Física I.

Victoria Inés Fernández

19 de junio de 2020.

1. Fluidos, motivación.

La física (o mecánica) de los fluidos es la base de la ingeniería hidráulica y a su vez se aplica en muchas otras ramas de la ingeniería. Por ejemplo, un ingeniero nuclear puede estar interesado en el flujo de fluidos en el sistema hidráulico de un reactor nuclear, así como un ingeniero aeronáutico puede diseñar sistemas hidráulicos para controlar los flaps en las alas y permitir que un avión aterrice.

2. Fluidos en movimiento (hidrodinámica).

La clase pasada estudiamos los fluidos en reposo, sin embargo, los ejemplos que aquí nombramos involucran fluidos en movimiento. Es por eso que hoy nos ocuparemos de la dinámica de los fluidos, es decir, la hidrodinámica.

2.1. Fluidos Ideales.

El movimiento de los *fluidos reales* es muy complicado y aún hoy es un tema abierto de investigación. En el marco de esta materia, estudiaremos el movimiento de un *fluido ideal*, que además de ser un modelo más sencillo de analizar matemáticamente, nos permite entender algunas de las propiedades de la dinámica de fluidos.
Asumiremos que nuestro *fluido ideal* cumple que:

- es **incompresible y homogéneo.** Al igual que en la clase pasada, supondremos que la densidad del fluido es constante y uniforme,
- es **no viscoso.** La *viscosidad* nos indica el grado de fricción interna en el fluido. Esta fuerza viscosa tiene en cuenta la resistencia que ofrecen dos capas adyacentes de fluido a desplazarse una respecto a otra. Es la fuerza en los fluidos análoga a la fuerza de roce en los sólidos. Luego, si decimos que el fluido es *no viscoso*, no habrá ninguna fricción interna,
- su flujo es **laminar**. En un *flujo laminar* cada partícula del fluido sigue una trayectoria, si dos partículas siguen trayectorias diferentes no se cruzarán en ningún lugar. El flujo en el centro de un arroyo tranquilo es laminar, mientras que el flujo en los rápidos de un río será turbulento. Por encima de una *rapidez crítica* los flujos se vuelven *turbulentos*,
- su flujo es **estacionario.** En un *flujo estacionario*, la velocidad del fluido en movimiento es independiente del tiempo en cualquier punto fijo.

- su flujo es **irrotacional.** Decimos que el flujo es *irrotacional* si el fluido no tiene momento angular alrededor de ningún punto (es decir no rota respecto a su centro de masa).

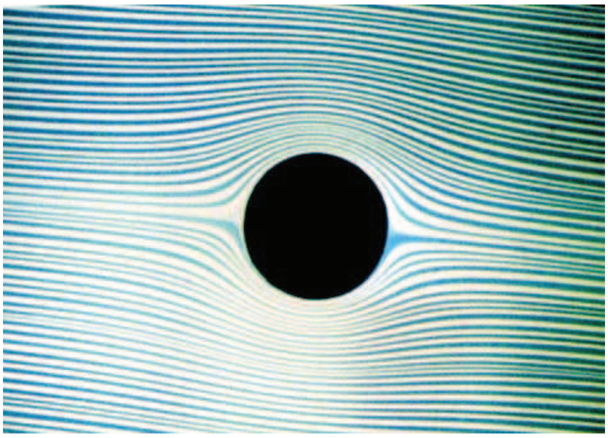
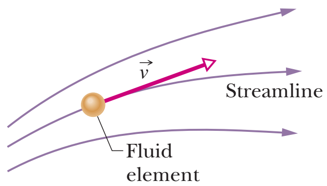


Figura 1: En estas fotos vemos un flujo estacionario alrededor de un cilindro y como el flujo del humo de un cigarrillo cambia de laminar a turbulento, esto se debe a que el gas más caliente aumenta su rapidez hasta llegar a la *rapidez crítica*, a la cual se produce la transición.

