L_0 (figura 1a). Los dos espejos están frente a frente y un flash de luz va y viene reflejándose en ellos. Cada vez que el flash se refleja en un espejo, digamos el superior, consideramos que el reloj hace “tic”, y al regresar y reflejarse en el inferior hace “tac”, completando así un “tictac”. Suponga un observador $\mathcal{O}$ fijo en la tierra, y otro observador $\mathcal{O}'$ fijo al reloj de luz, que se mueve a una velocidad v respecto a $\mathcal{O}$. Ambos observadores miden el tiempo que tarda el reloj de luz entre tac y tac. El tiempo medido por el observador $\mathcal{O}$ lo llamaremos T, y el medido por $\mathcal{O}'$, T_0.

   Encuentre la relación entre los tiempos medidos por $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$.



(a) Un reloj de luz completa un “tictac” cada vez que el flash se refleja en el espejo inferior.

(b) El reloj de luz se mueve con velocidad v.

Figura 1

2. Considere un reloj de luz horizontal, como el de la figura 2, que se mueve a una velocidad v respecto a un observador fijo en la Tierra. La barra que separa los dos espejos tiene una longitud L_o cuando se mide en el sistema de referencia en reposo respecto al reloj. Llamemos $\Delta\tau$ al tiempo propio medido por un observador que está en reposo respecto al reloj de luz, es decir, el tiempo que le lleva a la luz trasladarse desde el espejo izquierdo, reflejarse en el espejo derecho y regresar al espejo izquierdo.

   Suponga que la barra (que se mueve respecto al observador fijo en la Tierra) tiene una longitud L cuando se mide en el sistema de referencia del observador fijo en la Tierra. Además, sea Δt el tiempo que le lleva a la luz trasladarse desde el espejo izquierdo, reflejarse en el espejo derecho y regresar al espejo izquierdo, medido en el sistema de referencia del observador fijo en la Tierra. Demuestre la relación:

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{L_0}{L}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

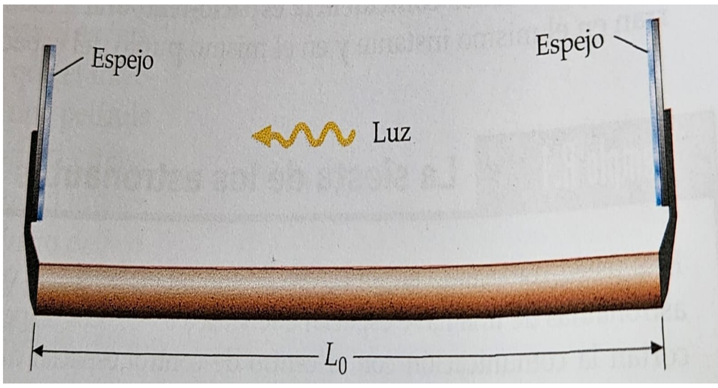


Figura 2

3. Asumiendo que se utiliza una luz monocromática de longitud de onda λ en un interferómetro de Michelson (ver figura 3), y el aparato se mueve en la dirección del eje x con una velocidad u:

   a) Encuentre la diferencia de fase entre dos rayos que llegan a D y F.

   b) Si se rota el dispositivo experimental 90°, encontrar nuevamente esta diferencia de fase.

   c) Discutir los resultados obtenidos en las dos situaciones propuestas.

   d) Utilizando los resultados obtenidos del experimento de Michelson - Morley, de lo demostrado en el problema 2, encontrar la contracción de Lorentz ($L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$).

4. Demostrar explícitamente que la forma de la ecuación de onda no se preserva frente a una transformación de Galileo.

Transformaciones de Lorentz

5. Sean dos sistemas de referencia $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$, que se mueven uno respecto al otro con una velocidad uniforme v pararela a los ejes x y x' de $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ respectivamente. Se emite una señal luminosa en el instante $t = 0$ en los puntos en los que $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ coinciden. Teniendo en cuenta el postulado de la invarianza de la velocidad de la luz c, dos observadores (uno en $\mathcal{S}$ y el otro en $\mathcal{S}'$) estiman, por separado, que la superficie de la onda luminosa es una esfera con centros en $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ respectivamente, descriptas por:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \tag{1}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \tag{2}$$

   a) Mostrar que estas relaciones son incompatibles con las transformaciones de Galileo.

   b) Intente con

$$x' = \alpha x + \epsilon t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \delta x + \eta t \tag{3}$$

   y muestre que describen correctamente los cambios de coordenadas, encontrando los valores de $\alpha, \epsilon, \delta, \eta$ en función v y c.

