

Práctica 4: Mecánica Cuántica: Ecuación de Schrödinger.

1. a) Hallar la longitud de onda de de Broglie λ_{dB} de un electrón con energía de: $1eV$, $10eV$, $100eV$, $1KeV$, $10KeV$.
 b) ¿Qué longitudes de onda se difractarán fuertemente en un cristal de níquel, donde la separación atómica es de $2,15 \text{ \AA}$?
 c) Hallar las energías de los electrones que experimentan difracción de Bragg a un ángulo de 30° . Indicación: Emplear la relación de Bragg $m\lambda = 2d\sin(\theta)$ con $m = 1, 2, 3, \dots$, (θ es el ángulo entre el haz incidente y la dirección de los planos interatómicos).
 d) Hallar λ_{dB} de una pelota que se mueve a una velocidad de $10m/s$ y cuya masa es de $1kg$.
2. a) A partir del principio de incerteza muestre que la energía cinética media de una partícula confinada a un segmento de longitud L es no nula.
 b) Aplique el resultado encontrado para calcular la energía cinética mínima y la correspondiente velocidad de una partícula macroscópica de masa 10^{-6} g confinada a un segmento de longitud 10^{-6} m .
3. Utilizando el principio de incerteza estime el *tamaño* del átomo de hidrógeno y el valor mínimo de la energía.
4. En el experimento ilustrado en la figura 1 se quieren medir la posición y el momento de un electrón a partir de la luz que dispersa y el patrón de difracción que la misma forma al atravesar la lente. Si la posición del electrón no puede ser resuelta con mayor precisión que $\lambda/(2\sin\theta)$, donde λ es la longitud de onda del fotón incidente y θ la mitad del ángulo subtendido por la lente:

Muestre que se verifica que

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{2},$$

donde x y p_x hacen referencia a la posición y a la componente x del momento del electrón luego de la dispersión del fotón.

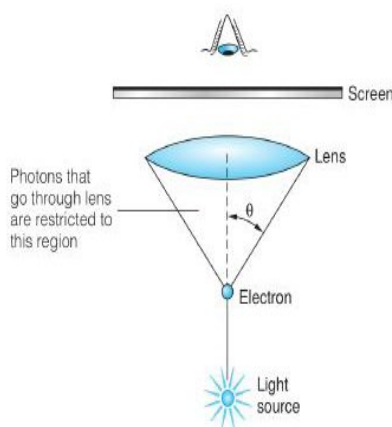


Figura 1: Ilustración del experimento: los fotones que atraviesan la lente están restringidos a esta región.

5. (a) A partir de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo derive la correspondiente ecuación independiente del tiempo indicando cuál es la hipótesis subyacente.
- (b) Verificar que la ecuación de Schrödinger es lineal en la función de onda $\Psi(x, t)$, es decir que si $\Psi_1(x, t)$ y $\Psi_2(x, t)$ son soluciones de la ecuación para un dado potencial $V(x, t)$, también lo será una combinación lineal de ambas funciones de la forma $\Psi(x, t) = c_1\Psi_1(x, t) + c_2\Psi_2(x, t)$, con c_1 y c_2 constantes arbitrarias.
- (c) Derive la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \vec{J} + \partial_t \rho = 0$, donde $\rho = \phi^* \phi$ y $\vec{J} = \frac{i\hbar}{2m}(\phi \nabla \phi^* - \phi^* \nabla \phi)$. ¿A qué se reduce dicha ecuación en el caso de que H sea independiente del tiempo?
6. Considere una partícula en un estado tal que una medida de su energía total pudiera conducir a dos posibles resultados (E_1 o E_2), por ejemplo un electrón que está a punto de realizar una transición desde un estado excitado al estado fundamental. La función de onda que describe a dicha partícula está dada por:

$$\Psi(x, t) = c_1 \psi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 \psi_2(x) e^{-iE_2 t/\hbar}$$

Demostrar que la función densidad de probabilidad es una función oscilatoria en el tiempo y calcular la frecuencia de las oscilaciones.

7. La función de onda de una partícula que se mueve en un espacio unidimensional es de la forma:

$$\phi(x) = N \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad (1)$$

donde a y p son constantes reales y N es el coeficiente de normalización.