En la primera foto dijimos que *vemos* el flujo estacionario, ¿cómo es esto posible? Podemos ver como fluye un fluido agregándole lo que se llaman trazadores con tinturas que siguen las *líneas de flujo*. Éstas son los caminos que siguen cada elemento del fluido. A medida que una partícula de fluido se mueve, su velocidad puede cambiar tanto en magnitud como en dirección. Sin embargo, el vector velocidad en cualquier punto será siempre tangente a la trayectoria (es decir la línea de flujo) en ese punto. Las líneas de flujo nunca se cruzan, porque si lo hicieran, al llegar a la intersección, una partícula tendría dos caminos a seguir (y dos velocidades) al mismo tiempo, por lo que el flujo dejaría de ser laminar.
¿se podrán agregar trazadores para ver un flujo turbulento? No, si uno inyecta la tinta en un flujo turbulento, ésta tiñe rápidamente todo el fluido y por ende no tiene sentido hablar de líneas de flujo en los regímenes turbulentos.
Un conjunto de líneas de flujo forman lo que se conoce como un tubo de flujo. Este tubo actúa como una cañería, ya que ninguna partícula del fluido puede entrar o salir a través de sus paredes.

2.2. Ecuación de continuidad.

Analicemos la siguiente situación de la vida cotidiana, estamos regando el jardín, pero dado que nuestra manguera no es demasiado larga, no llegamos a regar las esquinas, ¿qué hacemos? Sí, todos lo hemos hecho alguna vez, apretamos el extremo de la manguera con los dedos pulgar e índice, de manera de achicar el orificio de salida y así logramos que el chorro llegue más lejos. Aparentemente, la velocidad del agua depende de la sección transversal A por la que ella fluye, ¿y porqué ocurre esto? Ahora lo responderemos.
Observemos la Figura 3:



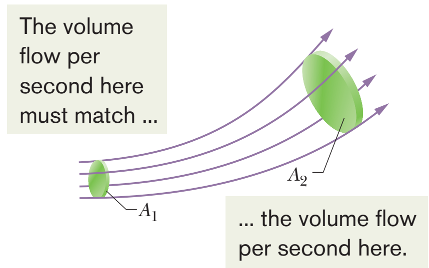


Figura 2: En la primera figura, un elemento del fluido traza una línea de flujo a medida de que se mueve, siendo su velocidad, tangente a la trayectoria. En la segunda figura, se define al tubo de flujo, a partir de las líneas de flujo que forman su contorno.

El flujo va hacia la derecha, vemos un segmento de longitud L de un tubo (que será más largo). El fluido tiene velocidad v_1 al comienzo del segmento y v_2 al final. El tubo tiene secciones transversales A_1 a la izquierda y A_2 a la derecha. Supongamos que en un intervalo de tiempo Δt, un volumen ΔV de fluido ingresa en el segmento de tubo por la izquierda. Luego, como el fluido es incompresible, un volumen idéntico ΔV deberá salir por el extremo derecho del segmento del tubo.
Usaremos este volumen común ΔV para relacionar las rapideces y áreas. Imaginemos que un elemento de fluido ingresa por la izquierda al mismo tiempo que otro elemento de fluido sale por la derecha, consideremos que las distancias que recorren, en el intervalo Δt, son Δx_1 y Δx_2, respectivamente. Luego, como el volumen entrante es igual al saliente tenemos que

$$A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2,$$

donde hemos supuesto también que las distancias recorridas Δx_i son pequeñas, de modo que la sección transversal del tubo A_i no varíe significativamente.
Dividamos esta ecuación por el intervalo de tiempo Δt en que se está moviendo el fluido:

$$\frac{A_1 \Delta x_1}{\Delta t} = \frac{A_2 \Delta x_2}{\Delta t},$$

en el límite en que el intervalo Δt tiende a cero, el cociente entre la distancia recorrida y el intervalo de tiempo es la rapidez instantánea del fluido, obteniendo:

Ecuación de continuidad para fluidos.
El producto del área por la rapidez de un fluido (ideal) en todos los puntos de la tubería es constante:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{constante}.$$

Volviendo a la pregunta inicial sobre el riego, estamos en condiciones de responder, debido a la *ecuación de continuidad*, al achicar la sección transversal, aumentamos la velocidad de salida del chorro de agua.

Actividad 1.
Cuando sale agua de una canilla muy despacio (de manera que el flujo es laminar), se observa que el chorro de agua se achica a medida que desciende, como muestra la Figura 4. Con lo estudiado hasta el momento, ¿piense y explique porqué sucede esto?