6. Obtener la transformación de Lorentz que exprese las coordenadas x, y, z y t medido por $\mathcal{O}$ en función de las coordenadas x', y', z' y t' medido por $\mathcal{O}'$.

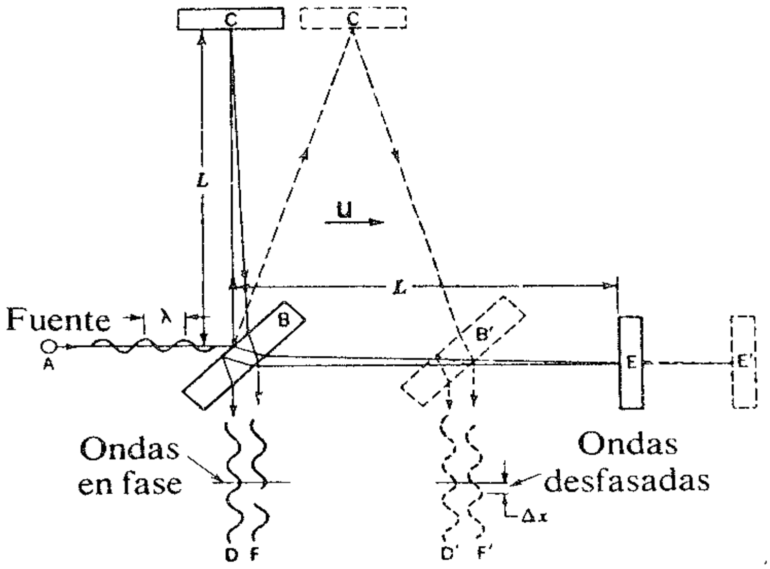


Figura 3

7. Probar que el intervalo espacio-temporal es invariante frente a una transformación de lorentz en una dirección.

8. Consideremos un sistema de referencia $\mathcal{O}$ fijo, y otro $\mathcal{O}'$ que se mueve a una velocidad v respecto a $\mathcal{O}$. Demostrar explícitamente que la forma de la ecuación de onda es la misma en ambos sistemas, si las coordenadas están relacionadas por una transformación de Lorentz.

9. Relojes en movimiento

   Considere un sistema de referencia $\mathcal{S}$ fijo y otro $\mathcal{S}'$ que se mueve a velocidad constante de $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ respecto a $\mathcal{S}$.

   a) Considere un reloj en reposo en el sistema $\mathcal{S}$ que mide un intervalo de tiempo de 5 segundos en ese sistema. Determine ese intervalo de tiempo medido por un observador en el sistema $\mathcal{S}'$ en movimiento respecto a $\mathcal{S}$.

   b) Ahora, considere un reloj en reposo en el sistema $\mathcal{S}'$ que mide un intervalo de tiempo de 5 segundos en ese sistema. Determine ese intervalo de tiempo medido por el observador que está en reposo respecto al sistema $\mathcal{S}'$.

      - Justificar los incisos 9a y 9b utilizando las transformaciones de Lorentz.

   c) Comparar lo realizado en este problemas con los resultados obtenidos en el problema 1.