- a) Hallar N
- b) Hallar la probabilidad de que la partícula esté localizada en el intervalo $[-a/\sqrt{3}, a/\sqrt{3}]$
- c) Calcular el valor medio de la cantidad de movimiento $\hat{p}$
8. Encuentre las autofunciones y autoenergías de una partícula en el pozo de potencial dado por

$$V(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < a \\ \infty & \text{si } |x| > a \end{cases}$$

- a) Normalizar las funciones de onda.
- b) Verificar que autoestados con autovalores distintos son ortogonales.
- c) Calcular $\bar{x}$ y Δx , y comparar con los valores clásicos correspondientes.
9. Considere una partícula de masa m y energía E que incide desde la izquierda ($x < 0$) sobre un potencial escalón de la forma:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 > 0, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donde V_0 es constante.

- (a) Encuentre la función de onda $\psi(x)$, solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el caso en que la energía de la partícula es $E < V_0$.
- (b) Teniendo en cuenta que la función de onda es $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$, halle la densidad de probabilidad $\Psi(x, t)^* \Psi(x, t)$ para la región $x > 0$. Interprete el resultado obtenido.
- (c) Estimar la distancia de penetración de una partícula de polvo pequeña de masa $m = 4 \times 10^{-14}$ kg que se mueve con velocidad $v = 10^{-2}$ m/s desde la izquierda y hacia un potencial escalón. Suponga que en el momento del "impacto" la energía cinética de la partícula es igual a la mitad de la altura V_0 del escalón.

10. (a) Resolver la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el caso de una partícula que se mueve desde $x < 0$ e incide sobre un potencial escalón como el del problema anterior pero donde la energía de la partícula es $E > V_0$.
 (b) Hallar los coeficientes de transmisión y reflexión en este caso.
11. Considere una partícula de masa m y energía E que incide desde la izquierda ($x < 0$) sobre una barrera de potencial de la forma:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 > 0, & \text{si } 0 < x < a \\ 0, & \text{si } x < 0 \text{ o } x > a \end{cases}$$

donde V_0 es constante.

- (a) Estudie el comportamiento de las soluciones de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para $E > V_0$: escriba la forma general de las soluciones, las condiciones de contorno correspondientes y determine los coeficientes de reflexión y transmisión de la barrera.
- (b) Obtenga las expresiones de los coeficientes de reflexión y transmisión en el límite $E \rightarrow V_0$.
- (c) Determine la condición que ha de cumplirse para que la barrera sea transparente ($T = 1$, $R = 0$). Este tipo de fenómeno de resonancia que se produce cuando partículas atraviesan una barrera es desconocido desde el punto de vista clásico.
- (d) Repita lo hecho en el inciso (a) para el caso en que $E < V_0$. (Hint: note que la única diferencia con el caso anterior estará en que para $E < V_0$ el número de onda de la partícula dentro de la barrera, sea k , se vuelve imaginario. A partir de esto puede traducir los resultados ya obtenidos a la nueva situación.)
- (e) Demuestre que cuando la barrera es muy ancha y muy alta, es decir, en el límite $ka \gg 1$, donde k es el número de onda en la barrera, el coeficiente de transmisión T se reduce a:

$$T \simeq 16 \frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right) e^{-2ka}$$

El hecho de que $T \neq 0$ para $E < V_0$, da cuenta de que existe una cierta probabilidad, dada por el coeficiente de transmisión, de que la partícula incidente pueda penetrar la barrera y emerger del otro lado de la misma. Este fenómeno, prohibido desde el punto de vista clásico, se conoce como *Efecto Túnel*. Este efecto decrece rápidamente cuando la barrera se hace alta y ancha, como lo manifiesta el factor exponencial decreciente.

Compruebe que en el límite clásico, $\hbar \rightarrow 0$, el coeficiente de transmisión tiende a cero (el efecto túnel es un fenómeno puramente cuántico).

12. Un electrón de energía 5 eV incide sobre una barrera de potencial de altura $V_0 = 10$ eV y espesor $a = 0,2$ nm.
- (a) Calcule la probabilidad de que el electrón atraviese la barrera.
- (b) Calcule la probabilidad de que el electrón sea reflejado (en este último caso tenga en cuenta que la relación entre los coeficientes de transmisión y reflexión es: $T + R = 1$).