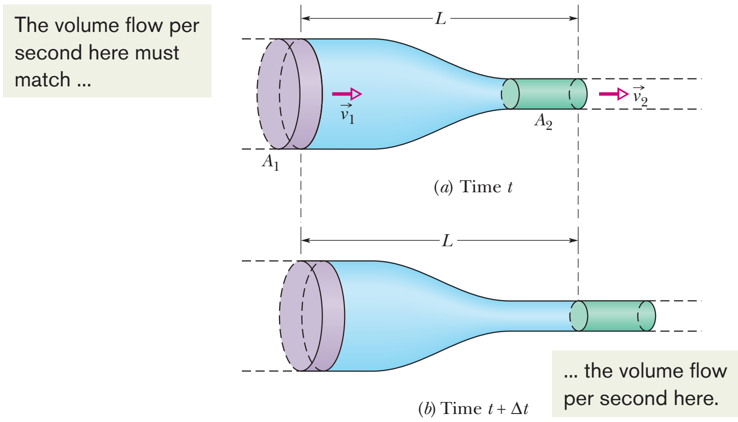


Figura 3: el fluido fluye de izquierda a derecha a una razón constante a través de un tubo de longitud L. La rapidez del fluido es v_1 en el lado izquierdo y v_2 en el lado derecho. La sección transversal de área es A_1 en el lado izquierdo y A_2 en el derecho. Del tiempo t en (a) al tiempo $t + \Delta t$ en (b), entra una cantidad de fluido del lado izquierdo (en violeta) y la misma cantidad sale del lado derecho (en verde).

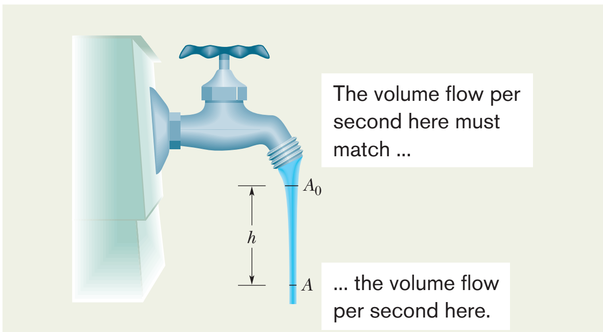


Figura 4: Canilla por la que fluye un flujo laminar.

2.3. Teorema de Bernoulli.

En la Figura 5, se representa un tubo de flujo de un fluido ideal que se mueve a razón constante. Supongamos que, en un intervalo de tiempo Δt, un volumen de fluido ΔV (en azul) entra en el tubo desde el extremo de la izquierda y un volumen idéntico (en verde) sale del extremo derecho. El volumen saliente debe ser el mismo que el entrante, ya que hemos asumido que la densidad del fluido, ρ, es constante. Sean y_1, v_1 y p_1 la altura, rapidez y presión del fluido en el extremo izquierdo e y_2, v_2 y p_2 las correspontientes cantidades en el extremo derecho.
Nuestro sistema es el volumen total del fluido ideal de la Figura 5. Aplicaremos el principio de conservación de energía a este sistema desde que se mueve de su estado inicial (Figura 5 (a)) a su estado final (Figura 5 (b)). El fluido entre los dos planos verticales separados una distancia L en la Figura 5, no cambia sus propiedades en todo el proceso, luego sólo debemos tener en cuenta los cambios que ocurren en los extremos.