10. Barras en movimiento

    Considere un sistema de referencia $\mathcal{S}$ fijo y otro $\mathcal{S}'$ que se mueve a velocidad constante respecto a $\mathcal{S}$.

    a) Considere una varilla a lo largo del eje x y en reposo respecto a un sistema $\mathcal{S}$. Como está en reposo, las coordenadas de posición de sus extremos x_1 y x_2 son independientes del tiempo. En consecuencia,

    $$L_0 = x_2 - x_1 \tag{4}$$

    es la longitud de la varilla en reposo o longitud propia de la varilla. Determine la longitud de esta varilla respecto de un sistema de referencia $\mathcal{S}'$ que se mueve a velocidad constante respecto de $\mathcal{S}$.

b) Ahora, considere también una varilla a lo largo del eje x' y en reposo respecto al sistema $\mathcal{S}'$. Por la misma razón que el inciso anterior

$$L_0 = x'_2 - x'_1 \tag{5}$$

se denomina longitud de la varilla en reposo o longitud propia de la varilla en $\mathcal{S}'$. Determine la longitud de esta varilla respecto de un sistema de referencia $\mathcal{S}$ si esta se mueve a velocidad constante respecto de $\mathcal{S}$.

c) Discuta los resultados.

d) Comparar lo realizado en este problemas con los resultados obtenidos en el problema 2.

11. El sistema $\mathcal{O}'$ posee una velocidad de 0.6 c con relación a $\mathcal{O}$. Se ajustan los relojes de manera que a $t = t'$ en $x = x' = 0$. Dos sucesos tienen lugar. En $x_1 = 10m$, $t_1 = 2x10^{-7}s$. El suceso 2 tiene lugar en $x_2 = 50m$, $t_2 = 3x10^{-7}s$. Determine la distancia y la diferencia de tiempos entre los sucesos medidos en $\mathcal{O}'$.

12. Una nave espacial que se dirige hacia la luna pasa la tierra con una velocidad relativa de 0.8 c.

    a) ¿Qué tiempo demora el viaje de la tierra a la luna de acuerdo a un observador terrestre?

    b) ¿Cuál es la distancia tierra-luna de acuerdo a un pasajero de la nave? ¿Qué tiempo demora el viaje de acuerdo con el pasajero?.

13. ¿Cuál debe ser la velocidad relativa de dos observadores inerciales para que sus medidas de intervalos de tiempo difieran en 1 %?

14. Dos eventos tienen lugar con respecto a un observador $\mathcal{O}$ en los tiempos t_1 y t_2 y en los lugares x_1 y x_2, de modo que se puede definir $T = t_2 - t_1$ y $L = x_2 - x_1$.

    a) Demostrar que un observador $\mathcal{O}'$ (que se mueve con una velocidad $\vec{v}$ en la dirección del eje x con respecto a $\mathcal{O}$) medirá dichos eventos en los tiempos t'_1 y t'_2, tales que si $T' = t'_2 - t'_1$ entonces $T' = k(T - v\ L/c^2)$.

    b) En general, son los eventos que aparecen simultáneos en $\mathcal{O}$, simultáneos en $\mathcal{O}'$? Bajo que condiciones dos eventos simultáneos en $\mathcal{O}$, lo serán también para cualquier observador que se mueve con movimiento relativo a $\mathcal{O}$?

    c) Obtener la relación entre L y T de modo que el orden en el cual suceden los dos eventos, observados por $\mathcal{O}'$, se invierten con respecto a lo observado por $\mathcal{O}$.

    d) Suponer dos los eventos $(x_1; t_1)$ y $(x_2; t_2)$ observados por $\mathcal{O}$ son el resultado de alguna señal transmitida de $(x_1; t_1)$ con velocidad $V = L/T \leq c$, puede el orden de los eventos aparecer invertidos en $\mathcal{O}'$?

15. Dado un par de eventos separados por un intervalo tipo tiempo, muestre que existe un sistema de referencia en el que ocurren en el mismo lugar del espacio, y que no existe un sistema de referencia en el que ocurran en el mismo instante. ¿Qué sucede con dos eventos separados por un intervalo tipo espacio?

16. Adición de velocidades

    a) Obtener la relación entre la velocidad de una partícula medida por dos observadores en movimiento relativo a velocidad constante.

    b) Verificar el hecho de las transformaciones de velocidades obtenidas en 16a) son compatibles con la suposición de la velocidad de la luz es la misma para ambos observadores considerando un rayo de luz que se mueve a lo largo (a) del eje y con respecto a (x, y, z), (b) del eje y' con respecto a (x', y', z').

