Matemáticas en Física - 2024 **Carlos A. Lamas**
Departamento de Física - UNLP lamas@fisica.unlp.edu.ar

Práctica IV: Algebra lineal

Los ejercicios marcados con * obligatorios

—
Notación:
. $\mathbf{e}_i$ son los vectores canónicos: $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, ...)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, ...)$,...
El índice i que indexa los distintos vectores de la base $\{\mathbf{e}_i\}$ va abajo ↓.
. $[\mathbf{v}]_B = \{v^i_{(b)}\}$ denota las componentes del vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ en la base $B = \{\mathbf{b}_i\}$.
Las distintas componentes de un vector v^i en una dada base se denotan con un índice i arriba ↑.
. Adoptamos la convención de Einstein: omitimos el símbolo de sumatoria para índices repetidos

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{d} v^i_{(e)} \boldsymbol{e}_i \quad \rightsquigarrow \text{se denota como} \rightsquigarrow \quad \mathbf{v} = \underbrace{v^i_{(e)}\, \mathbf{e}_i}_{\text{índices repetidos se suman}}$$

aquí $d = dim(V)$ es la dimensión del espacio V.
—

1. * Definición de Espacio vectorial: un espacio vectorial sobre un cuerpo K consiste en un conjunto V y dos operaciones $\oplus : V \times V \to V$ y $\odot : K \times V \to V$ que satisfacen los siguientes axiomas:

   a) Asociatividad de la suma: $(\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) \oplus \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \oplus (\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{c}), \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$
   b) Propiedad distributividad de $\odot$ respecto de $\oplus$: $\lambda \odot (\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) = (\lambda \odot \boldsymbol{a}) \oplus (\lambda \odot \boldsymbol{b}), \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V, \forall \lambda \in K$
   c) Compatibilidad de $\odot$ con $+$: $(\lambda + \mu) \odot \boldsymbol{a} = (\lambda \odot \boldsymbol{a}) \oplus (\mu \odot \boldsymbol{a}), \forall \boldsymbol{a} \in V, \forall \lambda, \mu \in K,$
   d) Compatibilidad de $\odot$ con $\times$: $(\lambda \times \mu) \odot \boldsymbol{a} = \lambda \odot (\mu \odot \boldsymbol{a}), \forall \boldsymbol{a} \in V, \forall \lambda, \mu \in K$
   e) Identidad aditiva: $\mathbf{0} := 0 \odot \boldsymbol{a} = 0 \odot \boldsymbol{b}, \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$
   f) $1 \in K$ es una identidad a izquierda de $\odot$: $1 \odot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{a} \in V$.

   Mostrar: (i) si $\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{0}} = \mathbf{x}$, entonces $\tilde{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$, (ii) Existencia de inverso aditivo: $\forall \mathbf{x} \, \exists \, \mathbf{y} / \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$ que denotamos como $-\mathbf{x}$, (iii) $(-1) \odot \mathbf{x} = -\mathbf{x}$

2. * Dados $\mathbf{b}_1 = (1, 1)$ y $\mathbf{b}_2 = (1, -1)$:
   (i) Analizar si son linealmente independientes
   (ii) Normalizarlos
   (iii) Verificar que son generadores de $\mathbb{R}^2$ hallando $[\mathbf{x}]_B = x^i_{(b)}$.

3. * Dado el conjunto de vectores $B' = \{\mathbf{v}_i\} = \{(1, 0, -1), (-1, 2, 1), (2, -1, 3)\}$:
   (a) Demostrar que B' es base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Hallar las componentes $[\boldsymbol{w}]_{B'} = w^i_{(v)}$ del vector $\mathbf{w} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 c$ en la base B'
   (c) Hallar las componentes $\tilde{w}^i_{(v)}$ cuando $\tilde{\mathbf{w}} = (2, -5, -1)$.

4. * Determinar si el conjunto de matrices antisimétricas 3×3 es un espacio vectorial. De serlo hallar una base.

5. Sean $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ y $\mathbf{w} = w^i \mathbf{e}_i$[1]. Mostrar que si el conjunto $E = \{\mathbf{e}_i\}$ es linealmente independiente, luego

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \implies v^i = w^i \; \forall i$$

   Construir un contraejemplo donde $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ pero $v'^i \neq w'^i$ cuando $E' = \{\mathbf{e}'_i\}$ un conjunto linealmente dependiente.

[1] Mas arriba introdujimos la notación $v^i_{(e)} = [\mathbf{v}]_E$ para las componentes del vector $\mathbf{v}$ en la base $E = \{\mathbf{e}_i\}$, van a encontrar que muchos textos omiten el subíndice (e).

6. Sea V el conjunto de polinomios de grado $\leq n$: $V = \{p(t) : p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n, a_i \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Mostrar que V es un espacio vectorial y determinar su dimensión.

   Considerar el operador de derivación $D(p(t)) = p'(t)$, y la base $\mathbf{e}_0 = 1, \mathbf{e}_1 = t, \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}t^2, \ldots \mathbf{e}_n = \frac{1}{n!}t^n$.

7. Polinomios de Legendre: considerar el espacio de funciones en el intervalo $x \in (-1, 1)$. Considerar el producto escalar dado por $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f^*(x)g(x)dx$. Construir un conjunto de polinomios ortogonales a partir del conjunto $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ y normalizarlos de manera que $\langle P_n|P_m\rangle = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$ obteniendo

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$