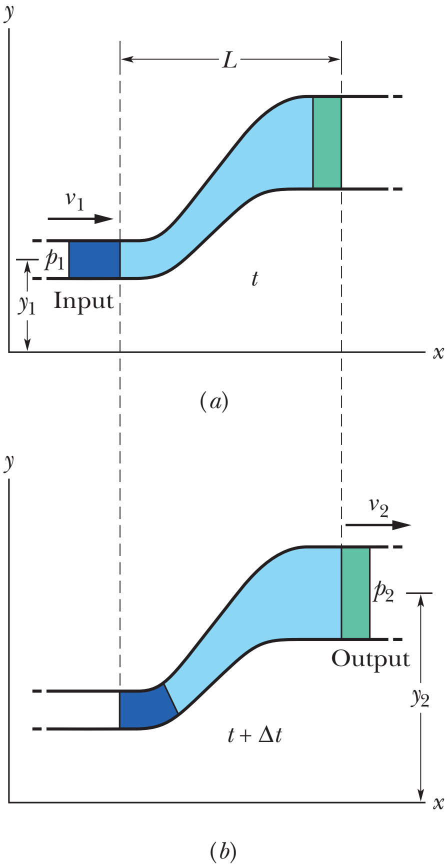


Figura 5: Un fluido fluye a razón constante a través de una longitud L de un tubo, desde la entrada de la izquierda hasta la salida a la derecha. Del tiempo t en (a) a $t + \Delta t$ en (b), entra una cantidad de fluido del lado izquierdo (en azul) y la misma cantidad sale del lado derecho (en verde).

Primero, recordemos el teorema de trabajo y energía:

$$W = \Delta K,$$

que nos dice que el cambio en la energía cinética de nuestro sistema debe ser igual al trabajo neto realizado sobre el sistema. El cambio en la energía cinética se debe al cambio en la rapidez entre los extremos del tubo:

$$\Delta K = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 = \frac{1}{2}\rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2),$$

En donde $\Delta m = \rho \Delta V$ es la masa del fluido que entra en el extremo izquierdo y sale en el derecho en el intervalo Δt.
El trabajo realizado sobre el sistema tiene dos contribuciones. Primero, el trabajo W_g de la fuerza de gravedad ($\vec{F}_g = \Delta m \vec{g}$) sobre el fluido de masa Δm desde la posición incial y_1 a la final y_2:

$$W_g = -\Delta m g (y_2 - y_1) = -\rho g \Delta V (y_2 - y_1).$$

Este trabajo es negativo, ya que el desplazamiento vertical y la fuerza de gravedad tienen direcciones opuestas.

También debe realizarse trabajo *sobre* el sistema para empujar el fluido entrante hacia adentro del tubo y, a su vez el sistema realiza trabajo para empujar el fluido saliente hacia afuera. En general, el trabajo realizado por una fuerza de magnitud F, actuando sobre una muestra de fluido contenido en un tubo de área A, para mover el fluido una distancia Δx, es:

$$F\Delta x = (pA)(\Delta x) = p(A\Delta x) = p\Delta V.$$

El trabajo realizado *sobre* el sistema es $p_1\Delta V$, mientras que el relizado *por* el sistema es $-p_2\Delta V$. Agrupando ambas contribuciones:

$$W_p = -p_2\Delta V + p_1\Delta v = -(p_2 - p_1)\Delta V.$$

Luego, el teorema de trabajo y energía queda:

$$W = W_g + W_p = \Delta K.$$

Reemplazando todas las expresiones anteriores, obtenemos:

$$-\rho g\Delta V(y_2 - y_1) - \rho\Delta V(p_2 - p_1) = \frac{1}{2}\Delta V(v_2^2 - v_1^2).$$

Finalmente simplificamos ΔV y reagrupamos, las cantidades, según pertenezcan al extremo inicial o final:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2.$$

Hemos encontrado la ecuación de Bernoulli.

Ecuación de Bernoulli (aplicada a un fluido ideal).
La suma de la presión p, la energía cinética por unidad de volumen $\frac{1}{2}\rho v^2$ y la energía potencial gravitatoria por unidad de volumen $\rho g y$ tiene el mismo valor en todos los puntos de una línea de flujo:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 = \text{constante}.$$

3. Fluidos en movimiento, síntesis.

Hoy estudiamos el **flujo de fluidos ideales**, primero tuvimos que definirlos, un *fluido ideal* es incompresible, no tiene viscosidad y su flujo es estacionario e irrotacional. También definimos a las *líneas de flujo* como la trayectoria que sigue un elemento de fluido, a su vez llamamos *tubo de flujo* a un manojo de líneas de flujo. El principio de conservación de masa nos condujo a demostrar que el flujo en cualquier tubo de flujo obedece la **ecuación de continuidad**:

$$Av = \text{constante},$$

donde A es la sección transversal de área del tubo de flujo en cualquier punto y v la rapidez del fluido en el mismo punto.
Finalmente, aplicando el principio de conservación de energía mecánica al flujo de un fluido ideal, encontramos la **ecuación de Bernoulli**:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante},$$

a lo largo de cualquier tubo de flujo.