Práctica 2: Relatividad Especial - Dinámica Relativista

1. Demuestre que en el límite de bajas velocidades, $p \ll mc$, la energía total relativista se reduce a la suma de la expresión clásica y un término que corresponde a la energía en reposo.

2. Un electrón se mueve a velocidad $v = 1{,}8 \times 10^8$ m/s con respecto a un dado observador inercial. Indicar su energía total y su energía cinética.

3. Un protón es acelerado hasta que su energía cinética es igual a su energía en reposo. Hallar la relación v/c.

4. A partir de la conservación del momento y la energía relativistas pruebe que un electrón libre no puede absorber un fotón.

5. Muestre que para el movimiento de una partícula a altas velocidades no existe una relación vectorial del tipo $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, con $m = \gamma m_0$, a menos que su velocidad permanezca constante en módulo. (*Hint: parta de la definición* $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, *con* $\mathbf{p}$ *el momento relativista*).

6. Considere el movimiento rectilíneo de una partícula bajo una fuerza constante con las condiciones iniciales $v(t=0) = 0, x(t=0) = 0$. **a)** Obtenga la velocidad de la partícula en función del tiempo y analice su comportamiento para valores pequeños y grandes de t. ¿En qué caso se recupera el resultado de la mecánica no relativista?. **b)** Obtenga la posición de la partícula en función del tiempo y nuevamente analice el comportamiento para valores pequeños y grandes de t.

7. Sea una partícula que tiene masa en reposo nula y energía E, choca con otra partícula de masa m_0 que está en reposo respecto al sistema de laboratorio. Obtener la energía después del choque de la partícula de masa nula en función de la energía inicial, m_0 y el ángulo θ.

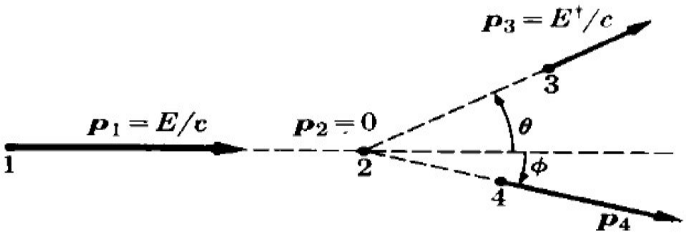

Figura 1:

8. Sean dos partículas idénticas de masa m_0 que se mueven en la misma dirección con velocidades v_1 y v_2 respecto de un sistema inercial que llamaremos sistema de laboratorio. Calcule la velocidad respecto del laboratorio que ha de tener un sistema de referencia para que el momento total según el mismo sea cero. Muestre que en el límite $v_{1,2} \ll c$ el resultado obtenido se reduce a la velocidad del centro de masa en la mecánica no relativista.

9. Se tiene a 4 partículas diferentes. Obtener la energía umbral para la reacción $1 + 2 \to 3 + 4$, donde la partícula 2 inicialmente se encuentra en reposo y la partícula 1 tiene una cantidad de movimiento p_1. Todo el problema sucede en una dimensión.

10. Obtener la ecuación para la energía umbral necesaria para la creación de un par protón-antiprotón en un choque protón- próton. El proceso esquemáticamente es así

$$P^+ + P^+ \rightarrow P^+ + P^+ + P^+ + P^-$$

Las masas en reposo son $m_p^+ c^2 = m_p^- c^2 = 938MeV$

11. Una partícula de masa m se mueve con velocidad $v = 0{,}8c$ respecto a un observador inercial O. La partícula sufre una colisión completamente inelástica con otra partícula de masa $3m$ que inicialmente estaba en reposo (respecto a $\mathcal{O}$). **a)** ¿Cuál es la velocidad y la masa de la partícula resultante luego de la colisión? (obtenga las expresiones en términos de m). **b)** Calcule la energía cinética antes y después de la colisión. ¿Se conserva?.

12. Un pión en reposo ($m_\pi = 272\, m_e$) se desintegra produciendo un muón ($m_\mu = 207\, m_e$) y un antineutrino ($m_\nu \sim 0$). La reacción se describe mediante la expresión

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \overline{\nu}$$

Encontrar la energía cinética del muón y la energía del antineutrino. ¿Cuánto vale la masa invariante del sistema muón-antineutrino?.

13. Un protón con una energía cinética de 437 MeV colisiona elásticamente con un protón en reposo y ambos protones salen despedidos con energías iguales. **a)** ¿Cuál es el ángulo existente entre ambos?. **b)** Calcular la Energía cinética de los protones después de la colisión. *Nota: Suponga que después de la colisión ambas partículas se dispersan simétricamente formando el mismo ángulo con la dirección de la partícula incidente. Este ángulo fue medido experimentalmente en 1955 por R. B. Sutton et al, Phys. Rev. 97, 783 (1955).*

14. Uno de los remanentes de la evolución temprana del universo es la existencia de un baño cósmico de fondo de fotones. Desde aquel tiempo los fotones simplemente se han enfriado. Se espera que esta radiación cósmica de fondo lleve a un límite en la energía (conocido como limite GZK) de las partículas cósmicas que llegan a la Tierra. Esto se debe a que las partículas que viajan una gran distancia (por ej.,> 20 Mpc, donde 1 Parsec$\approx 3{,}1 \times 10^{16} \approx 3{,}3$ años luz) en su camino a la Tierra experimentan colisiones con este fondo de fotones cósmicos y pierden en este proceso una cuota importante de su energía. Si esto se cumple–y las mediciones actuales parecen demostrarlo– es de esperarse que el espectro de rayos cósmicos observado en la Tierra tenga una caída abrupta para energías por encima de un cierto valor (E_{cut}). Suponiendo que las partículas de los rayos cósmicos son protones y el principal proceso de interacción en el espacio interestelar es

$$p + \gamma \rightarrow p + \pi^0\ ,$$

calcule la mínima energía del protón (E_{cut}) para la cual se puede producir dicho proceso.