17. De las mediciones del corrimiento al rojo de la luz emitida por un quasar Q_1 se deduce que éste se aleja con una velocidad de 0.8c. El quasar Q_2 se encuentra en la misma línea que Q_1, pero más cerca de nosotros. Q_2 se aleja de nosotros con una velocidad de 0.4c, cuál será la velocidad para Q_2 medida por un observador en Q_1?

18. Una galaxia A se aleja de nosotros con una velocidad 0.35c. Otra galaxia B ubicada justo en la dirección opuesta, también se aleja de nosotros con la misma velocidad.

    a) Cuál será la velocidad con que un observador en la galaxia A ve que nuestra galaxia se aleja?

    b) Cuál será la velocidad con que un observador en la galaxia A ve que la galaxia B se aleja?

19. Adición de aceleraciones

    Obtener la relación entre la aceleración de una partícula medida por dos observadores en movimiento relativo. Suponer por simplicidad que, en el instante de la comparación, la partícula está en reposo relativo con respecto al observador $\mathcal{O}$.

20. En la cima de una montaña a 2000 m de altura se observaron un promedio de 568 muones. En mediciones de laboratorio se determino que la vida media de los muones es $\tau = 2.2$s. Si el número de muones a un dado t está determinado por $N(t) = N_0\ exp(t/\tau)$, determine el número de muones que se observará a nivel del mar si éstos viajan a una velocidad de 0.994c. Se realizó dicha medición dando como resultado un promedio de 400 muones. Determine a qué vida media corresponde esta medición y muestre que dicho valor es consistente con las predicciones de la teoría de la relatividad.

Repaso

21. Dos naves espaciales se aproximan desde posiciones opuestas en un sistema inercial. Si la velocidad de cada una de ellas es de 0.9c, calcule la velocidad relativa entre las naves. (Hint: sitúe su sistema de referencia sobre una de las naves).

22. Dos naves espaciales, cada una de 100m de longitud (cuando se miden en reposo) viajan una hacia la otra con velocidades de 0.85 c relativas a la tierra .

    a) ¿ Qué longitud tiene cada nave medida por un observador que se encuentra en la tierra?

    b) ¿Qué velocidad tiene cada nave medida por el observador que se encuentra en la otra nave?

    c) ¿ Qué longitud tiene cada nave medida por el observador que se encuentra en la otra nave?

    d) En el tiempo $t = 0$ se ve desde la tierra que las dos naves tienen su extremo delantero en contacto, es decir, comienzan a cruzarse. ¿En qué momento se verán juntos desde la tierra los extremos posteriores?

23. Una regla de longitud L está en reposo en un sistema en el cual está orientada a un ángulo θ con respecto al eje x. ¿Cuáles son la longitud L' y orientación θ' medidas por un observador moviéndose a velocidad $\vec{v}$ paralela al eje x con respecto al primer sistema?

Optativo

24. Un sistema de coordenadas $\mathcal{O}'$ se mueve a velocidad $\vec{v}$ relativa a otro sistema $\mathcal{O}'$. En $\mathcal{O}'$ una partícula tiene velocidad $\vec{u}'$ y aceleración $\vec{a}'$. Encuentre la ley de transformación de Lorentz para aceleraciones, y muestre que en el sistema $\mathcal{O}$ las componentes de la aceleración paralela y perpendicular a $\vec{v}$ son

$$a_{\parallel} = \gamma^{-3}\left(1 + \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2}\right)^{-3} a'_{\parallel}\,, \tag{6}$$

$$\vec{a}_\perp = \gamma^{-2}\left(1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2}\right)^{-3}\left(\vec{a}'_\perp + \frac{\vec{v}}{c^2}\times(\vec{a}'\times\vec{u}')\right). \tag{7}$$

25. A principios del siglo XX, Albert Einstein se enfrentó a una disyuntiva fundamental en la física: las ecuaciones de Maxwell, que describen los fenómenos electromagnéticos, predecían que la velocidad de la luz en el vacío era constante, independiente del movimiento de la fuente o del observador. Sin embargo, esta predicción entraba en conflicto con la mecánica newtoniana, donde las velocidades se sumaban de manera lineal. Einstein resolvió este conflicto con su teoría de la relatividad especial, proponiendo que las leyes de la física, incluidas las ecuaciones de Maxwell, deben ser invariantes bajo transformaciones de Lorentz. Este principio llevó a una revisión profunda de conceptos como el espacio, el tiempo y la simultaneidad.

