Carlos A. Lamas
lamas@fisica.unlp.edu.ar

Práctica III: Geometría diferencial de curvas en el espacio.

Los ejercicios marcados con * son obligatorios

1. * (i) Sea $\boldsymbol{A} = (\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x, 0)$, mostrar que rot $\boldsymbol{A} = 0$ y hallar ϕ tal que $\boldsymbol{A} = \nabla\phi$. Es único ϕ? Graficar $\boldsymbol{A}$ y las curvas de nivel de ϕ en el plano xy. Cuál es la relación?

   (ii) El campo vectorial $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas toma la forma

   $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = -\frac{B_0}{2} y\, \boldsymbol{e}_x + \frac{B_0}{2} x\, \boldsymbol{e}_y = \frac{B_0}{2} \rho\, \boldsymbol{e}_\phi = \frac{B_0}{2} r \sin\theta\, \boldsymbol{e}_\phi$$

   Hallar $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ en los tres sistemas de coordenadas y verificar que los resultados coinciden y resultan $\boldsymbol{B} = B_0 \check{\boldsymbol{k}}$.

2. * Verificar que el vector

   $$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = (e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y), e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y), 0)$$

   es irrotacional y expresarlo como el gradiente de un campo escalar ϕ. Chequear que además puede ser expresado, alternativamente, como el rotor de un campo $\boldsymbol{v} = (0, 0, \psi)$, para una elección de ψ apropiada.

3. * Verificar el teorema de Stokes para la cáscara semiesférica $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ y el campo vectorial

   $$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = (y, -x, z)$$

4. Siendo $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = (x^3 + 3y + z^2, y^3, x^2 + y^2 + 3z^2)$ y S la superficie abierta

   $$1 - z = x^2 + y^2, \qquad 0 \leq z \leq 1$$

   Usar el teorema de Gauss y coordenadas cilíndricas para evaluar $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$. Verificar el resultado calculando la integral de superficie directamente.

   Ayuda: deberías hallar $d\boldsymbol{S} = (2\rho\cos\phi, 2\rho\sin\phi, 1)\rho d\rho d\phi$

5. * Evaluar las siguiente integrales de linea

   $$\int (xdx + ydy + zdz), \quad \int (ydx + xdy + dz), \int (ydx - xdy + e^{x+y}dz),$$

   a lo largo de: (i) la recta que une el origen con el punto $(1, 1, 1)$ y (ii) el arco parabólico dado por $\boldsymbol{r}(t) = (t, t, t^2)$ desde $t = 0$ a $t = 1$.

   Para cuáles de las integrales obtenemos el mismo resultado para ambos caminos? Por qué?

6. Describir paramétricamente un círculo de radio 3 centrado en $(2, 0)$ y hallar $r(\theta) = \sqrt{13 + 12\cos\theta}$. Hallar los vectores velocidad y aceleración. En qué dirección se encuentran orientados?

7. ***(i)** Dada la curva $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)) = (3t, t^2 + 4)$ para $t \in \mathbb{R}$. Eliminar t y reexpresarla como $\boldsymbol{r}(x) = (x, y(x))$. Graficarla y describir la forma de la curva.

   ***(ii)** Considerar $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t^2, 3t^2 + 4)$ para $t \in \mathbb{R}$. Eliminar t y reexpresarla como $\boldsymbol{r}(x) = (x, y(x))$. Graficarla y describir la forma de la curva. Compara con (i)

   ***(iii)** Considerar las siguientes curvas $\boldsymbol{r}_1(t) = (t, \frac{t^2}{9} + 4)$, $\boldsymbol{r}_2(t) = (3t, t^2 + 4)$, $\boldsymbol{r}_3(t) = (-3t, t^2 + 4)$. Eliminar t, graficarlas y mostrar que describen la misma curva en el plano. Calcular el vector tangente $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ para cada una de las curvas en el punto $\boldsymbol{r} = (3, 5)$ del plano. Coinciden?

   (iv) Considerar la curva $\rho(\theta) = 4\cos\theta$ en coordenadas polares en el plano. Eliminar (ρ, θ) en favor de coordenadas cartesianas (x, y) y hallar qué curva describe.

   (v) Graficar la curva $\boldsymbol{r}(t) = (t^3, t^2)$. Analizar el comportamiento en el origen.

Considerar $\boldsymbol{r}(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ y mostrar que corresponde a la *cúbica nodal* $y^2 = x^3 + x^2$.

(v) Mostrar que la curva $\boldsymbol{r}(t) = (\frac{2t^2}{1+t^2}, \frac{t(t^2-1)}{1+t^2})$ es una representación paramétrica de los puntos del plano que verifican,

$$(x^2 + y^2)(x - 2) + x = 0$$

Notar que la aplicación dada por $\boldsymbol{r}(t)$ no es inyectiva: $\boldsymbol{r}(1) = \boldsymbol{r}(-1)$

8. Considerar la hélice descripta por $\boldsymbol{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$. Mostrar que la parametrización $\boldsymbol{r}(s) = (a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, b\frac{s}{c})$ donde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ corresponde a parametrización afín. Hallar la curvatura y torsión y mostrar que son constantes. Considerar el caso $b = 0$, luego la curva se encuentra contenida en un plano. Cómo se manifiesta esto en términos de $\tau(t)$?

9. Hacer un bosquejo de la curva en el plano $\boldsymbol{r}(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ con $t \in (0, 2\pi)$. Calcular $\boldsymbol{r}'(t)$ para todo punto de la curva y luego la longitud total de la misma. Indicar la dirección de los vectores $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$

10. *Mostrar que si $|\boldsymbol{r}(t)| = cte$ entonces $\dot{\boldsymbol{r}}(t) \cdot \boldsymbol{r}(t) = 0$. Esto es, si el módulo de un vector es constante (la partícula se mueve sobre un círculo/esfera centrado/a en el origen), el vector velocidad es ortogonal a la posición en todo punto de la trayectoria.

11. Mostrar que para el caso de curvas en el plano $\boldsymbol{r}(t) = (t, f(t))$ la curvatura resulta

$$\kappa(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + (f'(t))^2)^{3/2}}$$

12. A partir de lass definiciones $\boldsymbol{t}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t)/|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|$, $\boldsymbol{n}(t) = \dot{\boldsymbol{t}}(t)/|\dot{\boldsymbol{t}}(t)|$ y $\boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{t}(t) \times \boldsymbol{n}(t)$ mostrar que

$$\boldsymbol{n}(t) = \frac{(\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)) \times \dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)| \cdot |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|}, \qquad \boldsymbol{b}(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)|}$$

13. Mostrar que la aceleración no tiene componentes en la dirección del vector binormal:

$$\boldsymbol{a}(t) \equiv \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = a_N(t)\, \boldsymbol{n}(t) + a_T\, \boldsymbol{t}(t).$$

donde

$$a_T(t) = v'(t) = \frac{d}{dt}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|, \qquad a_N(t) = v^2(t)\, \kappa(t)$$

Alternativamente

$$a_T(t) = \boldsymbol{t}(t) \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t) \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|}, \qquad a_N(t) = |\boldsymbol{t}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)| = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)|}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|}$$

14. A partir de las ecuaciones de Frenet-Serret hallar las expresiones para la curvatura y torsión

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)|}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|^3}, \qquad \tau(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t) \cdot (\ddot{\boldsymbol{r}}(t) \times \dddot{\boldsymbol{r}}(t))}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)|^2}$$

15. Mostrar que para una curva parametrizada afín $\boldsymbol{r}(s)$ se tiene $\boldsymbol{n}(s) = \ddot{\boldsymbol{r}}(s)/|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|$