Tome como valores para las energías en reposo del proton 1 GeV, del pión 100 MeV y la energía de los fotones de la radiación cósmica de fondo igual a $0{,}3 \times 10^{-3}$ eV.

Problemas auxiliares (A) y de repaso (R)

15. (A) Dado un observador inercial, para este, una partícula tiene una cantidad de movimiento $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}}$ y una energía $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}}$:

    a) Construir un escalar (siendo m la masa en reposo).

    b) Utilizando dicho escalar y siguiendo las reglas de la transformación de Lorentz en una dirección, construir una transformación de Lorentz que vincule a $\vec{p}$ y E en un sistema de referencia inercial, con $\vec{p'}$ y E' visto por otro sistema de referencia inercial que se mueve con una velocidad v respecto al primero.

16. (A) Considere un sistema de partículas con momentos $\mathbf{p_i}$ y energías E_i según un sistema inercial de referencia $\mathcal{O}$. Un segundo sistema inercial $\mathcal{O}'$ se mueve respecto a $\mathcal{O}$ con velocidad $\mathbf{V}$ según el vector $\mathbf{P} = \sum \mathbf{p_i}$ (momento total del sistema según $\mathcal{O}$). **a)** Utilizando las transformaciones del cuadrivector momento de cada partícula individual obtenidas en el ejercicio 15, encuentre el momento total según O'. **b)** Haciendo uso de la expresión obtenida, obtenga $\mathbf{V}$ si en el sistema $\mathcal{O}'$ el momento total es nulo. (*Este ejercicio funciona como generalización del ejercicio 8.*)

17. (A) Sea una partícula sobre la cual actúa una fuerza externa. Dos observadores inerciales $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$, relacionados mediante una transformación de Lorentz, describen el movimiento de la partícula. El sistema $\mathcal{O}'$ se mueve a velocidad constante respecto de $\mathcal{O}$ en la dirección del eje x. Cada observador mide la fuerza como la derivada temporal del momento lineal:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{F}' = \frac{d\vec{p}'}{dt'}$$

donde $\vec{p}$ y $\vec{p}'$ son los momentos medidos en $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ respectivamente.

a) Determinar cómo se relacionan las fuerzas $\vec{F}$ y $\vec{F}'$ medidas por los dos observadores.

b) Discutir en qué condiciones la fuerza relativista transformada coincide con la fuerza newtoniana en los dos sistemas de referencia.

c) ¿Cómo se expresa la relación entre las fuerzas si, en el instante considerado, la partícula se encuentra en reposo con respecto al sistema $\mathcal{O}'$?

18. (R) Una partícula inestable de masa $m = 3{,}34 \times 10^{-27}$ kg se encuentra inicialmente en reposo. La partícula se desintegra en dos fragmentos que salen despedidos a lo largo del eje X con velocidades $0{,}987c$ y $-0{,}868c$, respectivamente. **a)** Encuentre las masas de ambos fragmentos. **b)** Calcule la energía cinética de cada fragmento.

19. (R) Una partícula con masa en reposo nula y energía E colisiona con otra de masa en reposo m, la cual está en reposo en el sistema de laboratorio. Luego de la colisión se tienen dos partículas: una con masa en reposo m y la otra con masa en reposo M. Calcule el umbral de energía E para que ocurra el proceso.

20. (R) Una cierta partícula de masa m_0 inicialmente en la posición $x = y = 0$ y con momento p_0 en el eje X se mueve sujeta a una fuerza constante F a lo largo del eje Y. **a)** Obtenga la velocidad y las coordenadas de la partícula en función del tiempo. **b)** Demuestre que su trayectoria viene descripta por

$$y = \frac{E_0}{F}\left(\cosh\left(\frac{Fx}{p_0 c}\right) - 1\right)$$

donde $E_0 = \sqrt{p_0^2 c^2 + m_0^2 c^4}$.

21. (R) Muestre que la aniquilación de un par electrón-positrón en un fotón es incompatible con la conservación de la energía y la cantidad de movimiento. ¿Qué pasa entonces con la energía del sistema en la aniquilación?

Problemas Optativos

22. Una partícula con energía en reposo E_0 es acelerada a la energía E y choca con otra similar que se encuentra en reposo. Calcule la energía máxima disponible para la producción de partículas en el estado final.

23. Una partícula de masa m y energía cinética T_0 choca elásticamente con una idéntica en reposo. Calcule el ángulo θ de dispersión de las partículas luego del choque en términos de la energía cinética de alguna de ellas. Analice en qué condiciones el ángulo se minimiza.

24. Si la cantidad de movimiento de una partícula relativista es $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}}$ y $L = -\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}}$, calcular:

a)
$$\vec{p} \cdot \vec{v} - L \tag{1}$$

b) Compare el resultado obtenido, con la definición de energía relativista de una partícula libre dada en la teoría.

c) Discuta el resultado.