    Encontrar como tienen que transformar los campos eléctricos y magnéticos junto con la densidad de carga y la densidad de corriente para que las ecuaciones de Maxwell sean invariantes frente a una transformación de Lorentz en el sentido del eje x positivo.

26. Supongamos un sistema $\mathcal{S}$, y $\mathcal{S}'$ que se mueve a una velocidad v en dirección del eje x positivo. Mostrar que las ecuaciones de Maxwell frente a una transformación de Lorentz en la dirección del eje x quedan invariante si los campos eléctricos y megnéticos transforman de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma(E_y - vB_z), & E'_z &= \gamma(E_z + vB_y), \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z), & B'_z &= \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & E_y &= \gamma(E'_y + vB'_z), & E_z &= \gamma(E'_z - vB'_y), \\ B_x &= B'_x, & B'_y &= \gamma(B'_y - \frac{v}{c^2}E'_z), & B_z &= \gamma(B'_z + \frac{v}{c^2}E'_y). \end{aligned}$$

    Por otro parte, la densidad de corriente y la densidad de carga transforman de esta forma:

$$j'_x = \gamma(j_x - v\rho), \quad j'_y = j_y, \quad j'_z = j_z, \quad \rho' = \gamma\left(\rho - \frac{v}{c^2}j_x\right).$$

27. Considere un cohete que se mueve con velocidad $\vec{v}$ con respecto a un dado sistema, que llamaremos el laboratorio. El cohete emite un pulso de luz a ángulos polar θ' y azimutal ϕ' con respecto a la dirección de $\vec{v}$. ¿Cuál es la dirección angular del pulso en el sistema del laboratorio?

28. Considere los rayos de luz emitidos por una estrella que alcanza la tierra perpendicularmente a su velocidad v (como medida en un sistema fijo a la estrella). Usando el teorema de adición de velocidades, calcule el ángulo de incidencia de dichos rayos como vistos en el sistema fijo a la Tierra.

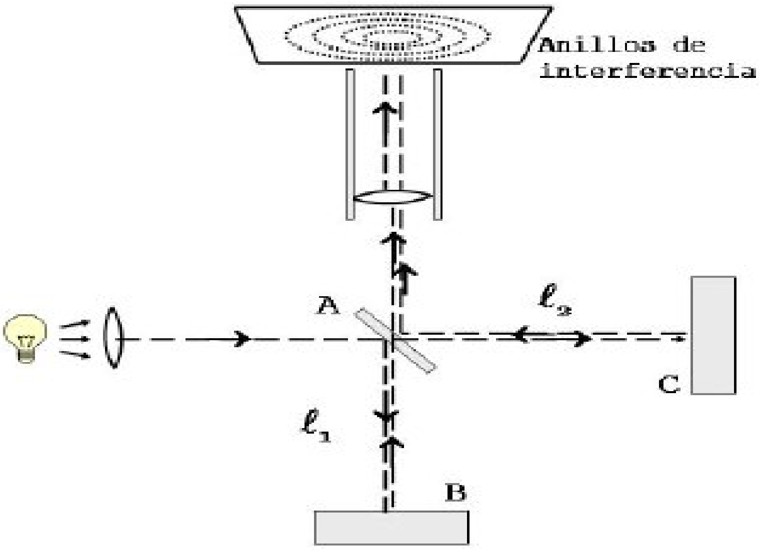


Figura 4: Interferómetro de Michelson: el rayo de luz se divide en el espejo semi transparente y recorre dos caminos perpendiculares hasta unirse en el anteojo.